

## 4.GYAKORLAT (8. oktatási hét)

Lehetséges témakörök a 8. heti 4. gyakorlatra:

- izoterm atmoszféra
- Bernoulli-egyenlet instacioner áramlásokra ( $\mu=0$ ,  $\rho=\text{áll.}$ , instac., pot.erőtér, ①->② áramvonal)

### PÉLDA (izoterm atmoszféra)

Öt barátja elutazott ötfelé (lásd alábbi helyek). Mind az öten az alábbi hotelekben pont egy-egy 10. emeleti szobát kapnak. A hotelek földszintjének  $z_0=0\text{m}$  tengerszint feletti  $z_i[\text{m}]$  magasságai ismertek:

	$z_i$	
Nepál	Hotel Kathmandu	1298 m
Zimbabwe	Hotel Harare	1480 m
USA	Hotel Denver	1625 m
Svájc	Hotel Alpine	1700 m
Mexikó	Hotel Tequila	2216 m

Tudjuk, hogy a hotelek emeletei mindenhol 3m magasak.

Egyikük a mellékelt képet, a saját 10. emeleti hotelszoba ablakából készített fotót küldi Önnek a mai fak-zh-ra bízattatásul. Tudja, hogy az okostelefonjára mindenkinek fel van telepítve az [IA „izoterm atmoszféra” nevű ingyenes app](#), amely a GPS és I.S.A. adatok alapján a helyi  $p[\text{Pa}]$  légnyomást kiszámítja és öt tizedesjegy-pontossággal ráteszi a fotó bal alsó sarkára.

**ADATOK:** Az I.S.A. (Int.Stand.Atm.) adatok:  $p_0 = 101325 \text{ Pa}$ ;  $T_0 = 288 \text{ K}$ ;  $R = 287 \text{ J}/(\text{kgK})$ ;  $g = 9,81 \text{ N}/\text{kg}$

**KÉRDÉS:** Izoterm atmoszféra feltétellel számítással indokolja, honnan küldte Önnek a fotót az egyik barátja!



### MEGOLDÁS (A lap túloldalán is folytathatja a megoldást)

Izotermikus atmoszféra feltétel esetén a  $p=f(z)$  függvény ismert:

$$p(z) = p_0 \cdot e^{-\frac{g(z-z_0)}{RT_0}}$$

A fénykép alapján ismert a  $p(z)=83240,33436 \text{ Pa}$  nyomás értéke, ehhez keressük a  $z$  magasságot.

Fenti alakot rendezve  $z$ -re kapjuk:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g(z-z_0)}{RT_0}$$

azaz:

$$z = -\frac{RT_0}{g} \cdot \ln \frac{p}{p_0}$$

behelyettesítve:

$$z = -\frac{287 \cdot 288}{9,81} \cdot \ln \frac{83240,33436}{101325} = 1656,5\text{m}$$

Tehát a fotó  $z = 1656,5 \text{ m}$  tengerszint-feletti magasságban készült valamelyik hotelben.

Bármelyik hotel 10. emeletén állva és a fényképezőgépet kb. 1,5m magasságban tartva a fotókészítés tengerszint-feletti magassága  $z = z_i + 10 \cdot 3\text{m} + 1,5\text{m} = z_i + 31,5 \text{ m}$ .

Ebből  $z_i = z - 31,5\text{m}$ , vagyis  $z_i = 1656,5 - 31,5 = 1625 \text{ m}$ , azaz a barátja a fotót a Hotel Denver (USA) 30. emeletén készítette.

## PÉLDA(izoterm atmoszféra)

Ön a Magas-Tátra hegység 2632m magas Lomnici-csúcsáról utazik lefelé lanovkával a 910m tengerszintfeletti magasságban fekvő Tátralomnicra. A csúcson indulás előtt kiitta a teát az 1 literes termoszból, aztán a kupakot hermetikusan lezárta és nem is nyitotta ki az utazás alatt.

