



**8. Súrlódásos közegek áramlása**

**9. Határrétegek**

**10. Hidraulika**

**11. Áramlásba helyezett testre ható erő**

Áramlás-tanszék előadást kiegészítő prezentáció  
Dr. Suda Jenő Miklós, adjunktus  
BME Áramlás-tanszék

Felhasznált szakirodalom:

Dr. Lajos T.: Az áramlás-tanszék alapjai tankönyv  
Dr. Balogh M.: Turbulencia modellezése előadásjegyzet  
Dr. Suda J.M.: Járműáramlás-tanszék előadásjegyzet



# Súrlódásos közegek áramlása

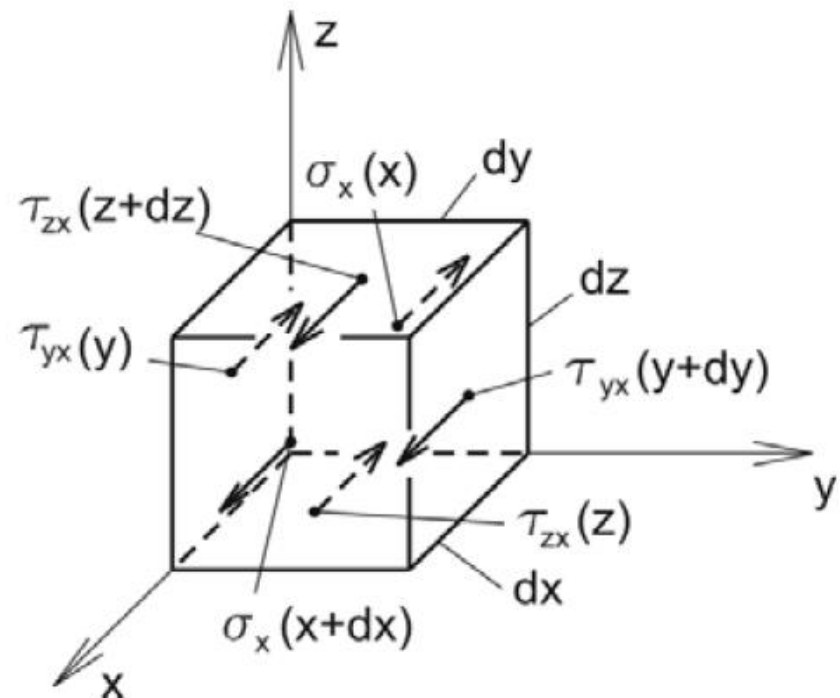
$\sigma$ : húzó-nyomó feszültségek

$\tau$ : csúsztatófeszültségek

Feszültségtenzor:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Csak az x irányú feszültségek:



**8.2.ábra**

Elemi folyadék rész



**N-II.: mozgásegyenlet:**

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} + \frac{1}{\rho} \Phi \underline{\nabla}$$

ahol  $\underline{\nabla}$ : nabla operátor:

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

A felületre merőleges  $\sigma$  húzófeszültség komponensek két részből tevődnek össze: a statikus nyomásból és az alakváltozási sebességből adódó húzófeszültségből. Az alakváltozás eredményeként létrejövő csúsztatófeszültségek következtében ugyanis a felületre merőleges  $\sigma'$  húzófeszültségek is keletkeznek, azaz pl. a folyadékban keletkező húzófeszültség x irányú komponensére írható:

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x$$

**második tag a látszólagos húzó-/nyomó feszültség**



**Kontinuitás tétele ( $\rho = \text{áll.}$ ):**

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \underline{v}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{3} \text{div } \underline{v}$$

**Húzó-/nyomófeszültség**

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x \quad \text{ahol:} \quad \sigma'_x = 2\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{div } \underline{v} \right) \quad \text{az ún. látszólagos feszültség}$$

**Húzó-/nyomófeszültség ezzel:**

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \text{div } \underline{v}$$

**Feszülstégtenzor**

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \text{div } \underline{v} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \text{div } \underline{v} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \text{div } \underline{v} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Phi}} = \left( -p - \frac{2}{3} \mu \text{div } \underline{v} \right) \underline{\underline{E}} + 2\mu \underline{\underline{A}}_s$$



$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \mathbf{\Phi} \nabla$$

ahol a feszültségtenzor (látszólagos húzó-/nyomófeszültségekkel):

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

A mozgásegyenlet egyik (x irányú) komponensegyenlete kifejtve:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \right\}$$



$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \right\}.$$

Tételezzük fel, hogy  $\mu = \text{áll.}$  és  $\rho = \text{áll.}$ , azaz az áramló newtoni közeg dinamikai viszkozitása és sűrűsége állandó. Figyelembe véve továbbá, hogy  $\rho = \text{áll.}$  esetén a (2.23) folytonosság tétele értelmében  $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ , e feltételezéssel a (8.15) összefüggés jobb oldalán lévő kapcsos zárójelben lévő kifejezés az alábbi alakra hozható:

$$\frac{\mu}{\rho} \left( 2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \right) = \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \quad (8.16)$$

Miután az egyenlet jobb oldalán álló második tag a  $\operatorname{div} \underline{v}$  x szerinti deriváltja, amely  $\operatorname{div} \underline{v} = 0$  következtében zérus, felírható az állandó sűrűség és viszkozitás esetén érvényes mozgásegyenlet, a **Navier-Stokes-egyenlet**, amelyet **Navier\*** 1822-ben, majd **Stokes** 1845-ben vezetett le:



## Navier-Stokes-egyenlet komponensegyenletei

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}: \quad & \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\
 \mathbf{y}: \quad & \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\
 \mathbf{z}: \quad & \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned}$$

Navier-Stokes-egyenlet

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \underline{v}$$

**N-S egyenlet = [Euler-egyenlet] + [a súrlódás hatását kifejező  $\nu \Delta \underline{v}$  tag]**



Látható, hogy a Navier-Stokes-egyenlet a jobb oldal utolsó tagjával, a  $\nu \Delta \underline{v}$  taggal különbözik a súrlódásmentes esetre levezetett Euler-egyenlettől (ld. (3.18) összefüggés).

A súrlódás hatását kifejező tagban szereplő  $\Delta \underline{v}$  felbontható:

$$\Delta \underline{v} = \text{grad div } \underline{v} - \text{rot rot } \underline{v}.$$

Miután  $\text{div } \underline{v} = 0$ , írható:

$$\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \nu \text{rot rot } \underline{v}}. \quad (8.20)$$

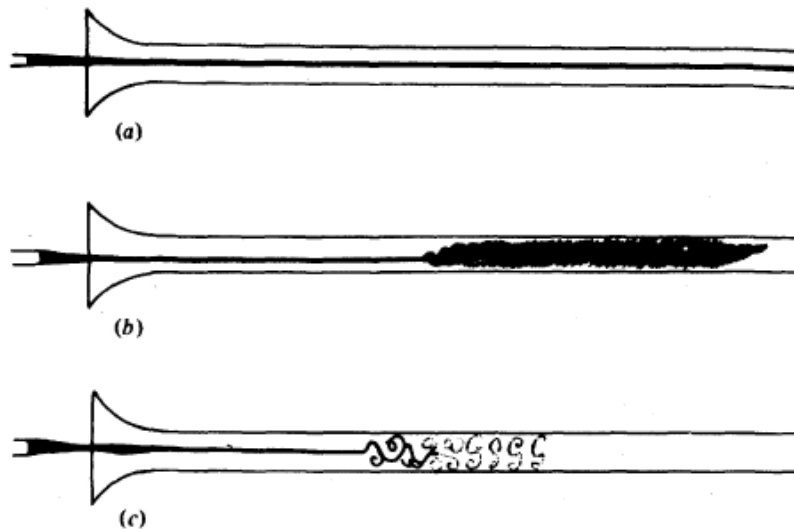
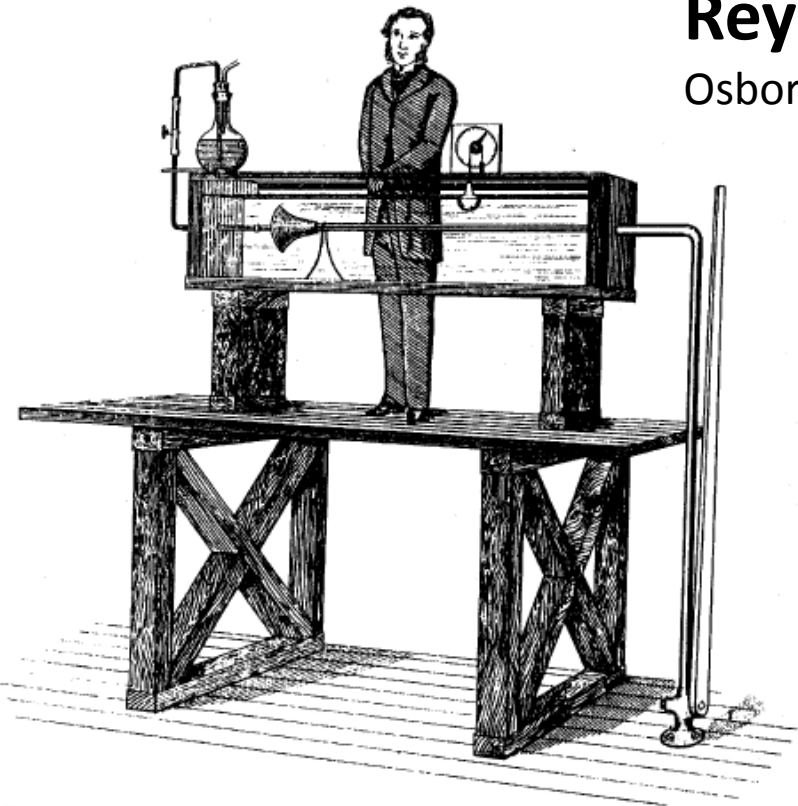
A (8.20) egyenlet jól mutatja az áramlás örvényessége és a súrlódás közötti kapcsolatot. Potenciális áramlás ( $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ ), sőt állandó örvényességű áramlás esetén (pl. az **1.2. ábrán** látható két síklap közötti áramlásnál) a súrlódásnak nincs szerepe, a Navier-Stokes-egyenlet az Euler-egyenletbe megy át. Az **M.8.2.1.** melléklet két példát mutat be a valóságos, súrlódásos közeg olyan áramlásaira, amelyekben a folyadékreszek nem forognak, azaz  $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ . Ilyenkor az áramlás potenciális, a Navier-Stokes-egyenlet súrlódásos tagja zérus, tehát az áramlást a súrlódásmentes közegre levezetett Euler-egyenlet írja le.





