

Euler-egyenlet: mozgásegyenlet differenciál alakja.

Impulzustétel: mozgásegyenlet integrál alakja.

mozgásegyenlet: mozgásmennyiség megváltozása = tömegre ható erők

folyadékra: térerő + felületen ható erő

Felületen ható erő = nyomásból származó erő, ha súrlódásmentes az áramlás

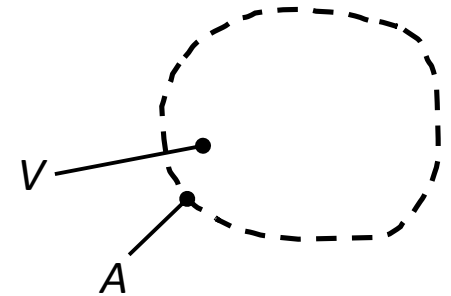
$$\text{Mozgásegyenlet: } \frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV = \int_V \rho \underline{g} dV - \int_A p d\underline{A}$$

Mozgásmennyiség időegység alatti változása: lokális + konvektív.

Konvektív: változik, mert a V térfogatban levő folyadék odébbúszik.

Másképp is kifejezhető:

V térfogatot határoló A felületen a be- és kilépő közeg mozgásmennyisége eltér.



V térfogatú folyadék rész mozgásmennyiségének megváltozása:

- Lokális (instacioner áramlás)
- Konvektív (az \underline{A} keresztmetszeten ki- és belépő mozgásmennyiség nem egyezik)

V folyadék rész mozgásmennyiségének időbeli változása: $\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV$

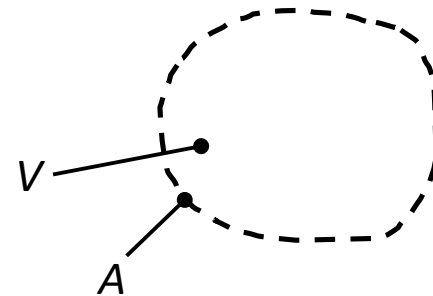
V folyadék rész mozgásmennyiségének konvektív változása: $\int_A \underline{v} \rho (\underline{v} d\underline{A})$
(ki- és belépő impulzusáram különbsége)

Mivel integrál alak, és az eredmény vektoriális, mindenképpen kell ellenőrző felület.

Impulzustétel:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV + \int_A \underline{v} \rho (\underline{v} d\underline{A}) = \int_V \rho \underline{g} dV - \int_A p d\underline{A}$$

$\rho \underline{v} d\underline{A}$ a felületen egységnyi idő alatt átlépő tömeg; mozgásmennyiséghez $\cdot \underline{v}$



Instacioner tag számítása nehézkes \rightarrow stacioner (vagy azzá tett) áramlás célszerű

Impulzustétel, az ellenőrző felületben szilárd testtel:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV + \int_{A_k} \underline{v} \rho (\underline{v} d\underline{A}) + \int_{A_b} \underline{v} \rho (\underline{v} d\underline{A}) = \int_V \rho \underline{g} dV - \int_{A_k} p d\underline{A} - \int_{A_b} p d\underline{A}$$

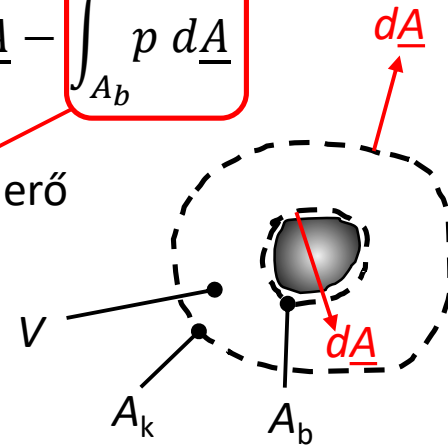
=0 mert nincs átáramlás

folyadékra ható, nyomásból származó erő

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV + \int_A \underline{v} \rho (\underline{v} d\underline{A}) = \int_V \rho \underline{g} dV - \int_A p d\underline{A} - \underline{R} + \underline{S}$$

