

ABCD

Név:.....**MEGOLDÁS**..... NEPTUN kód:.....

Aláírás:..... ÜLŐHELY sorszám.....

PONTSZÁM: Σ50p / p

Toll, fényképes igazolvány, számológépen kívül más segédeszköz nem használható!

1. FELADAT (elméleti kérdések) (10pont = 10×1pont, csak a tökéletesen jó válasz ér 1-1 pontot)

1.1) Karikázza be a helyes válasz(ok) betűjelét! Melyik összefüggés(ek) fejezi(k) ki egy elemi folyadékrész konvektív gyorsulását?

A) $\underline{a}_{konv} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{r}}$

B) $\underline{a}_{konv} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial t}$

C) $\underline{a}_{konv} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$

D) $\underline{a}_{konv} = \underline{D} \cdot \underline{v}$

1.2) Karikázza be a helyes válasz(ok) betűjelét! Ideális közeg stacioner áramlására mely alábbi állítás(ok) biztosan igaz(ak)?

A) $\text{grad} \underline{v} = 0$

B) $\text{rot} \underline{v} = 0$

C) $\text{div} \underline{v} = 0$

D) $\frac{dq_v}{dv} = 0.$

1.3) Karikázza be a helyes válasz(ok) betűjelét! A légkörben ismert a tengerszinten $z_0=0\text{m}$ magasságon érvényes $p_0=101325\text{Pa}$ nyomás, $T_0=288\text{K}$ hőmérséklet, $R=287\text{J}/(\text{kgK})$ gázállandó és $g=9,81\text{N}/\text{kg}$ nehézségi gyorsulás. Izoterm atmoszféra feltétel esetén egy adott z_2 helyen érvényes p_2 nyomás az alábbi összefüggés segítségével számítható ki:

A) $p_2 = p_0 \cdot e^{-\frac{g \cdot (z_2 - z_0)}{R \cdot T_0}}$

B) $p_2 = p_0 \cdot e^{-\frac{R \cdot (z_2 - z_0)}{g \cdot T_0}}$

C) $p_2 = p_0 \cdot e^{-\frac{g \cdot (z_0 - z_2)}{R \cdot T_0}}$

D) $p_2 = p_0 \cdot e^{-\frac{R \cdot (z_0 - z_2)}{g \cdot T_0}}$

1.4) Karikázza be a helyes válasz(ok) betűjelét! A folytonosság tétel általános alakja:

A) $\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0$

B) $\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0$

C) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0$

D) $\frac{dv}{dt} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0$

1.5) Egészítse ki a Bernoulli-egyenlet alábbi hiányos alakját helyesre! Feltételek: ideális közeg instacioner áramlása, csak a potenciális nehézségi erőter hat, az „1” és „2” pontok egy áramvonalon helyezkednek el. Kérem, adja meg minden Ön által beírt mennyiség nevét és mértékegységét is!

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} + \left[\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z \right]_1^2 = 0$$

1.6) Egészítse ki az impulzustétel alábbi hiányos integrál alakját helyesre, ha egy összenyomható, súrlódásmentes folyadékra körülvéve „A” zárt felülettel határolt „V” térfogat teljes mértékben tartalmaz egy szilárd testet, amelyre a folyadékról erő hat. Adja meg a minden (Ön által beírt hiányzó) mennyiség nevét és mértékegységét is!

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot \underline{v} \cdot dV + \int_A \underline{v} \cdot \rho \cdot (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \int_V \rho \cdot \underline{g} \cdot dV - \int_A \underline{p} \cdot d\underline{A} - \underline{R}$$

1.7) Karikázza be a helyes válasz (ok) betűjelét! A valóságos közeg $\underline{\Phi}$ feszültségtenzorában az ún. σ' látszólagos húzó-nyomó feszültség ...

- A) ... az erőtér hatását fejezi ki. B) ... súrlódásmentes közegben zérus értékű.
 C) .. arányos a viszkozitással. D) ... az alakváltozás miatt keletkezik.