## Reynolds-kísérlet, 1883

Osborne Reynolds (1842-1912) angol matematikus és fizikus



### 8.3. lecke

Lamináris és turbulens áramlások



### Turbulencia = ?

Horace Lamb, 1932

„Már idős ember vagyok, és mikor meghalok és a mennyországba jutok, két dolog van, amelyekre a megvilágosodás reményével gondolok. Az egyik a kvantum-elektrodinamika, a másik pedig a folyadékok turbulens áramlása. Az előbbivel kapcsolatban meglehetősen optimista vagyok.”

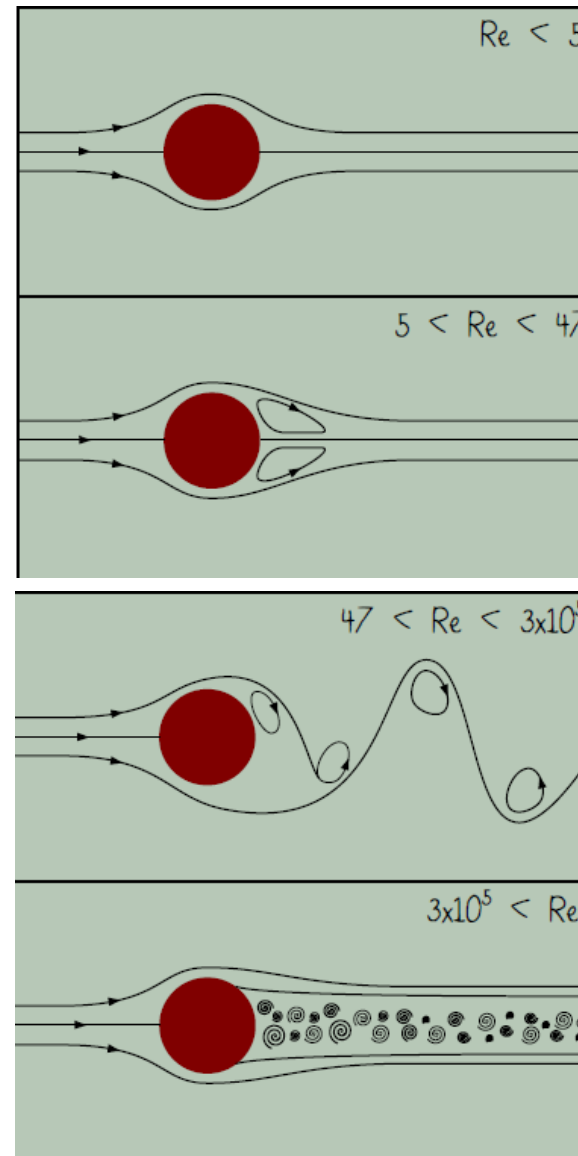
Peter Bradshaw, 1994

„A turbulenciát minden bizonnyal a sátán találta fel a teremtés hetedik napján, mikor a Jóisten már nem figyelt oda.”

### 8.3. lecke

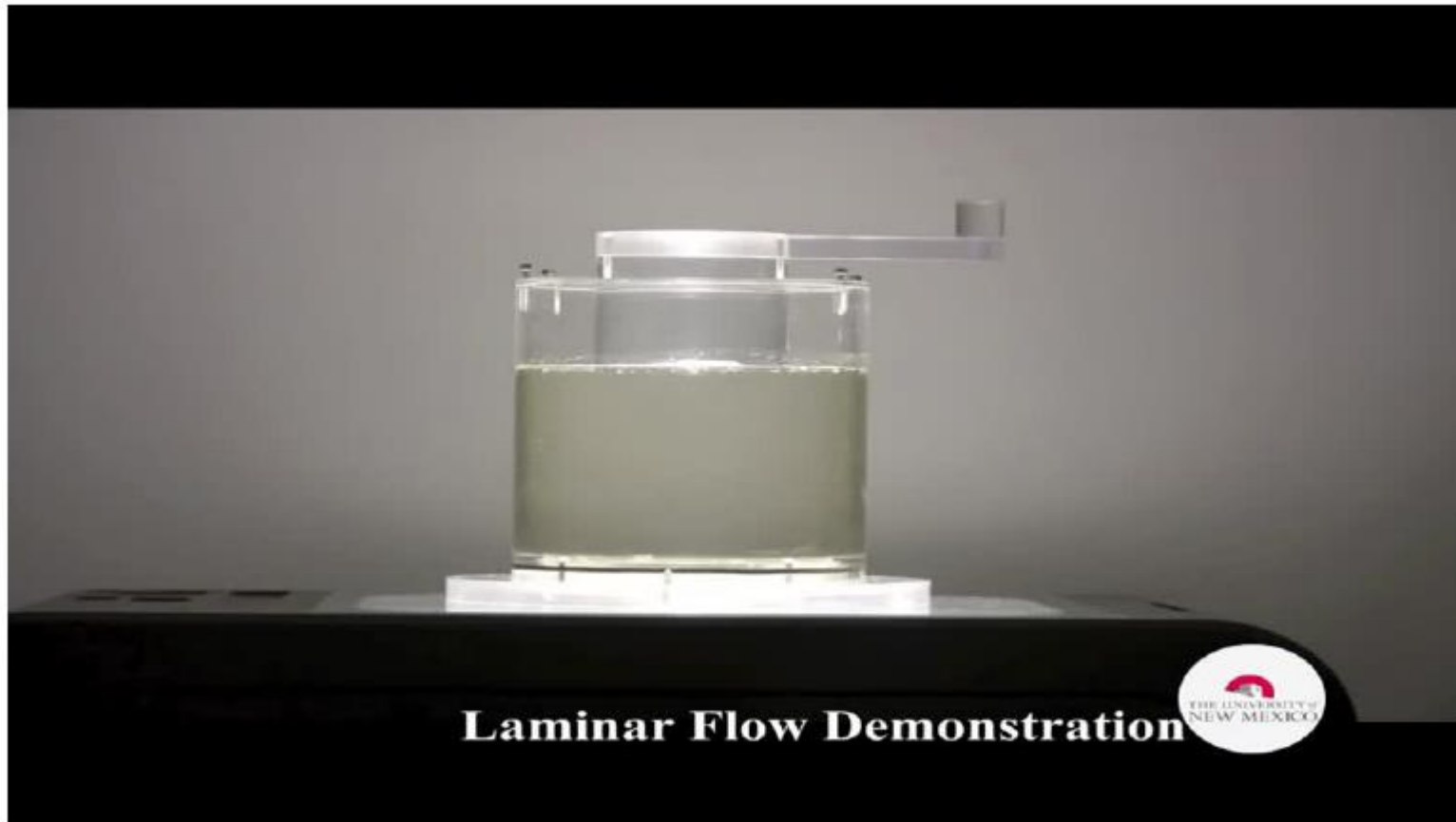


- Reynolds szám:  $Re = \frac{vL}{\nu}$
- Lamináris réteges áramlások ( $Re < 2300$ )
- Turbulens áramlások (tranzien,  $Re > 2300$ )



## 8.3. lecke

### Lamináris és turbulens áramlások



## 8.3. lecke

### Lamináris és turbulens áramlások



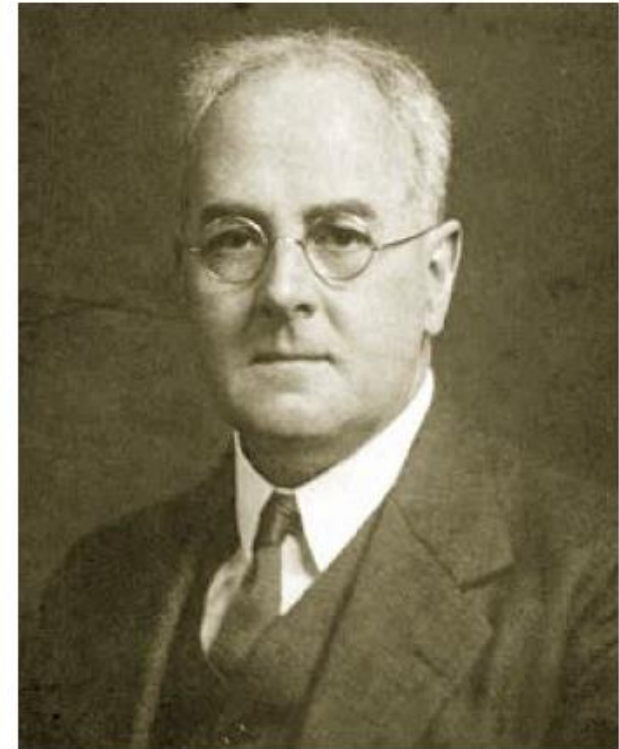


### Lewis Fry Richardson (1920):

*„Big whirls have little whirls,  
that feed on their velocity;  
and little whirls have lesser whirls,  
and so on to viscosity.”*

