

# Kompresszibilis áramlások számítása

Dr. Kristóf Gergely  
2008.11.23.

## Átalakítjuk az alapegyenleteket

Kontinuitás: 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{da}{d\rho} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{da}{d\rho} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\gamma-1}{2} \frac{a}{\rho} = 0$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{a}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Euler-egyenlet: 
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{da}{d\rho} \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{a} = 0$$

$$\frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\gamma-1}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

## Egyszerű példa

1D izentrópiás áramlás állandó keresztmetszetű csőben.  
Pl: kompresszorok, kipufogók áramlása.

Kontinuitás: 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

Euler-egyenlet: 
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Izentrópiás egyenlet: 
$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

$p_0$  és  $\rho_0$  a referencia állapotra adott állandók.  
Ismeretlenek  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$  mint  $x$  és  $t$  függvényei.

$$\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\gamma-1}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

(1) + (2) 
$$\frac{\partial}{\partial t} \left( a + \frac{\gamma-1}{2} u \right) + (u+a) \frac{\partial}{\partial x} \left( a + \frac{\gamma-1}{2} u \right) = 0$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad C_x = dx/dt = u+a \text{ irány mentén: } \alpha = \text{állandó.}$$

(1) - (2) 
$$\frac{\partial}{\partial t} \left( a - \frac{\gamma-1}{2} u \right) + (u-a) \frac{\partial}{\partial x} \left( a - \frac{\gamma-1}{2} u \right) = 0$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0 \quad C_x = dx/dt = u-a \text{ irány mentén: } \beta = \text{állandó.}$$

## Új mezőváltozót vezetünk be: „a” hangsebesség

Csak egy állapotjelzőt lehet megválasztani. Használjuk állapotjelzőként az „a” hangsebességet és ezzel kiszöböljük ki  $p$ -t és  $\rho$ -t.  
Új mezőváltozóink:  $u$  és  $a$ ; mindkettő m/s dimenziójú.

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s=\text{állandó}} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{p}{\rho^\gamma} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1}$$

$$\ln(p) - \gamma \ln(\rho) = 0 \quad 2 \ln(a) = (\gamma-1) \ln(\rho) + \ln \left( \gamma \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right)$$

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad 2 \frac{da}{a} = (\gamma-1) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{da}{dp} = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{a}{p} \quad \frac{da}{d\rho} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{a}{\rho}$$

## Karakterisztikák

$C_x$  és  $C_x$  karakterisztikus irányok,  $\alpha$  és  $\beta$  Riemann-féle invariánsok.

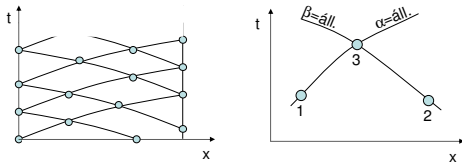
Ha  $\alpha$  és  $\beta$  adottak ... abból  $a$  és  $u$  meghatározható:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= a + \frac{\gamma-1}{2} u \\ \beta &= a - \frac{\gamma-1}{2} u \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= \frac{\alpha + \beta}{2} \\ u &= \frac{\alpha - \beta}{\gamma-1} \end{aligned}$$

a-ból pedig meghatározható a többi állapotjelző:

$$\left( \frac{a}{a_0} \right)^2 = \frac{T}{T_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}$$

## Numerikus megoldás



$$\alpha_3 = \alpha_1 \rightarrow a_3 = \frac{\alpha_3 + \beta_3}{2} \quad u_3 = \frac{\alpha_3 - \beta_3}{\gamma - 1}$$

$$\beta_3 = \beta_2$$

$$x_3 - x_1 = 0.5[(u_3 + a_3) + (u_1 + a_1)](t_3 - t_1) + \alpha(\Delta t^2)$$

$$x_3 - x_2 = 0.5[(u_3 - a_3) + (u_2 - a_2)](t_3 - t_2) + \alpha(\Delta t^2)$$

$t_3, x_3$  számítható.

## Véges térfogatok módszerével

Ugyancsak az előbbi csőáramlás példájára alkalmazzuk.

Kontinuitás:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$

Állapotegyenlet:

Mozgásegyenlet:  $\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$

$p = \rho R T$

Energiaegyenlet:  $\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u e + p u)}{\partial x} = 0$

$e = c_v T + \frac{u^2}{2}$

Formális vektorokba rendezhetjük:

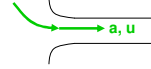
$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = \underline{Q}$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u e + p u \end{bmatrix} \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Peremfeltételek

Beáramlás nyitott csővégen: energiaegyenlet

$T_0, p_0, a_0$  adottak



$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p} = \frac{a^2}{\gamma R} + \frac{u^2}{2c_p}$$

$$T_0 = \frac{1}{\gamma R} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + \frac{1}{2c_p} \left( \frac{\alpha - \beta}{\gamma - 1} \right)^2$$

Vagy  $\alpha$ , vagy  $\beta$  már adott a belülről kifelé tartó karakterisztika alapján. A másik Riemann-féle invariáns a fenti egyenletből meghatározható

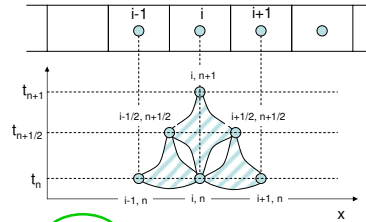
Kiáramlás:

$$a_0 = a = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Zárt csővég:

$$u = 0 \rightarrow \frac{\alpha - \beta}{\gamma - 1} = 0 \rightarrow \alpha = \beta$$

## Másodrendű, kétlépéses Lax-Wendroff módszer:



1. lépés

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2}}{\Delta t / 2} - \frac{(U_i^n + U_{i+1}^n) / 2 + F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x} = \frac{Q_i^n + Q_{i+1}^n}{2}$$

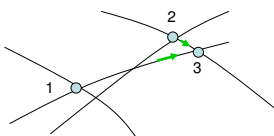
$U$  ismeretében számítható  $\rho, u, e$ . Pl:  $p = (\rho u) / u$   
Az állapotegyenletből számítható  $p$ .  
Meghatározzuk  $F$  és  $Q$  értékeit az  $n+1/2$  időszinten.

2. lépés

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = \frac{Q_{i-1/2}^{n+1/2} + Q_{i+1/2}^{n+1/2}}{2}$$

## Problémák

- A fizikai folyamattól függően a numerikus háló eldurvulhat.
- Azonos irányba tartó karakterisztikák metszhetik egymást.



Időben előrehaladó explicit séma. Feltételelesen stabilis:

$$\Delta t = \sigma \frac{\Delta x}{a + |u|} \quad \sigma \leq 1$$

A lökéshullámok környezetében erősen oszcillál az eredmény. Korrigálni kell a fluxusokat, vagy mesterséges viszkozitást kell alkalmazni.

Egy hasonló módszer FLUENT-ben: density based solver + explicit time integration. Itt csak a  $\sigma$  értéke állítható be, az időlépést ebből számolja.

Peremfeltételek: A peremeken alkalmazhatunk például karakterisztikákat.