1.8) Karikázza be a jó válasz(ok) betűjelét! A súrlódásos közegre felírt általános mozgásegyenletből levezetett Navier-Stokes egyenlet érvényességi feltétele(i) az alábbi(ak):

- A) $\rho = \text{állandó}$ B) $\mu = \text{állandó}$
 C) $\text{div} \underline{v} = 0$ D) $\text{rot} \underline{v} = 0$

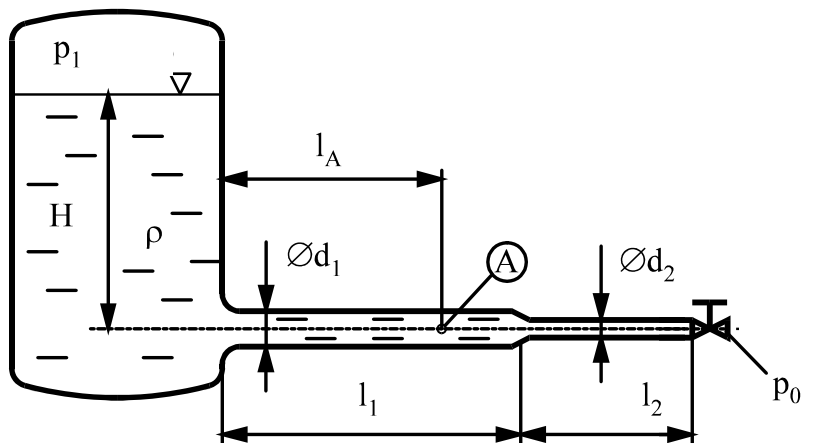
1.9) Karikázza be a helyes válasz (ok) betűjelét! A Navier-Stokes-egyenlet helyes alakja az alábbi:

- A) $\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \nu \Delta \underline{v}$ B) $\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} + \frac{1}{\rho} \underline{\Phi} \nabla$
 C) $\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \nu \cdot \text{rot} \text{rot} \underline{v}$ D) $\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \underline{v}$

1.10) Valós ($\mu \neq 0$) közeg áramlik egy $\emptyset D = \text{állandó}$ kör keresztmetszetű, $L \neq 0$ hosszúságú vízszintes tengelyű csőben. Stacioner áramlás, potenciális erőtér. A folyadék két, egymástól különböző, „1” \rightarrow „2” áramlási irányban felvett pontja közül az „1”-ben ismert a statikus p_1 nyomás és a v_1 sebesség. **Karikázza be a helyes válasz(ok) betűjelét!**

- A) $p_1 = p_2$ B) $p_1 < p_2$ C) $p_1 > p_2$
 D) $v_1 = v_2$ B) $v_1 < v_2$ C) $v_1 > v_2$

1. FELADAT (10pont) Egy $H=5\text{m}$ vízzel töltött, $p_t=5 \cdot 10^5\text{Pa}$ nyomású zárt tartályhoz alul egy vízszintes tengelyű cső csatlakozik. A csővégen egy alapállapotban teljesen zárt gömbcsap van. **FELTÉTELEK:** $\mu=0$, $\rho=\text{áll.}$, $A_{\text{tartály}} \gg A_{\text{cső}}$; Az átmeneti idomok és a gömbcsap hossza elhanyagolható. A gömbcsap be- és kiáramlási keresztmetszete azonos. **ADATOK:** $p_0=10^5\text{Pa}$; $\rho_{\text{víz}}=10^3\text{kg/m}^3$; $L_1=20\text{m}$; $L_A=15\text{m}$; $L_2=10\text{m}$; $d_1=100\text{mm}$; $d_2=50\text{mm}$; $g=10\text{N/kg}$; **KÉRDÉSEK:**



- A) Határozza meg a víz csővégi gyorsulását a hirtelen nyitás t_0 időpillanatában!
 B) Határozza meg a víz csővégi gyorsulását abban a nyitás utáni t időpillanatban ($t_0 < t < \infty$), amikor a csővégi kiáramlási sebesség éppen $v_{ki}=15\text{m/s}$!
 C) Határozza meg az „A” pontbeli nyomást stacioner áramlási állapotban!