*„Nagy örvény kisebbet plántál,  
melyet sebességével táplál;  
majd az még kisebbet szülvén,  
viszkozításba tűnik szürkén.”*

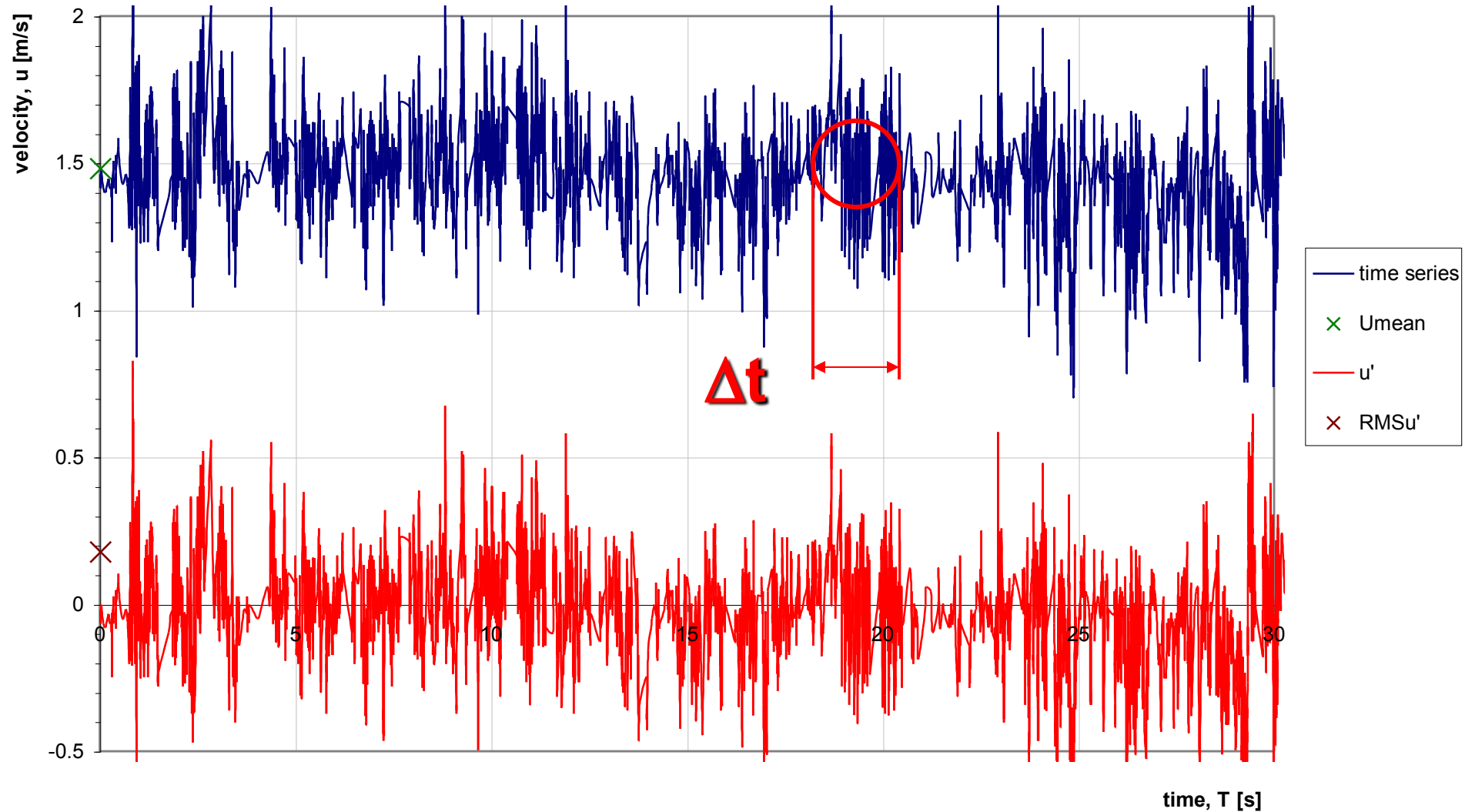
***„Főáramlás a nagy örvényt,  
Nagy a kisebbet táplálja;  
Kis örvény a még kisebbet,  
S elérünk a viszkozításra.” (Lajos T.)***