nyomásból származó erő, ami a testre hat, ezért negatív

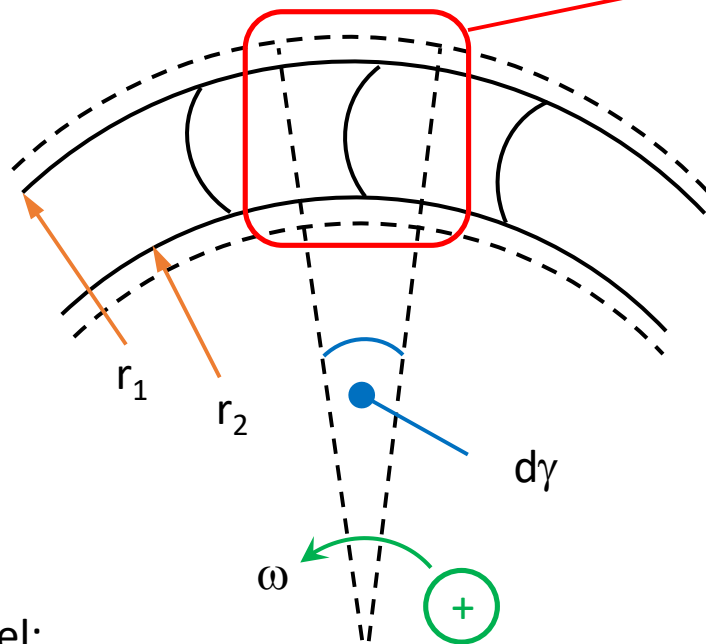
súrlódásból származó erő, ami a folyadékra hat, ezért pozitív



Impulzustétel: erők és mozgásmennyiség-változás egyensúlya.

Ezen erők a tér egy P pontjára vonatkozó nyomatéka ill. az impulzusáram-vektorok nyomatékának egyensúlya: impulzusnyomatéki egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \underline{r} \times (\rho \underline{v}) dV + \int_A \underline{r} \times \underline{v} \rho (\underline{v} d\underline{A}) = \int_V \underline{r} \times \rho \underline{g} dV - \int_A \underline{r} \times p d\underline{A} - \underline{M} + \underline{M}_s$$



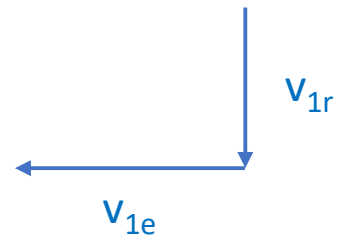
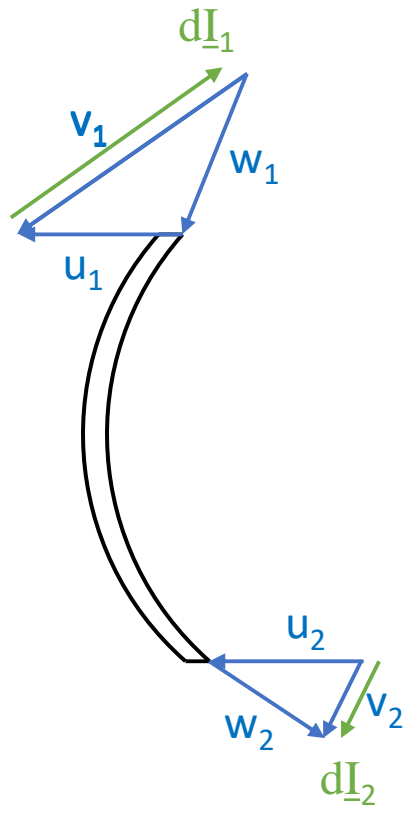
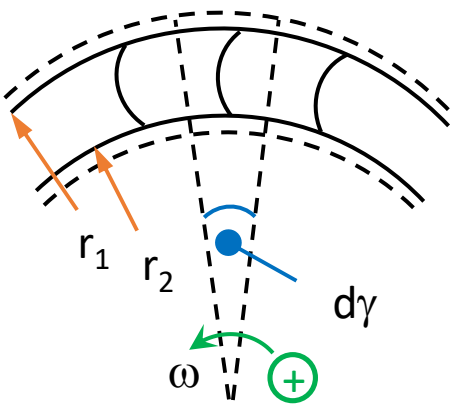
Impulzusnyomatéki tétel:

~~$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \underline{r} \times (\rho \underline{v}) dV + \int_A \underline{r} \times \underline{v} \rho (\underline{v} dA) = \int_V \underline{r} \times \rho \underline{g} dV - \int_A \underline{r} \times p dA - \underline{M} + \underline{M}_s$$~~

Feltételezések, egyszerűsítések (abszolút rendszerben vizsgáljuk):

- Ha elég sűrű ("végtelenül"), akkor stacionernek tekinthető az áramlás, és
- a nyomásból származó erőnek nincs nyomatéka a tengelyre,
- térerő, súrlódás hatása elhanyagolható.

Így az impulzusnyomatéki tétel végül:
$$\int_A \underline{r} \times \underline{v} \rho \underline{v} dA = -\underline{M}$$



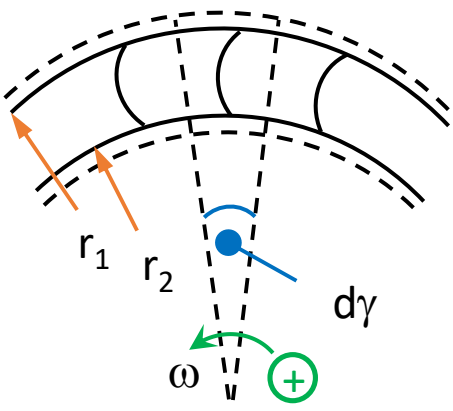
v_1 : előterelő miatt érkezik így

Rajz síkjára merőleges méret

Egységnyi tömegáram jelölt felületrészeken: $dq_m = r_1 d\gamma \cdot b \cdot \rho \cdot v_{1r}$

Impulzusáram: $|d\underline{I}| = dq_m |\underline{v}|$

Nyomatéki egyensúly: $-dI_{1u}r_1 + dI_{2u}r_2 = -dM = -dq_m v_{1u}r_1 + dq_m v_{2u}r_2$



$$-dI_{1u}r_1 + dI_{2u}r_2 = -dM = -dq_m v_{1u}r_1 + dq_m v_{2u}r_2$$

Mivel hengerszimmetrikus: $M = q_m(v_{1u}r_1 - v_{2u}r_2)$

Tengelyteljesítmény: $P = M \cdot \omega$

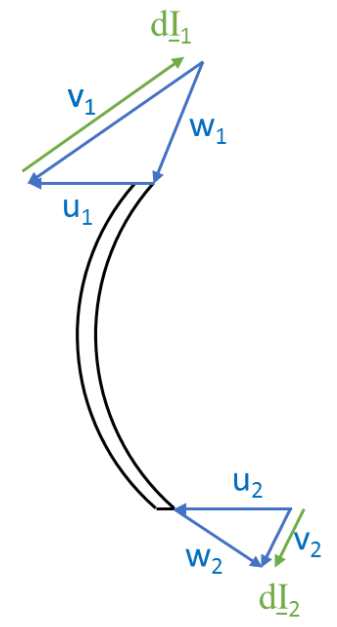
Áramlási teljesítmény (súrlódásmentes esetben): $P = -\Delta p_{\text{öid}} \cdot q_v$

$$\cancel{q_v} \cdot \rho \cdot (v_{1u}r_1 - v_{2u}r_2) \cdot \omega = -\Delta p_{\text{öid}} \cdot \cancel{q_v}$$