MEGOLDÁS

A) Instacioner Bernoulli egyenlet rendezve a_{ki} -re:

$$a_{ki} = \frac{p_t - p_0 + \rho \cdot g \cdot H}{\rho \cdot \left(\frac{A_2}{A_1} L_1 + L_2 \right)} = \frac{500000 - 100000 + 1000 \cdot 10 \cdot 5}{1000 \cdot (5 + 10)} = \frac{450}{15} = 30\text{m/s}^2$$

B) Instacioner Bernoulli egyenlet rendezve a_{ki} -re, ha van $v_{ki}=15\text{m/s}$ is:

$$a_{ki} = \frac{p_t - p_0 + \rho \cdot g \cdot H - \frac{\rho}{2} v_{ki}^2}{\rho \cdot \left(\frac{A_2}{A_1} L_1 + L_2 \right)} = \frac{500000 - 100000 + 1000 \cdot 10 \cdot 5 - \frac{1000}{2} 15^2}{1000 \cdot (5 + 10)} = \frac{450 - 112,5}{15} = 22,5\text{m/s}^2$$

C) Stacioner esetben a Bernoulli egyenlet vízfelszín és kifolyás keresztmetszete között

$$p_t + \rho \cdot g \cdot H = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot v_{ki}^2$$

$$v_{ki, \text{stac}} = \sqrt{\frac{2(p_t - p_0)}{\rho} + 2gH} = 30\text{m/s}$$

Bernoulli egyenlet „A” pont és kifolyás között:

$$p_A = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot (v_{ki, \text{stac}}^2 - v_A^2)$$

Majd $v_A A_A = v_{ki} A_{ki}$ folytonosság tétel felhasználásával:

$$p_A = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot v_{ki}^2 \left(1 - \left(\frac{A_{ki}}{A_A} \right)^2 \right) = \square$$

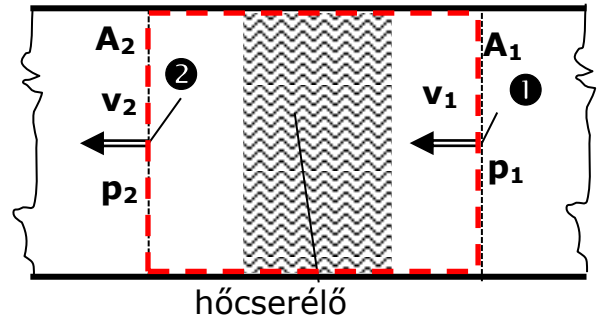
2. FELADAT (10pont)

Egy vízszintes tengelyű, $A_1=A_2=4\text{m}^2$ állandó keresztmetszetű hőcserélőn átáramolva a $\rho_1=1,25\text{kg/m}^3$ sűrűségű hideg levegő felmelegszik, így sűrűsége $\rho_2=0,9\text{kg/m}^3$ lesz. Ismert az „1 pontbeli $v_1=10\text{m/s}$ áramlási átlagsebesség.

FELTÉTELEK: $\mu=0$; stacioner állapot, a hőcserélőre ható erő és a folyadékra ható súlyerő elhanyagolható. A sűrűségszámítás szempontjából a nyomás 10^5Pa értékűnek vehető.

KÉRDÉS: Határozza meg az „1” ill. „2” keresztmetszetek közötti $\Delta p_{12}=p_1-p_2$ nyomáskülönbséget!

Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába a felvett koordináta-rendszert és az ellenőrző felületet! A példa megoldása ezek nélkül nem értelmezhető

**MEGOLDÁS**

Folytonosság tétele: $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$, és mivel $A_1=A_2$, ezért $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ így v_1 és a sűrűségek ismeretében v_2 kiszámítható. ($v_2=10 \cdot 1,25/0,9=13,89\text{m/s}$)

Mivel ρ nem állandó ($\Delta\rho>5\%$), így Bernoulli-egyenlet felírása durva elvi hiba lenne, így ez csak impulzustétellel kaphatjuk meg a keresett nyomáskülönbséget.