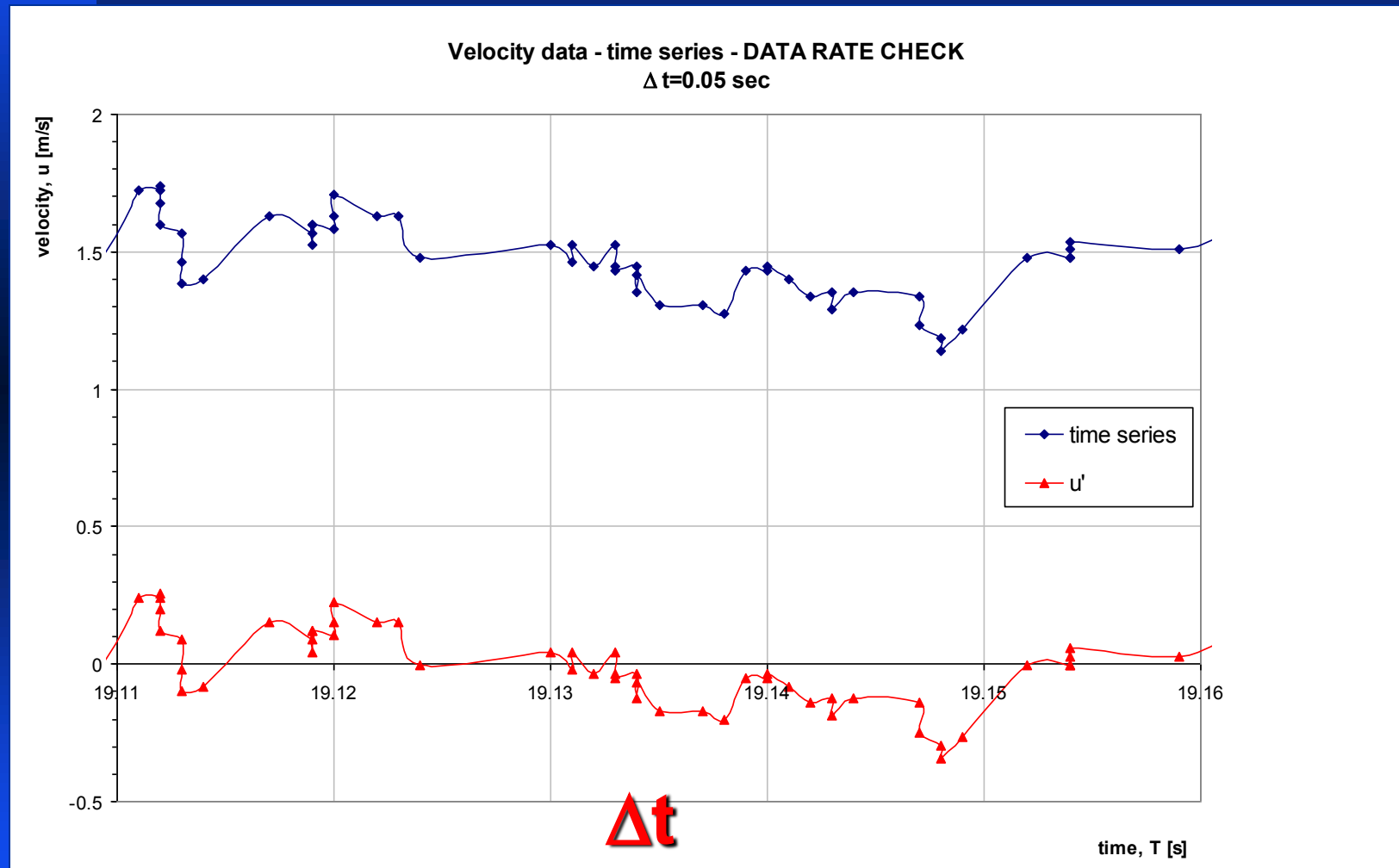
# Lézer Doppler sebességmérés

Velocity data - time series - DATA RATE CHECK

Nr. of samples = 20 000

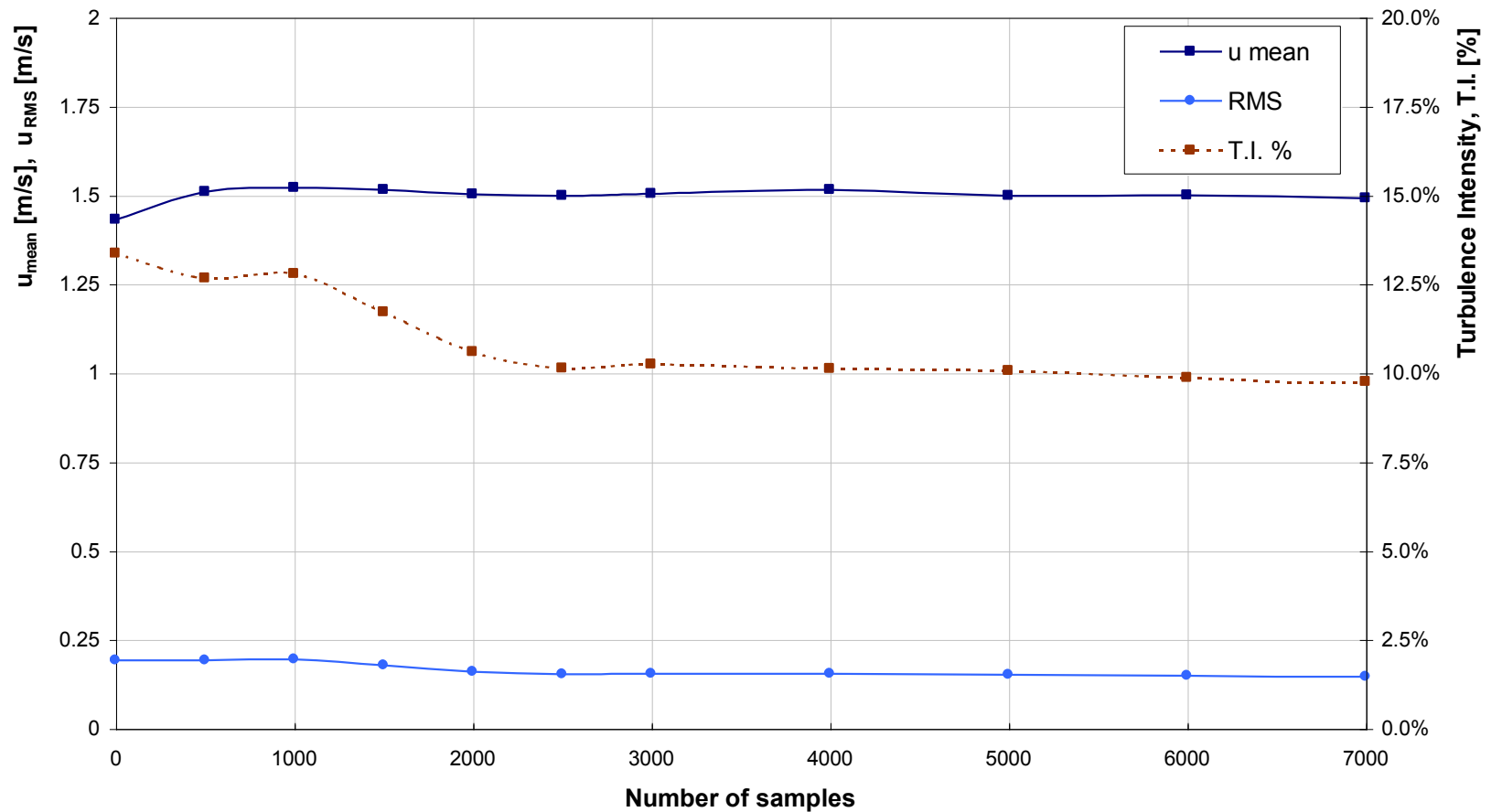


# Lézer Doppler sebességmérés



# Lézer Doppler sebességmérés

"Number of Samples" CHECK at position z=50mm, y=20mm







Áramlási sebességvektor:  $\underline{v}(\underline{r},t) = v_x(\underline{r},t)\cdot\underline{i} + v_y(\underline{r},t)\cdot\underline{j} + v_z(\underline{r},t)\cdot\underline{k}$

vagy

$$\underline{U}(\underline{r},t) = u(\underline{r},t)\cdot\underline{i} + v(\underline{r},t)\cdot\underline{j} + w(\underline{r},t)\cdot\underline{k}$$

Sebesség-komponens:

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x$$

↑
↑
↑

pillanatnyi      átlag      ingadozó

RMS (root-mean-square):

$$v_{x,rms} = \sqrt{\overline{v_x'^2}}$$

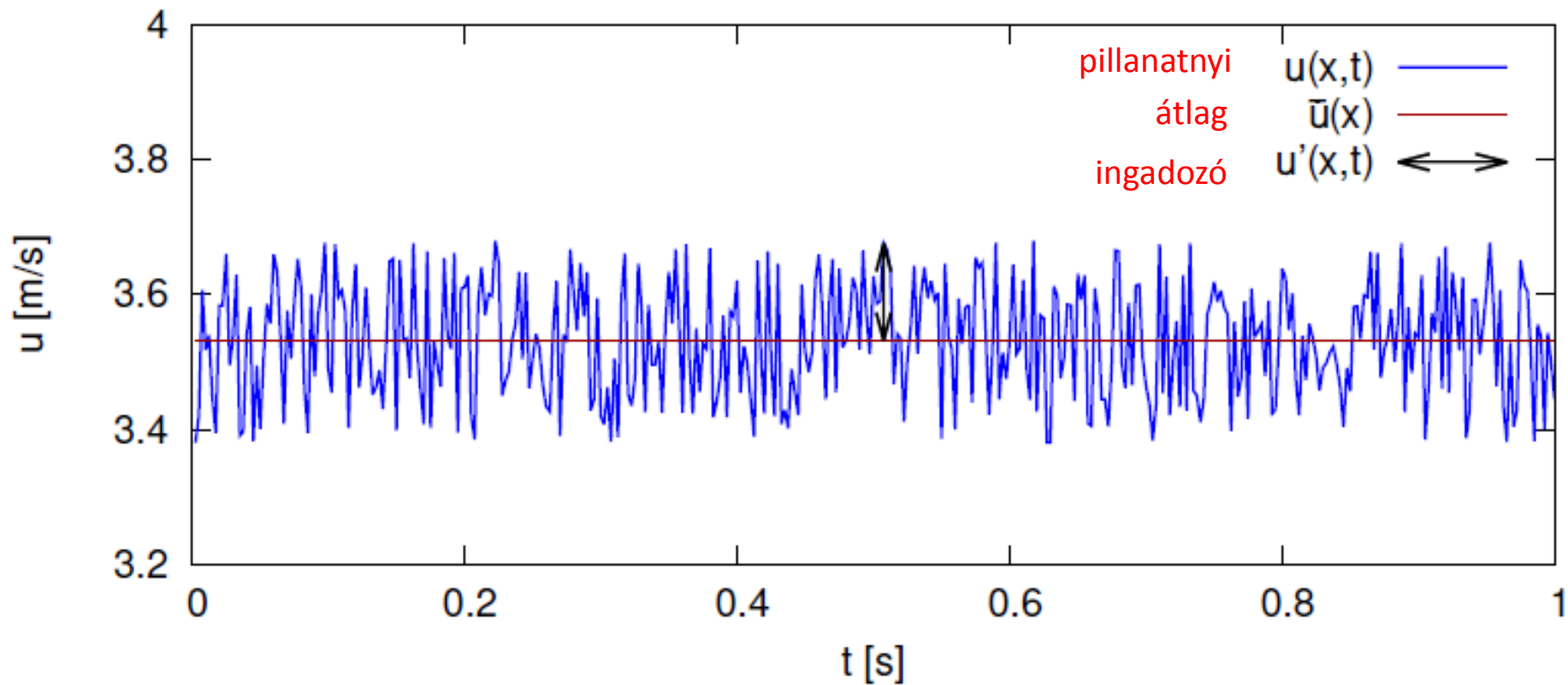
Turbulencia intenzitás (pl. x):

$$T.I._x = \frac{v_{x,rms}}{\bar{v}_x} = \frac{\sqrt{\overline{v_x'^2}}}{\bar{v}_x}$$



vagy

$$\underline{U}(\underline{r},t) = \mathbf{u}(\underline{r},t) \cdot \underline{i} + \mathbf{v}(\underline{r},t) \cdot \underline{j} + \mathbf{w}(\underline{r},t) \cdot \underline{k}$$





Írjuk fel a Navier-Stokes-egyenlet x irányú komponens-egyenletét a (8.17) összefüggés alapján!

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \quad (8.62)$$

Szorozzuk be a (8.62) egyenlet mindkét oldalán lévő tagokat  $\frac{l_0}{v_0^2}$ -tel, azaz dimenziótlanjuk a Navier-Stokes-egyenlet x irányban felírt komponens-egyenletét:

$$\frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{t}{l_0 / v_0} \right)} + \frac{v_x}{v_0} \frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \dots = \frac{g_x l_0}{v_0^2} - \frac{\partial \left( \frac{p - p_0}{\rho v_0^2} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \frac{\nu}{v_0 l_0} \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)^2} + \dots \right). \quad (8.63)$$

**dimenziótlan Navier-Stokes-egyenlet**

Hasonlóképpen fel lehet írni a **dimenziótlan Navier-Stokes-egyenlet** y és z irányú komponens-egyenletét, valamint a folytonosság tétele dimenziótlanját, figyelembe véve, hogy a Navier-Stokes-egyenlet alkalmazásakor már eldöntöttük, hogy a  $\rho = \text{áll.}$  feltételezéssel élünk. Ez esetben a folytonosság tétele a  $\text{div } \underline{v} = 0$  alakot ölti, amely dimenziótlanjva:

$$\frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \frac{\partial \left( \frac{v_y}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{y}{l_0} \right)} + \frac{\partial \left( \frac{v_z}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{z}{l_0} \right)} = 0. \quad (8.64)$$



### Két áramlás hasonlóságának feltételei:

- a) Azonos dimenziótlan differenciálegyenlet írja le mindkét áramlást, ami azt jelenti, hogy a (8.63) összefüggésben (és a további két komponens-egyenletben) szereplő állandóknak és együtthatóknak azonos értékűnek kell lennie a két (nagy kivétel és a kisminta körüli) áramlásra vonatkozóan. A nagy kivétel és a modell esetén ez a feltétel annyit tesz, hogy

$$\frac{g_x l_0}{v_0^2} = \frac{g_{xm} l_{0m}}{v_{0m}^2}, \quad (8.65)$$

$$\frac{v}{v_0 l_0} = \frac{v_m}{v_{0m} l_{0m}}; \quad (8.66)$$

- b) Saját léptékben azonosak a **kezdeti- és peremfeltételek**. Ezt a feltételt általában a modell és a nagy kivétel **geometriai hasonlóságával**, az áramlási tér peremén hasonló viszonyok biztosításával és az instacionárius hatások megfelelő modellezésével (ld. később) valósíthatjuk meg.