### KÉRDÉSEK:

**A)** Tátralomnicra érve mekkora a nyomáskülönbség a termosz belső tere és a külső környezeti nyomás között? Ha kinyitja a termoszkupak szelepét, akkor azon keresztül kifelé vagy befelé kezd el áramlani a levegő? Az A) kérdés során a  $p=f(z)$  számítása során **izoterm atmoszférát** tételezzen fel, melyhez az adatok:  $z_0=0\text{m}$ ,  $p_0=101325\text{Pa}$ ;  $T_0=288\text{K}$ ;  $R=287\text{ J}/(\text{kgK})$ ,  $g=9,81\text{ N}/\text{kg}$ .

**B)** Mekkora lenne a termosz belső tere és a külső környezeti nyomás között ez a nyomáskülönbség Tátralomnicra érkezéskor, ha nem izoterm atmoszféra, hanem a  $z_0=0\text{m}$  tengerszinti  $p_0=\text{állandó}$  feltétellel számolná a  $p=f(z)$  környezeti nyomást?



### MEGOLDÁS

#### A)

Izoterm atmoszféra feltételt használva bármely  $z_i$  magasságon a  $p_i$  nyomás az alábbi  $p=f(z)$  kifejezéssel számítható:

$$p_i = p_0 \cdot e^{-\frac{g \cdot (z_i - z_0)}{R \cdot T_0}}$$

Esetünkben  $z_i = 2632\text{m}$  (fent) és  $910\text{m}$  (lent) ismeretében a nyomások:

fent:  $p_{\text{CSÚCS}}=74140\text{ Pa}$

lent:  $p_{\text{TÁTRALOMNIC}}=90952\text{ Pa}$

A nyomáskülönbség  $\Delta p = p_{\text{TÁTRALOMNIC}} - p_{\text{CSÚCS}} = 90952\text{Pa} - 74140\text{Pa} = 16812\text{ Pa}$

Mivel  $p_{\text{TÁTRALOMNIC}} > p_{\text{CSÚCS}}$ , így ha kinyitjuk a kupakszelepet, akkor kintről befelé áramlik a levegő.

#### B)

A  $p_0=\text{áll.}$  feltételt használva: Mivel  $z_0=0\text{m}$  tengerszinten a nyomás  $p_0=101325\text{Pa}$  és  $T_0=288\text{K}=\text{áll.}$  adatok ismertek, így a  $\rho_0=1,225863821\text{kg}/\text{m}^3$  ( $\approx 1,226\text{kg}/\text{m}^3$ ) állandó sűrűség ismeretében bármely  $z_i$  magasságon a  $p_i$  nyomás felírható:

$$p_i = p_0 - \rho_0 \cdot g \cdot (z_i - z_0) = p_0 - \rho_0 \cdot g \cdot z_i$$

fent:  $p_{\text{CSÚCS}}=69673\text{ Pa}$

lent:  $p_{\text{TÁTRALOMNIC}}=90382\text{ Pa}$

A nyomáskülönbség  $\Delta p = p_{\text{TÁTRALOMNIC}} - p_{\text{CSÚCS}} = 90382\text{Pa} - 69673\text{Pa} = 20709\text{Pa}$

Mivel  $p_{\text{TÁTRALOMNIC}} > p_{\text{CSÚCS}}$ , így ha kinyitjuk a kupakszelepet, akkor  $p_0=\text{áll.}$  feltételt használva is kintről befelé áramlik a levegő, de nagyobb a nyomáskülönbség, mint izoterm atmoszféra feltétel esetén.

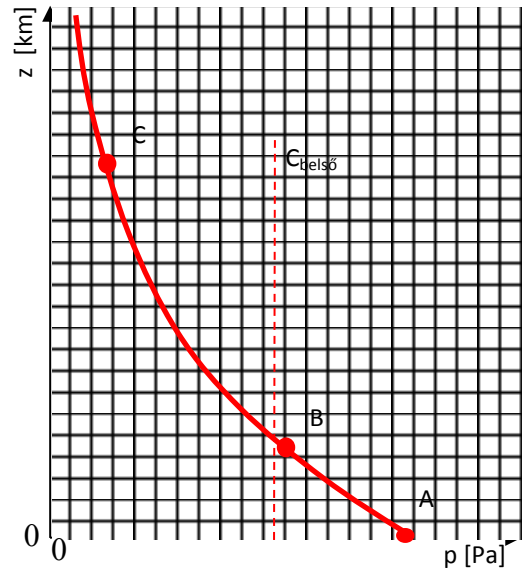
## PÉLDA(izoterm atmoszféra)