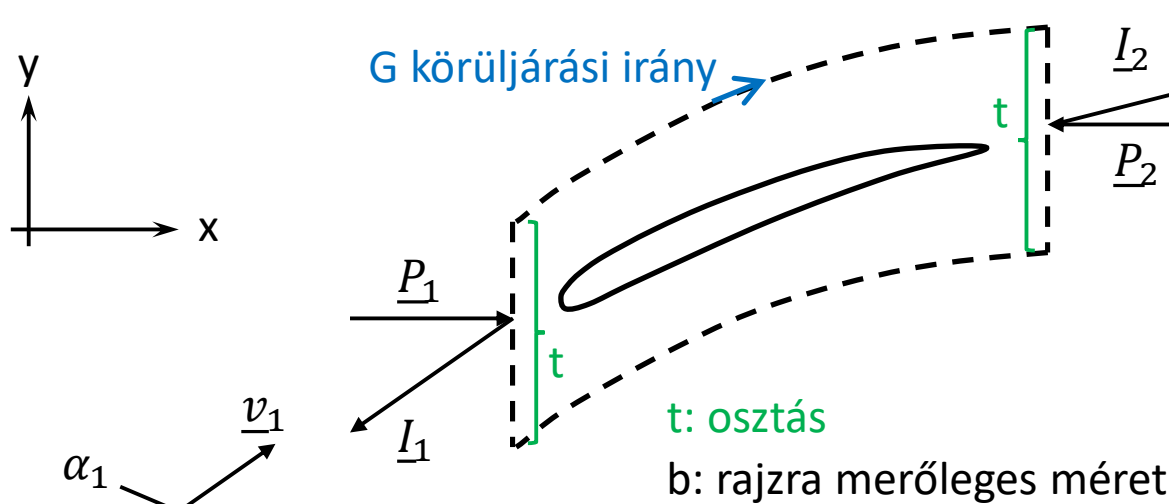
q_m

$$\Delta p_{\text{öid}} = \rho \cdot (\omega v_{2u} r_2 - \omega v_{1u} r_1) = \rho \cdot (v_{2u} u_2 - v_{1u} u_1)$$

Euler-turbinaegyenlet

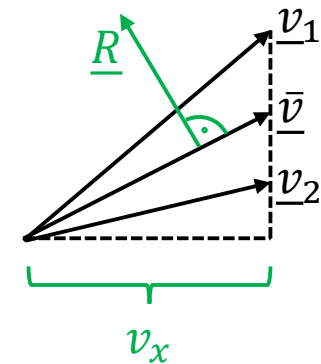


Szárnyrács, végtelen nagy kiterjedésű



$$q_m = t \cdot b \cdot \rho \cdot v_x \quad , \text{innen:}$$

$$\text{kontinuitás: } v_{1x} = v_{2x}$$

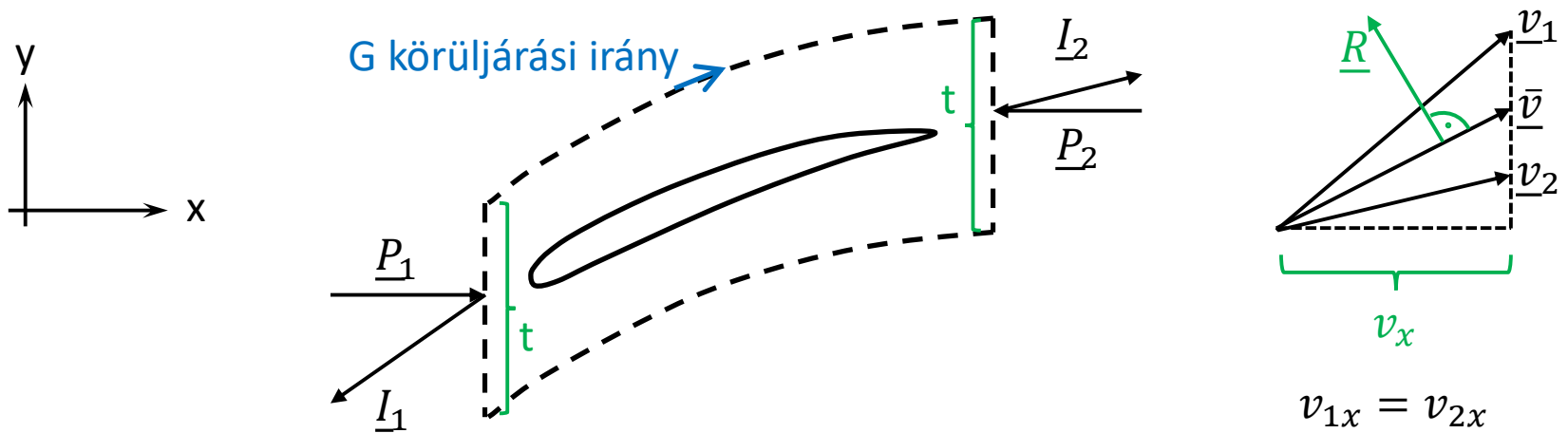


Impulzustétel:

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV} + \int_A \underline{v} \rho (\underline{v} dA) = \int_V \cancel{\rho \underline{g} dV} - \int_A p dA - \underline{R}$$

Egyszerűsítések: stacioner, súrlódásmentes, súlyerő elhanyagolva:

$$\int_A \underline{v} \rho (\underline{v} dA) = - \int_A p dA - \underline{R}$$



Impulzustétel X és Y irányú komponensegyenletei:

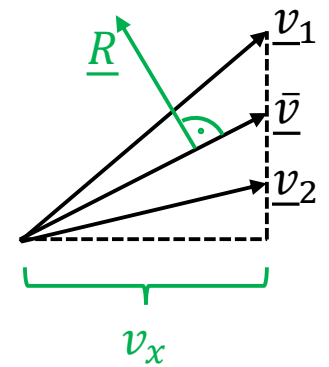
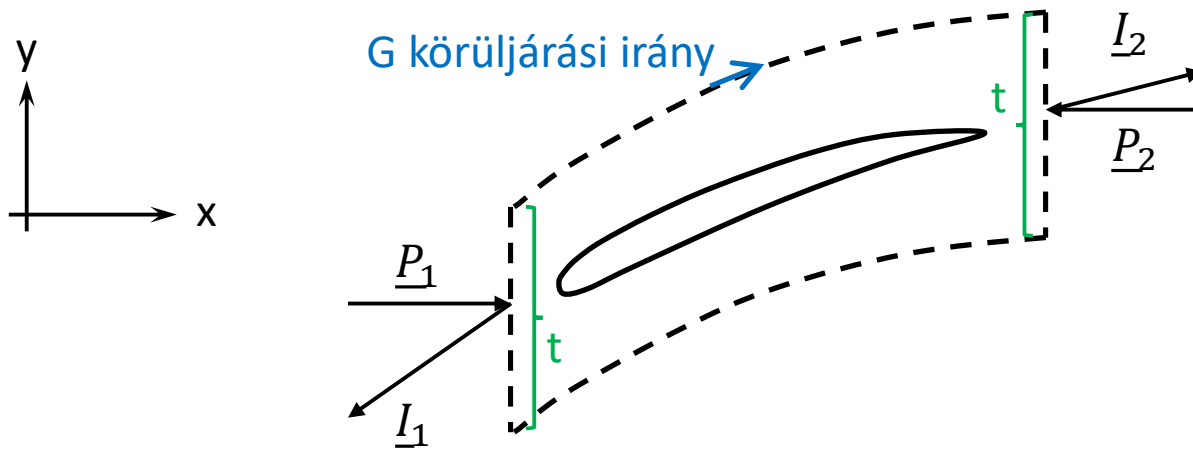
$$X: -I_{1x} + I_{2x} = P_{1x} - P_{2x} - R_x \rightarrow -\rho v_{1x}^2 A + \rho v_{2x}^2 A = p_1 A - p_2 A - R_x$$

$$Y: -I_{1y} + I_{2y} = -R_y \rightarrow -\rho v_x A v_{1y} + \rho v_x A v_{2y} = -R_y$$

$$A = t \cdot b = t \cdot 1m \quad \text{valamint} \quad v_{1x} = v_{2x} \quad \text{ezért} \quad q_m = \rho v_x A = \rho v_x t$$

$$X: \cancel{-\rho v_{1x}^2 A + \rho v_{2x}^2 A} = p_1 A - p_2 A - R_x \rightarrow R_x = p_1 t - p_2 t = (p_1 - p_2)t$$

$$Y: -\rho v_x A v_{1y} + \rho v_x A v_{2y} = -R_y \rightarrow R_y = \rho v_x t (v_{1y} - v_{2y})$$



$$\underline{v_{1x}} = \underline{v_{2x}}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