---

**azonos dimenziótlan  
differenciálegyenlet**

---

---

**azonos kezdeti- és  
peremfeltételek**

---

**geometriai hasonlóság**



## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk

**Froude\*-szám:**

$$\boxed{Fr = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}}}$$

$$\frac{v_{0m}}{v_0} = \sqrt{\frac{l_{0m}}{l_0}} \quad (8.67)$$

**Reynolds-szám:**

$$\boxed{Re = \frac{v_0 l_0}{\nu}}$$

$$Re_m = Re \Rightarrow \frac{v_{0m}}{v_0} = \frac{l_0 v_m}{l_{0m} \nu} = \frac{l_0}{l_{0m}} \quad (8.68)$$

**Strouhal\*-szám:**

$$\boxed{Str = \frac{f l_0}{v_0}}$$

**Euler-szám:**

$$\boxed{Eu = \frac{p - p_0}{\rho v_0^2}}$$

**Weber-szám**

$$\boxed{We = \frac{\rho l_0 v_0^2}{\sigma}}$$



## hasonlósági számok, mint erők hányadosai

$$\text{Re} \sim \frac{\text{tehetetlenségi erő}}{\text{súrlódásból származó erő}} = \frac{F_T}{F_S} \sim \frac{v_0^2 / l_0}{\nu v_0 / l_0^2} = \frac{v_0 l_0}{\nu},$$

$$\text{Fr} \sim \sqrt{\frac{\text{tehetetlenségi erő}}{\text{súlyerő}}} = \sqrt{\frac{F_T}{F_G}} \sim \sqrt{\frac{v_0^2 / l_0}{g}} = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}},$$

$$\text{Eu} \sim \frac{\text{nyomásból származó erő}}{\text{tehetetlenségi erő}} = \frac{F_P}{F_T} \sim \frac{(p - p_0) l_0}{\rho l_0 v_0^2} = \frac{p - p_0}{\rho v_0^2},$$

$$\text{We} \sim \frac{\text{tehetetlenségi erő}}{\text{felületi feszültségből származó erő}} = \frac{F_T}{F_F} \sim \frac{v_0^2 / l_0}{\sigma / l_0^2 \rho} = \frac{\rho v_0^2 l_0}{\sigma}$$



## Def.: határréteg

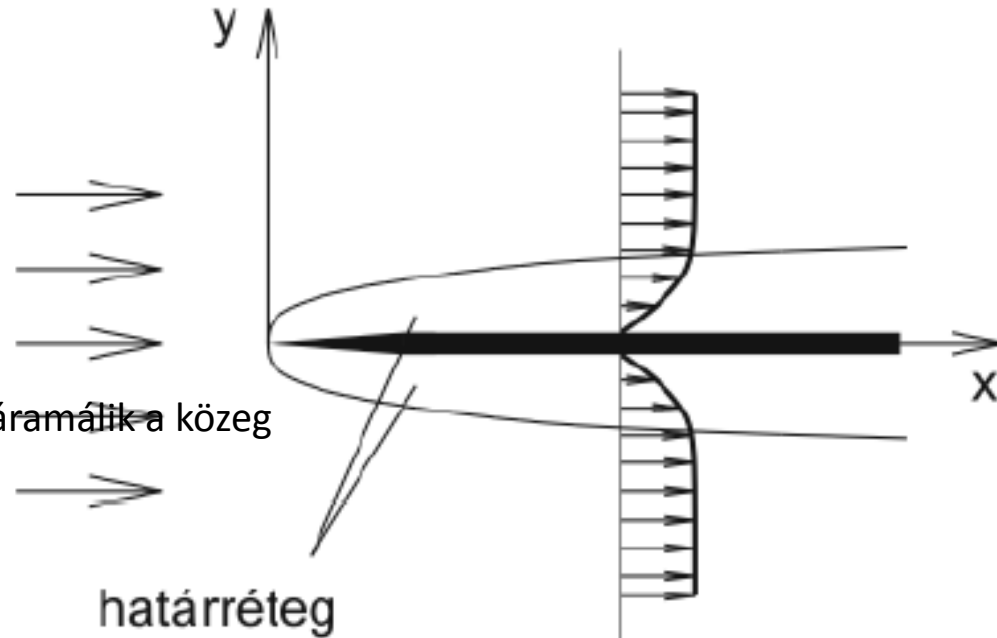
Áramlás irányban vastagodik

Kiszorít

Lassul

gradp ->

Nyomás növekedés ellenében áramlik a közeg



9.1. ábra

Határréteg síklapon

$$Re_x = \frac{V x}{\nu}$$

**lamináris**

**turbulens**

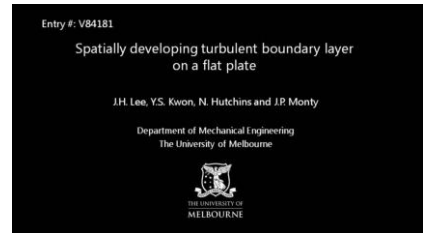
sebességmegoszlás

$$\frac{v_x}{V} \cong 1,5 \frac{y}{\delta} - 0,5 \left( \frac{y}{\delta} \right)^3,$$

$$\frac{v_x}{V} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}}$$



## Def.: határréteg



Entry #: V84181

## Spatially developing turbulent boundary layer on a flat plate

J.H. Lee, Y.S. Kwon, N. Hutchins and J.P. Monty

Department of Mechanical Engineering  
The University of Melbourne

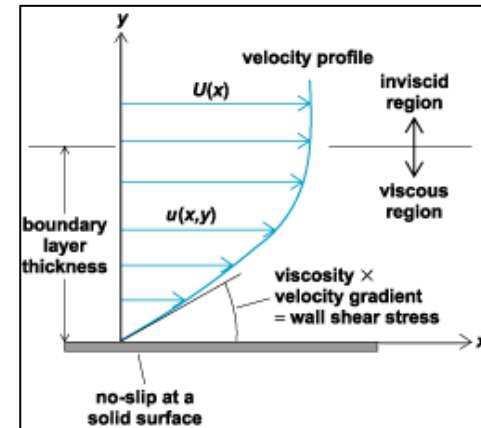
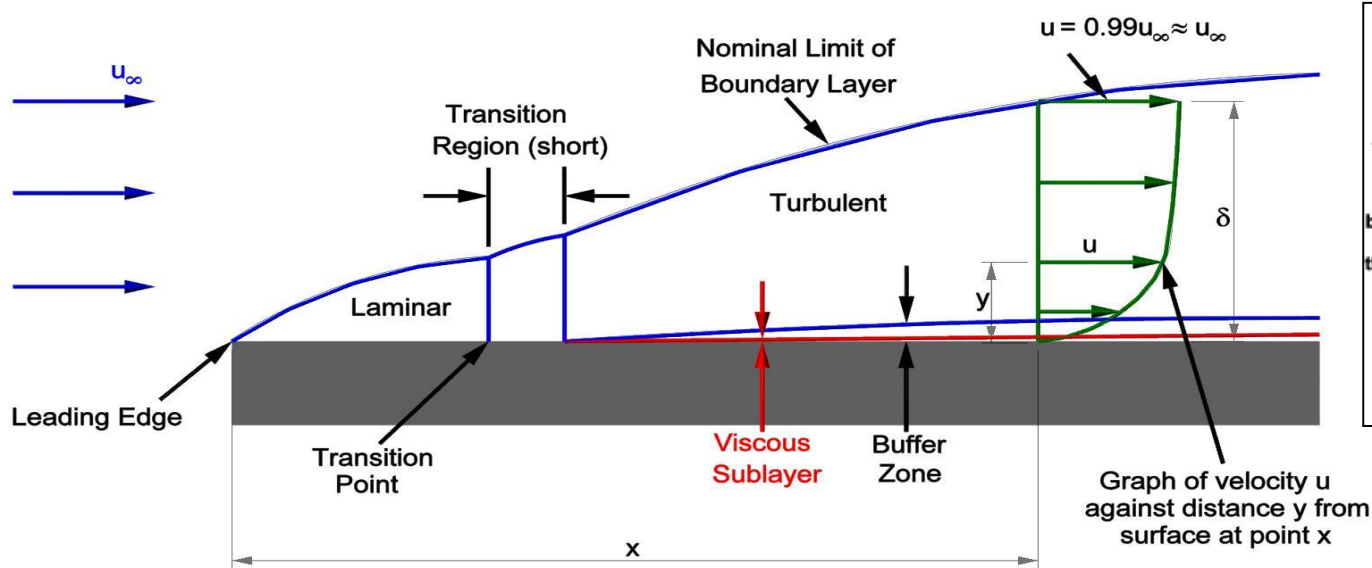