Az $A_{e.f.}$ felvétele a csatornán belül célszerű (lásd ábra), a hőcserélőre ható erő elhanyagolható, valamint **(x←)** irányítottágú koordináta-rendszer x tengely felvétele az első lépés. (Másik irány nem is szükséges)

Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete:

$$-\rho_1 v_1^2 A_1 + \rho_2 v_2^2 A_2 = - \int_{Ax} p dA$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő x komponense az általunk felvett x irányítottág esetén:

$$- \int_{Ax} p dA = -(-p_1 A_1 + p_2 A_2)$$

Ezzel:

$$-\rho_1 v_1^2 A_1 + \rho_2 v_2^2 A_2 = -(-p_1 A_1 + p_2 A_2)$$

Mivel $A_1=A_2$, így írható

$$(p_1 - p_2) = -\rho_1 v_1^2 + \rho_2 v_2^2 = \checkmark$$

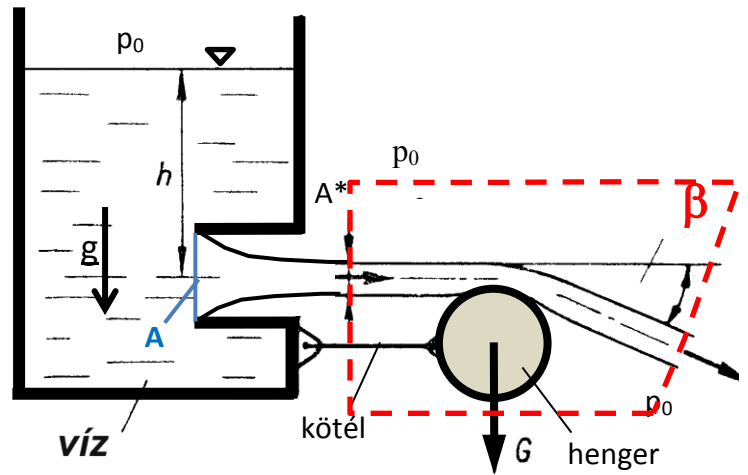
3. FELADAT (10pont)

Az $A=0,002\text{m}^2$ Borda-féle kiömlőnyílás kontrakciós tényezője 0,6 értékű. Az ezen kiáramló, vízszintes tengelyű kontrahált A^* keresztmetszetű vízszög egy ismeretlen $G[\text{N}]$ súlyú hengert tart egyensúlyban. A tartályhoz a henger vízszintes (súlytalan) kötéllel van kikötve, a vízszög a hengeren a Coanda-effektus miatt eltérül. **FELTÉTELEK:** $\rho=\text{áll.}$; stac. ; $A_{\text{tartály}} \gg A$; az erőter hatása elhanyagolható a víz szabadsugár esetében.

ADATOK: $h=5\text{m}$; $A=0,002\text{m}^2$; $p_0=10^5\text{Pa}$; $\rho_{\text{víz}}=10^3\text{kg/m}^3$; $g=10\text{N/kg}$; $\beta=5^\circ$

KÉRDÉSEK:

- A) Határozza meg a hengerre ható \underline{R} erőt!
 B) Mekkora a henger súlya és a kötél erő? $G=?$ $F_{\text{kötél}}=?$



Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába a felvett koordinátarendszert és az ellenőrző felületet! A példa megoldása ezek nélkül nem értelmezhető

MEGOLDÁS

A tartálybeli vízfelszín (p_0) és a kontrahált A^* keresztmetszet (szintén p_0) közötti áramvonalra felírt Bernoulli-egyenletből $v^*=\sqrt{2gh}=10\text{m/s}$. Az „A” keresztmetszetben $p \neq p_0$.

Folytonosság tétele és Bernoulli-egyenlet szabadsugárra (súlyerő elhanyagolásával) alapján írható, hogy $v^*=\text{áll.}$, $A^*=\text{állandó}$.

A Borda-féle kifolyónyílás kontrakciós tényezője ismert, így $\alpha=0,6=A^*/A$ alapján $A^*=\alpha A=0,6 \cdot 0,002=0,0012\text{m}^2$

Az $A_{e.f.}$ felvétele (lásd ábra), valamint $(x \rightarrow, z \uparrow)$ irányítottágú koordinátarendszer felvétele az első lépés.