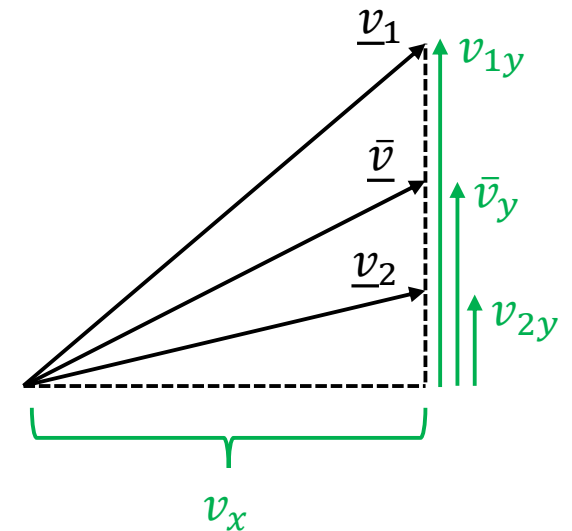
Bernoulli 1 és 2 között: $p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2)$

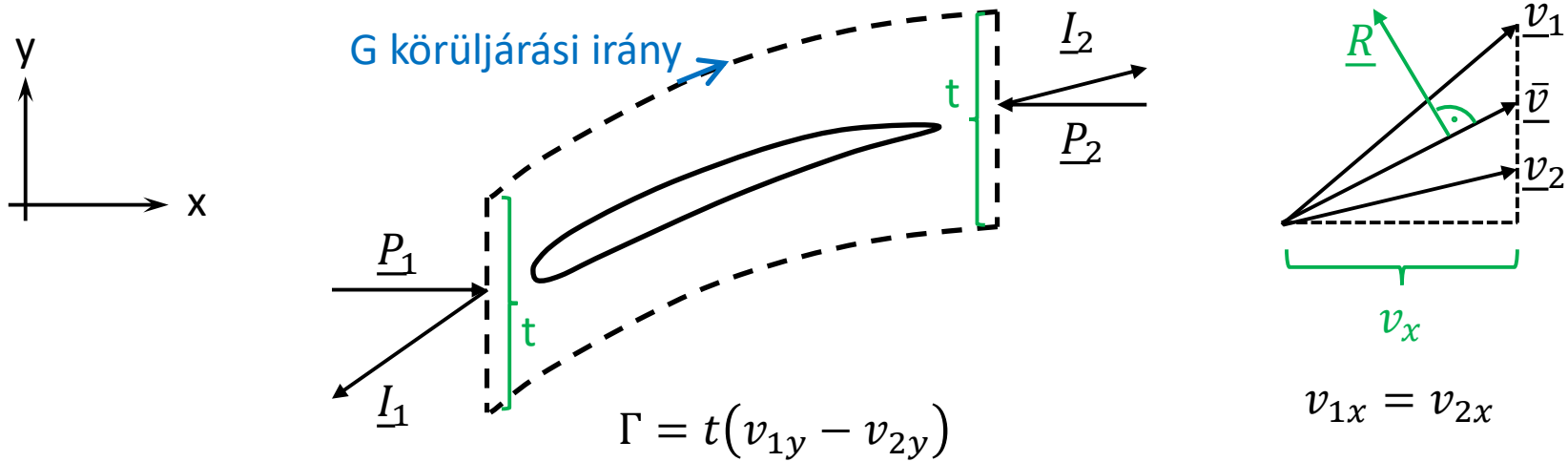
$$v_2^2 - v_1^2 = \cancel{v_{2x}^2} + v_{2y}^2 - \cancel{v_{1x}^2} - v_{1y}^2 = v_{2y}^2 - v_{1y}^2 \text{ ebből}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_{2y}^2 - v_{1y}^2) = \frac{\rho}{2} (v_{2y} + v_{1y})(v_{2y} - v_{1y})$$