THE UNIVERSITY OF  
MELBOURNE





## Def.: határréteg (lamináris / turbulens)



**lamináris**

**turbulens**

súrlódási tényező

$$c'_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} V^2} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}$$

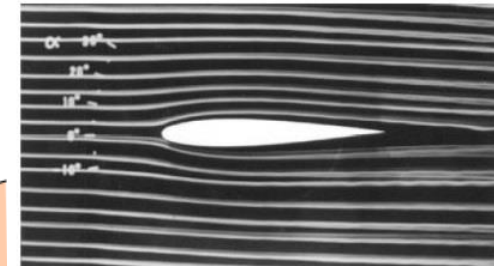
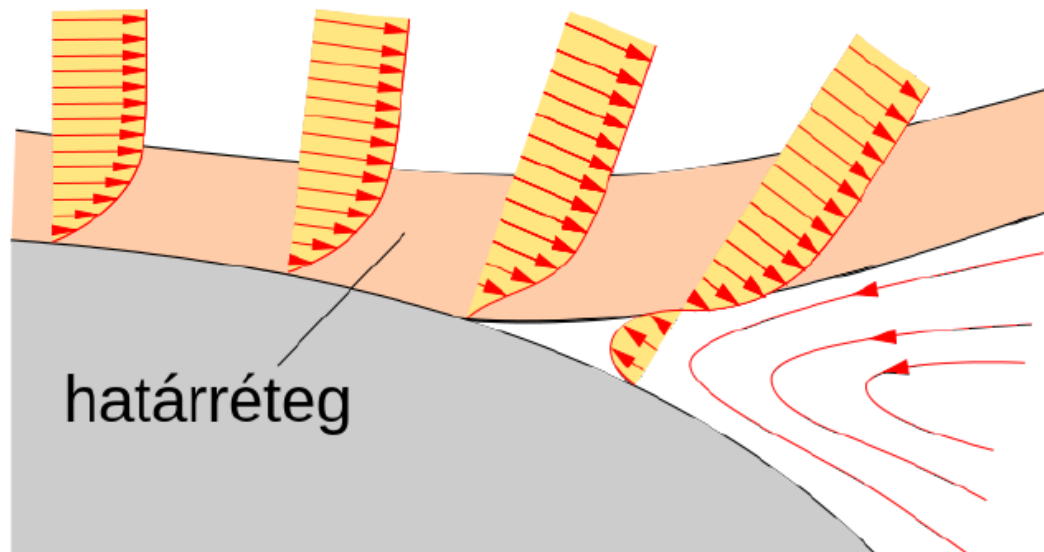
$$c'_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} V^2} = \frac{0,025}{\sqrt[3]{Re_x}}$$



## Def.: határréteg leválás

Leválás: visszaáramlás (örvények) a felület mentén

- Hirtelen lassuló áramlás (pl. íveltség miatt)
- Növekvő nyomás irányában áramló közeg



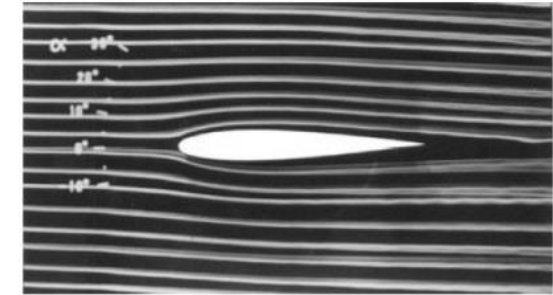
A **határréteg leválásnak** tehát két szükséges feltétele van:

- fal közelsége,
- áramlás irányában növekvő nyomás.

$$c_p = \frac{p - p_0}{\frac{\rho}{2} v^2}$$



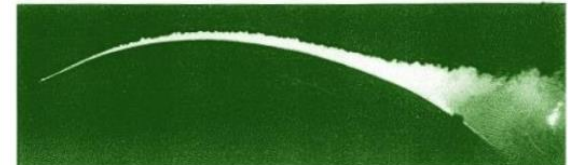
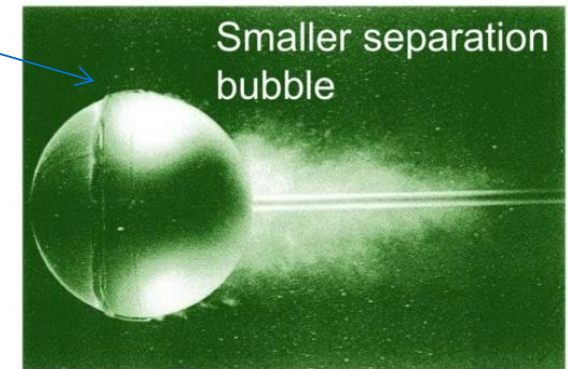
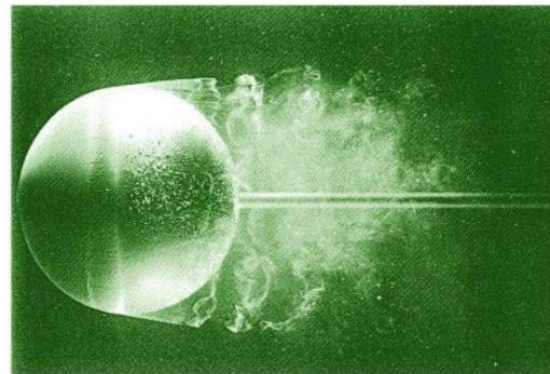
## Def.: határréteg, határréteg leválása





## Módszerek a határréteg leválás megszüntetésére / elkerülésére :

- $\tau_0 \downarrow$ : fali csúsztatófeszültség csökkentése (pl. fal mozgásával, érdesség csökkentésével)
- $\text{grad} p \downarrow$ : nyomásgradiens csökkentése (diffúzor kúpszög, állásszög csökkentésével)
- $v_0 \uparrow$ : sebesség növelése a fal mellett a határrétegben (befúvás, határréteg gyorsítása)
- leválás késleltetése : „botlódrót” (turbulencia generátor) alkalmazása





## határréteg

$$Re_x = \frac{V x}{\nu}$$

**lamináris**

**turbulens**

sebességmegoszlás

$$\frac{v_x}{V} \cong 1,5 \frac{y}{\delta} - 0,5 \left( \frac{y}{\delta} \right)^3,$$

$$\frac{v_x}{V} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}}$$

határréteg vastagság

$$\frac{\delta}{x} \cong \frac{5}{\sqrt{Re_x}},$$

$$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0,14}{\sqrt[4]{Re_x}}$$

súrlódási tényező

$$c'_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} V^2} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}$$

$$c'_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} V^2} = \frac{0,025}{\sqrt[4]{Re_x}}$$

ellenállástényező

$$c_e = \frac{F_e}{\frac{\rho}{2} V^2 x b} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_x}}$$

$$c_e = \frac{F_e}{\frac{\rho}{2} V^2 x b} = \frac{0,03}{\sqrt[4]{Re_x}}$$



## Aerodinamikai erő (nyomáseloszlásból és súrlódásból)

$$\underline{F} = \underline{F}_p + \underline{F}'_f$$

$$\underline{F}_p = - \int_A \underline{p} \cdot \underline{dA} \quad \underline{F}'_f = \int_A \tau_0 | \underline{dA} | \underline{e}$$

Bővítés referencia nyomással és sebességgel:

$$0 = \int p_\infty \cdot \underline{dA} \quad \text{és} \quad 1 = p_{din} / p_{din}$$

$$\underline{F}_p = p_{din} \cdot \left[ - \int_A c_p \cdot \underline{dA} \right]$$

$$\underline{F}'_f = p_{din} \cdot \left[ \int_A c'_f | \underline{dA} | \underline{e} \right]$$