Az $A_{e.f.}$ ellenőrző felületen mindenhol p_0 a nyomás.

A sűrűség állandó.

Az impulzustétel x irányban felírt komponensegyenlete:

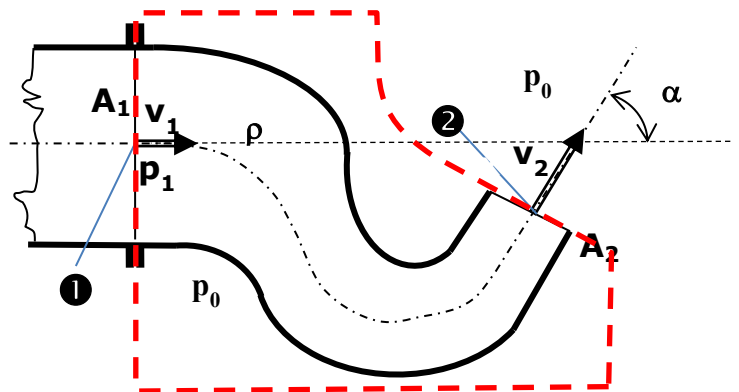
$$-\rho v^{*2} A^* + \rho v^{*2} A^* \cdot \cos 60^\circ = -R_x$$

Az impulzustétel z irányban felírt komponensegyenlete:

$$-\rho v^{*2} A^* \cdot \sin 60^\circ = -R_z$$

A ható erő komponenseire fenti két komponensegyenlet rendezhető, majd \underline{R} nagysága és iránya kiszámítható, felrajzolható. G henger súlya R_z -ből a kötél erő pedig R_x -ből adódik. (nagyság azonos, irány ellentétes)

4. FELADAT (10pont) A $p_0=10^5$ Pa nyomású szabadba nyíló S-alakú csővégi idom $A_1=0,1\text{m}^2$ és $A_2=0,05\text{m}^2$ keresztmetszetbeli tengelyei egymással $\alpha=60^\circ$ szöget zárnak be. Ismert a $\rho=1000\text{kg/m}^3$ sűrűségű víz „2” keresztmetszetbeli átlagsebessége: $v_2=16\text{m/s}$. **FELTÉTELEK:** ideális közeg stacioner áramlása, a súlyerő elhanyagolható. **KÉRDÉS:** Határozza meg a csővégi S-idomra ható **R** erőt!



Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába a felvett koordinátarendszert és az ellenőrző felületet! A példa megoldása ezek nélkül nem értelmezhető

MEGOLDÁS

Folytonosság tétele: $v_1 A_1 = v_2 A_2$, és $A_1/A_2 = 2$

A feltételek szerinti folytonosság tételt kihasználva $v_1=8\text{m/s}$, $v_2=16\text{m/s}$, és a stac. Bernoulli –egyenletet felírva „1” és „2” pontok közé a nyomáskülönbség ($p_1 - p_0 = 500(16^2 - 8^2) = 96000$ Pa) ismeretében :

Az $A_{e.f.}$ felvétele (lásd ábra), valamint **(x→, y↑)** irányítottágú koordinátarendszer felvétele az első lépés.

A nyomás az $A_{e.f.}$ –en mindenhol p_0 , kivéve A_1 keresztmetszetet, ahol p_1 .

A sűrűség állandó.

Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete:

$$-\rho_1 v_1^2 A_1 + \rho_2 v_2^2 A_2 \cos 60^\circ = - \int_{Ax} p dA - R_x$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő x komponense: $-\int_{Ax} p dA = -(-p_1 A_1 + p_0 A_1) = (p_1 - p_0) A_1$

Az impulzustétel **y irányban** felírt komponensegyenlete:

$$\rho_2 v_2^2 A_2 \sin 60^\circ = - \int_{Ay} p dA - R_y$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő y komponense: $-\int_{Ay} p dA = 0$

A ható erő komponenseire fenti két komponensegyenlet rendezhető, majd R nagysága és iránya kiszámítható, felrajzolható.