Cirkuláció: $\Gamma = \oint_G \underline{v} d\underline{s}$

Az ellenőrző "felületre" felírva: $\Gamma = t(v_{1y} - v_{2y})$





$$\Gamma = t(v_{1y} - v_{2y})$$

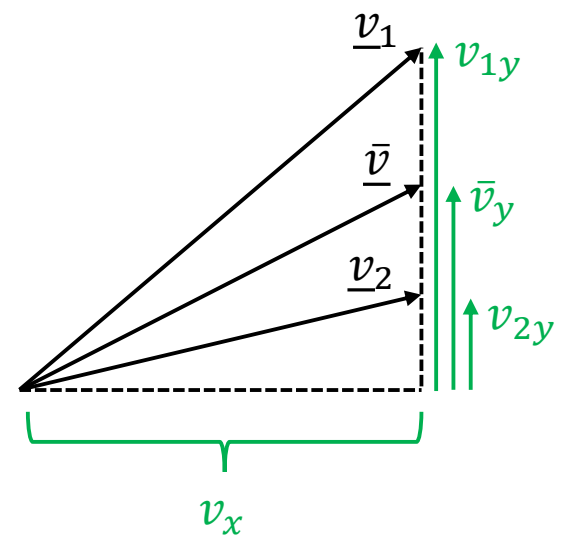
$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_{2y} + v_{1y})(v_{2y} - v_{1y})$$

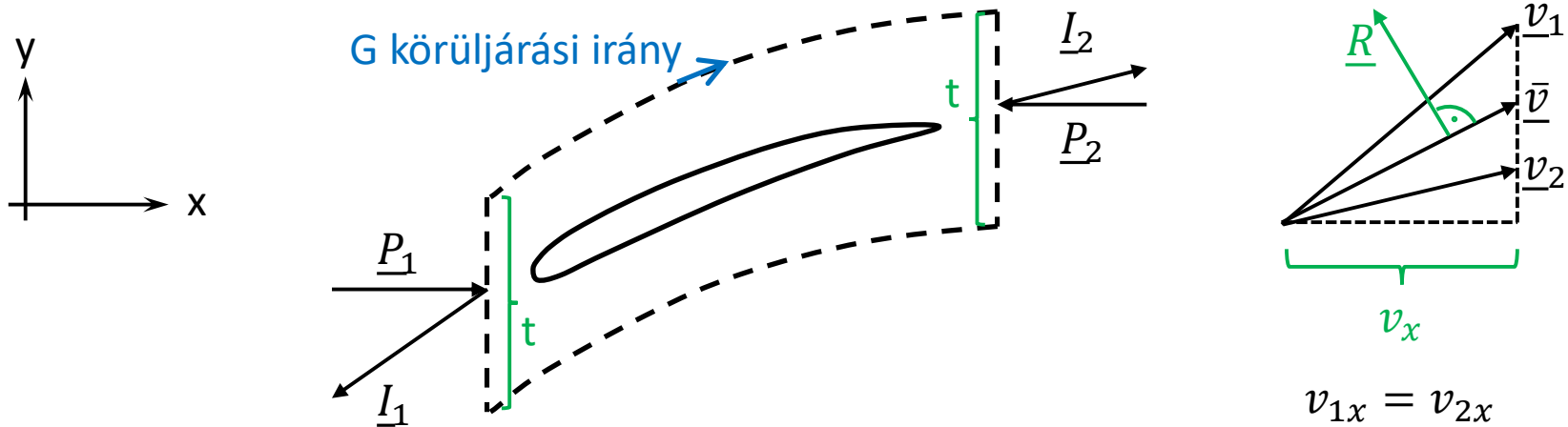
$$R_x = (p_1 - p_2)t = \frac{\rho}{2}(v_{2y} + v_{1y})(v_{2y} - v_{1y})t = -\frac{\rho}{2}t(v_{2y} + v_{1y})(v_{1y} - v_{2y}) =$$

$$= -\frac{\rho}{2}\Gamma(v_{2y} + v_{1y})$$

$$R_y = \rho v_x t (v_{1y} - v_{2y}) = \rho v_x \Gamma$$

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \rho \Gamma \sqrt{\left(\frac{v_{2y} + v_{1y}}{2}\right)^2 + v_x^2} = \rho \cdot \Gamma \cdot \bar{v}$$





$$|\underline{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \rho \Gamma \sqrt{\left(\frac{v_{2y} + v_{1y}}{2}\right)^2 + v_x^2} = \rho \cdot \Gamma \cdot |\underline{\bar{v}}|$$