$c_p$ : nyomástényező

$c'_f$ : fali (bőr-)súrlódási tényező

$$c_p = \frac{(p - p_\infty)}{p_{din}}$$

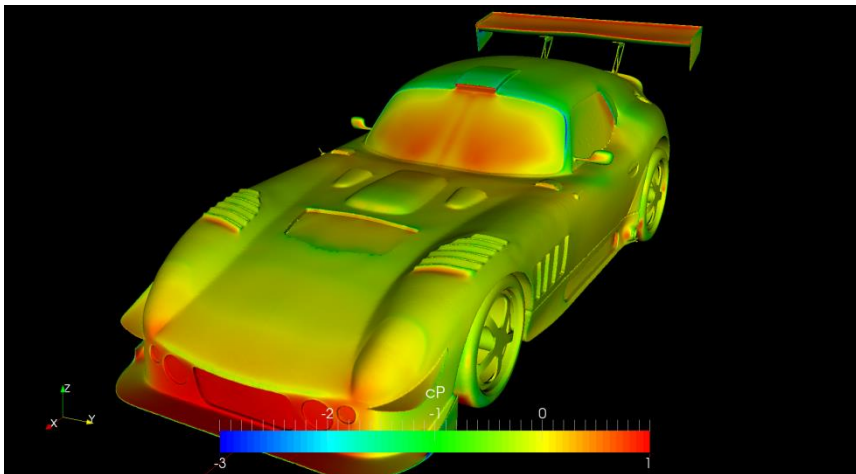
$$-3 \leq c_p \leq +1$$

$$c'_f = \frac{\tau_0}{p_{din}}$$

$$10^{-3} < c'_f < 10^{-2}$$



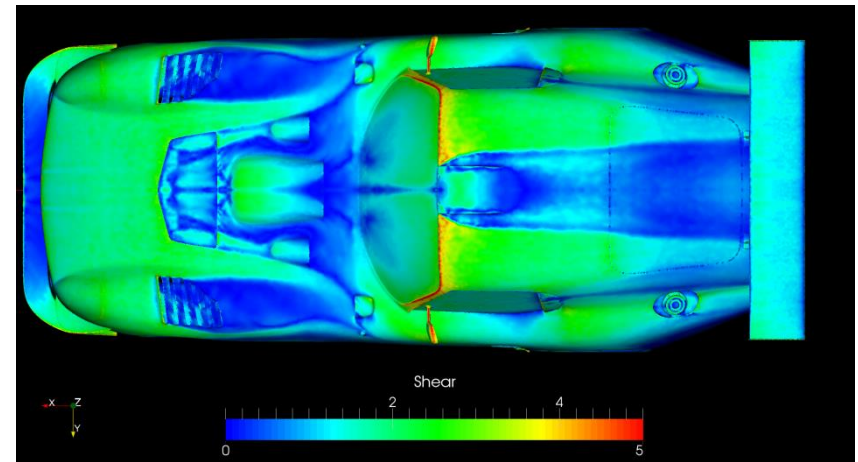
# Nyomástényező és fali csúsztatófeszültség eloszlás



$C_p$   
nyomástényező eloszlás

ábrán a skála:

$$-3 < C_p < +1$$



$\tau_0$  [Pa]  
fali csúsztatófeszültség eloszlás

ábrán a skála:

$$0\text{Pa} < \tau_0 < 5\text{Pa}$$



## Nyomástényező-eloszlás karosszérián (v.ö. görbült áramvonalak -> Euler-egyenlet)

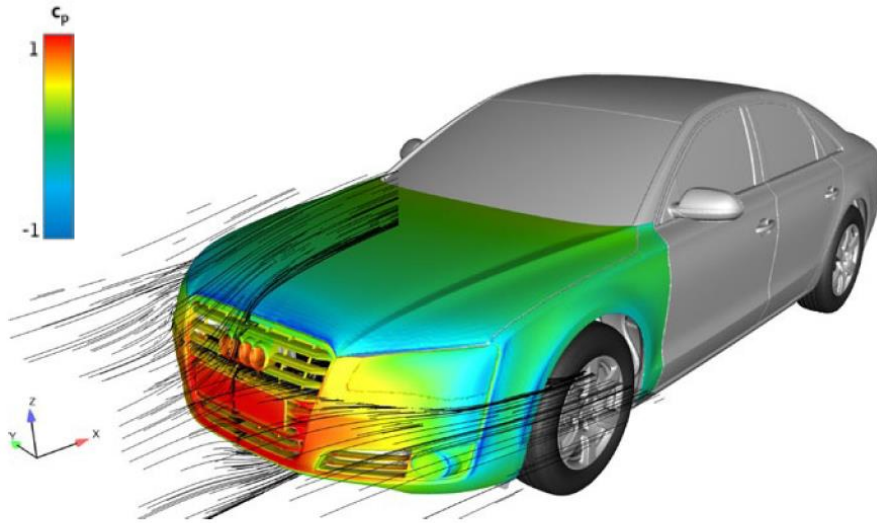


Abb. 4.55 Druckverteilung und Stromlinien am Vorderwagen eines Audi A6

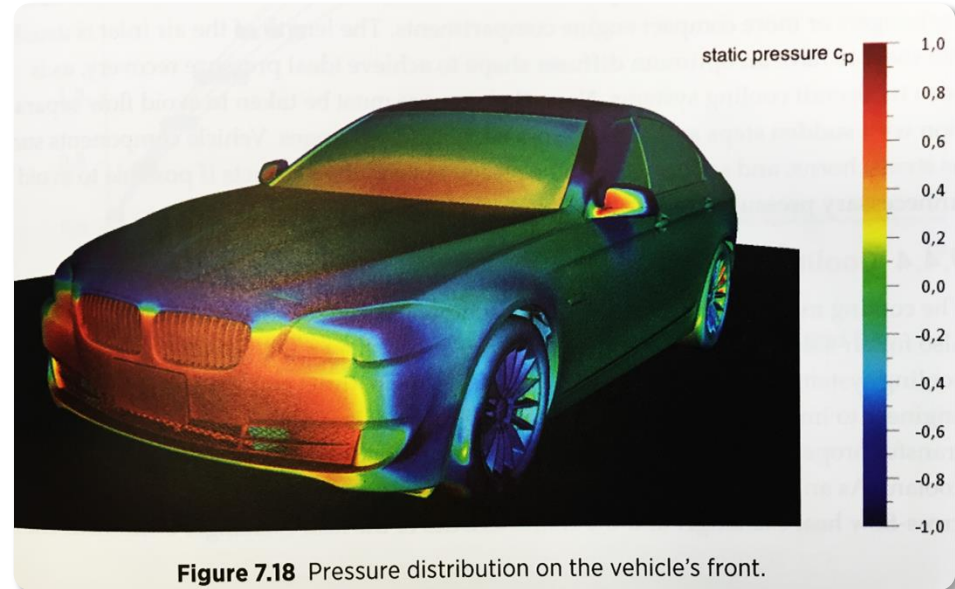
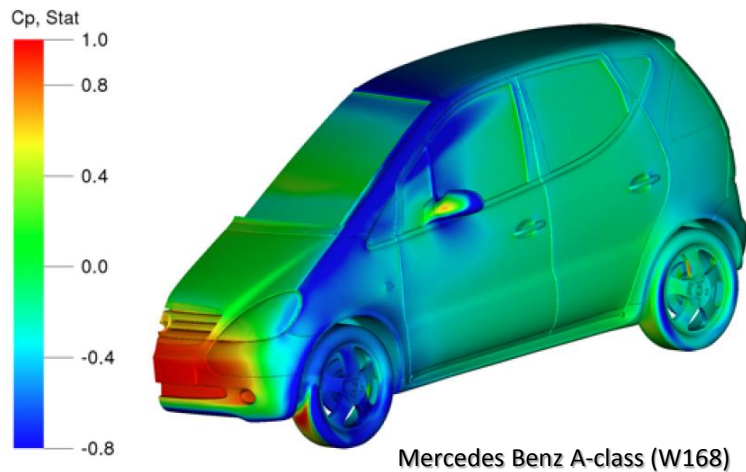


Figure 7.18 Pressure distribution on the vehicle's front.



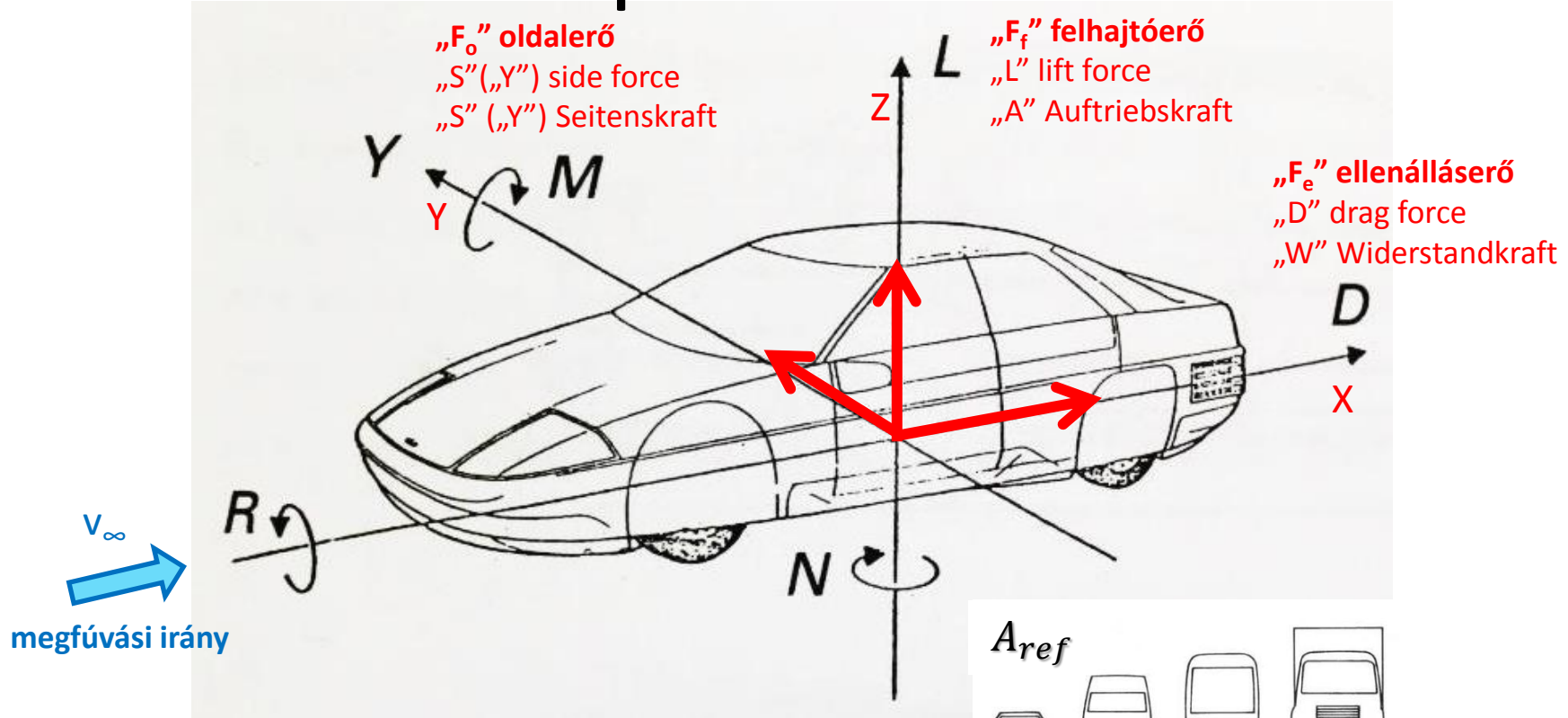
Mercedes Benz A-class (W168)







## Aerodinamikai erő komponensei:



## Aerodinamikai erőtényezők:

Ellenállástényező

$$c_e = \frac{F_e}{\rho_{din} A_{ref}}$$

Felhajtóerő-tényező

$$c_f = \frac{F_f}{\rho_{din} A_{ref}}$$

Oldalerő-tényező

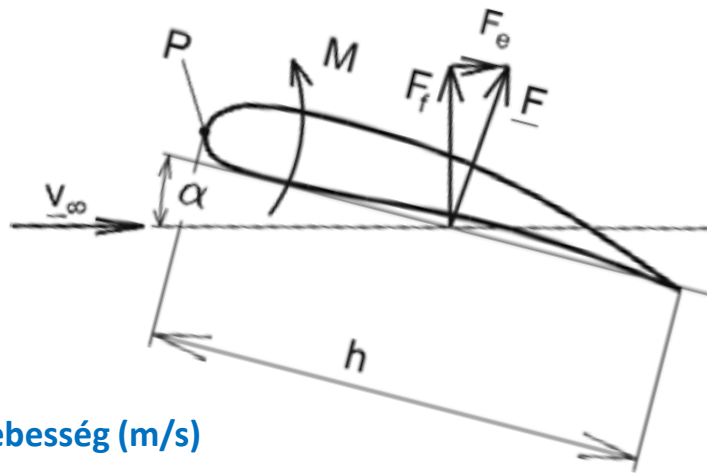
$$c_o = \frac{F_o}{\rho_{din} A_{ref}}$$



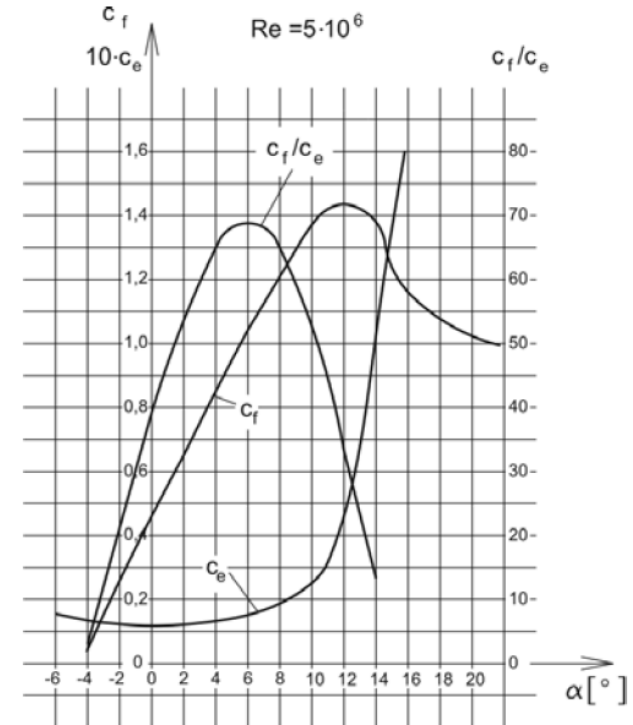
# Áramlásba helyezett szárny:

„ $F_e$ ” ellenállásérő  
 „D” drag force  
 „W” Widerstandkraft

„ $F_f$ ” felhajtóerő  
 „L” lift force  
 „A” Auftriebskraft



- $v_\infty$  : megfúvási sebesség (m/s)
- $\alpha$  : állásszög (°)
- $A_{ref}=h \cdot l$  : jellemző keresztmetszet (m<sup>2</sup>)
- $h$  : szárny húr hossz (m)
- $l$  : szárny hossz (m)



11.10. ábra

A felhajtóerő- az ellenállástényező és a siklószám változása az állásszög függvényében

# Aerodinamikai erőtényezők:

Ellenállástényező

$$c_e = \frac{F_e}{\rho_{din} A_{ref}}$$

Felhajtóerő-tényező

$$c_f = \frac{F_f}{\rho_{din} A_{ref}}$$

Siklószám

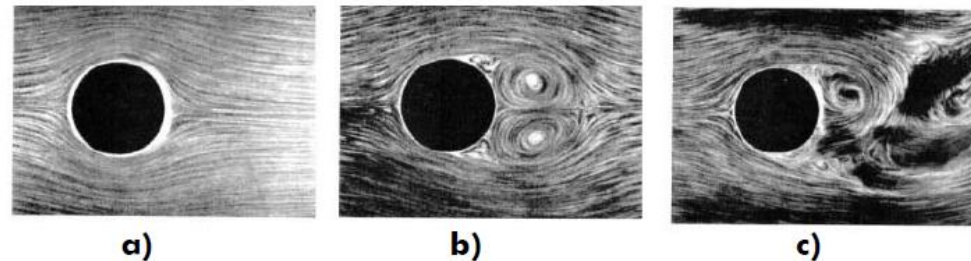
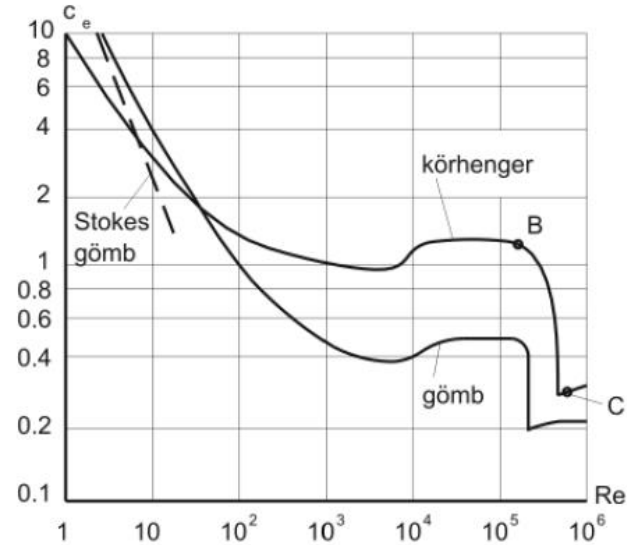
$$S = \frac{c_f}{c_e}$$



# Áramlásba helyezett testek ellenállástényezői

Áramlásba helyezett testek  $c_e$  ellenállástényezője [8] és [16] nyomán.

Tengelyére merőlegesen megfújt henger (9.12. ábra)						
Reynoldsszám $Re$	Áramlásra merőleges hossz/átmérő ( $l/d$ )					
	1	2	5	10	40	$\infty$
$10^3-10^5$	0,63	0,68	0,74	0,82	0,98	1,2
$> 5 \times 10^5$						0,35
Merőlegesen megfújt lemezcik (téglalap, 11.7. ábra)						
Hossz/szélesség ( $l/t$ )						
	1	2	4	10	18	$\infty$
	1,10	1,15	1,19	1,29	1,40	2,01
Áramlásra merőlegesen elhelyezkedő dúcprofil (2.3. ábra)						
A profil keresztmetszet áramlás irányú/arra merőleges mérete ( $h/d$ , hossz: $\infty$ )						
	2	3	5	10	20	
$> 5 \times 10^5$	0,2	0,1	0,06	0,083	0,094	
Áramlásra merőleges négyzetes hasáb átlóval párhuzamosan megfújva						
Áramlásra merőleges hossz/keresztmetszet oldalhossz ( $l/a$ )						
	5			$\infty$		
	0,91			1,53		
Forgási ellipszoid a $h$ tengellyel párhuzamosan megfújva						
Áramlás irányú/arra merőleges tengely ( $h/d$ )						
	1,8	1 (gömb)	0,75	0 (körtárcsa)		
$10^3-10^5$		0,5	0,6	1,1		
$> 5 \times 10^5$	0,09	0,15	0,2	1,1		
Tengely irányban megfújt henger (11.14 ábra)						
Áramlás irányú hossz/átmérő ( $l/d$ )						
	0 (körtárcsa)	1	2	4	7	
$10^3-10^5$	1,10	0,91	0,85	0,87	0,99	
Fél gömbhéj szimmetriatengellyel párhuzamosan megfújva						
Domború oldal felől megfújva			Homorú oldal felől megfújva			
	Nyitott	Körlappal zárt	Nyitott	Körlappal zárt		
	0,34	0,42	1,33	1,17		
Forgástengellyel párhuzamosan megfújt, áramlás irányában táguló kúp						
Kúpszög ( $\alpha^0$ )						
	30			60		
	0,34			0,51		



11.3. ábra

A körhenger és a gömb ellenállástényezője, a henger körüli áramlás