Ha $t \rightarrow \infty$ akkor $v_{1y} - v_{2y} \rightarrow 0$ (egyre kevésbé bírja elterelni), ezért:

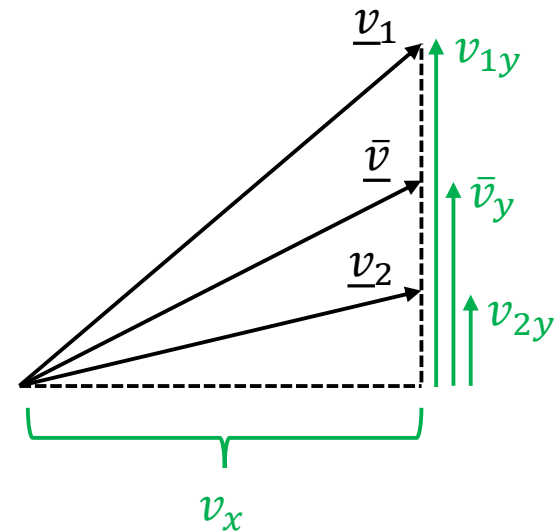
$\underline{v}_2 \rightarrow \underline{v}_1$, vagyis $\underline{\bar{v}} \cong \underline{v}_1 = \underline{v}_\infty$, és

$(p_1 - p_2) \rightarrow 0$

Innen:

$$R = F_f = \rho \cdot \Gamma \cdot |\underline{v}_\infty|$$

Kutta-Zsukovszkij tétel



Gyakorló feladat 1.

Egy szárny húr hossza $h = 1.3 \text{ m}$, húrra merőleges hossza $L = 1 \text{ m}$.

A levegő sűrűsége $\rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a szárny haladási sebessége $v_\infty = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A szárny felső részén az áramlási sebesség átlagosan $v_f = 1.1 \cdot v_\infty$,

az alsó részén átlagosan $v_a = 0.9 \cdot v_\infty$

Mekkora felhajtóerőt termel a szárny?

$$\Gamma = \oint_G \underline{v} d\underline{s} \cong v_f \cdot h - v_a \cdot h = 1.3 \cdot (0.2 \cdot v_\infty) = 0.26 \cdot v_\infty$$

$$F_f = \rho \cdot v_\infty \cdot \Gamma = 1997 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Gyakorló feladat 2.

Hátrahajló lapátosású radiális ventilátor. $\rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, járókerék átmérője $D_2 = 500 \text{ mm}$, lapátszélesség $b = 60 \text{ mm}$, kilépő lapátszög $\beta_2 = 45^\circ$, a kilépő sebesség sugárirányú (radiális) komponense $v_{2r} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a fordulatszám $n = 1440 \frac{1}{\text{min}}$, a belépés perdületmentes.

Kérdés: $q_v = ?$, $\Delta p_{\text{öid}} = ?$, $P = ?$

$$q_v = D_2 \pi b_2 v_{2r} = 1.41 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$\omega = 2\pi n = 150 \frac{1}{\text{s}}$$

Perdületmentes: $v_{1u} = 0$

$$\Delta p_{\text{öid}} = \rho \cdot (v_{2u} u_2 - v_{1u} u_1) = \rho \cdot v_{2u} u_2$$

$$u_2 = \frac{D_2}{2} \omega = 37.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{2u} = u_2 - \frac{v_{2r}}{\text{tg}\beta_2} = 22.7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow \Delta p_{\text{öid}} = \rho \cdot v_{2u} u_2 = 1026 \text{ Pa}$$

$$P = q_v \cdot \Delta p_{\text{öid}} = 1.45 \text{ kW}$$