Mexico City repülőterének  $z=2250\text{m}$  tengerszint feletti magasságban fekvő kifutópályáján az indulásra váró repülőgép utasterében a nyomás a helyi környezeti nyomás, a hőmérséklet pedig  $15^\circ\text{C}$ . Felszállás után a repülőgép rövid idő alatt eléri a  $z=10500\text{m}$ -es utazómagasságot. Az utazómagasságon az utastér nyomását  $0,75 \cdot 10^5\text{Pa}$  értéken tartják, miközben az utastér hőmérséklete  $15^\circ\text{C}$  marad, mert nem működik tökéletesen a klímaberendezés.

**ADATOK:** I.S.A. adatok:  $z_0=0\text{m}$ ,  $p_0=101325\text{Pa}$ ,  $T_0=288\text{K}$ . Ebben a példában  $g=9,81\text{N/kg}$  értékkel számoljon! levegőre  $R=287\text{J/(kgK)}$

### KÉRDÉSEK:

- 1.1 Izoterm atmoszféra feltétellel határozza meg, hogy utazómagasságon mekkora és milyen irányú az utastér  $25\text{cm} \times 40\text{cm}$  téglalap alakúnak tekinthető ablakára ható erő!
- 1.2 Rajzolja fel a diagramba a környezeti nyomás magasság szerinti változását izoterm atmoszféra feltétel esetén! Jelölje a diagramban az A) tengerszinten, B) repülőtéren és C) utazómagasságon (repülőgépen kívül és belül) a pontokat a  $(z,p)$  koordinátákkal!
- 1.3 Hány kg levegőnek kell távoznia a  $850\text{m}^3$  térfogatú utastérből, mire a repülőgép eléri az utazómagasságot?



### MEGOLDÁS (a lap túoldalán is folytathatja)

1.1 Ha  $z_0=0\text{m}$  tengerszinten a nyomás  $p_0=101325\text{Pa}$  és  $T_0=288\text{K}$ =áll. adatok ismertek, akkor bármely  $z_i$  magasságon a  $p_i$  nyomás az izoterm atmoszféra képletel számítható:

$$p_i = p_0 \cdot e^{-\frac{g \cdot (z_i - z_0)}{R \cdot T_0}}$$

Esetünkben  $z_i=10500\text{m}$  ismeretében a külső nyomás  $p_{\text{külső}}$  kiszámítható:

$$p_{\text{külső}} = p_0 \cdot 0,287598742 = 29141\text{ Pa}$$

Ezzel a nyomáskülöbség  $\Delta p = p_{\text{belső}} - p_{\text{külső}} = 75000 - 29141 = 45859\text{Pa}$

Az ablakra ható erő:  $F_{\text{ablak}} = \Delta p \cdot A_{\text{ablak}} = 45859\text{Pa} \cdot (0,25 \cdot 0,4) = 4585,9\text{N}$

1.2 Lásd ábra.

tengerszinten ( $z_A=0\text{m}$ )  $p=p_0=101325\text{Pa}$

reptéren ( $z_B=2250\text{m}$ )  $p=77579\text{Pa}$

utazómagasságon ( $z_C=10500\text{m}$ )  $p=29141\text{Pa}$

1.3 A repülőtéren ( $z_B=2250\text{m}$ ) az utastér  $850\text{m}^3$ -e tele van a helyi nyomású és hőmérsékletű levegővel, melynek sűrűsége:

$$\rho_B = p_B / (R \cdot T_B) = 77579 / (287 \cdot 288) = 0,938576751\text{ kg/m}^3$$

ezzel az utastér levegőjének össztömege:  $m_B = \rho_B \cdot V = 797,79\text{ kg}$

Az utazómagasságon ( $z_C=10500\text{m}$ ) az utastér  $850\text{m}^3$ -e tele van a belső nyomású ( $75000\text{Pa}$ ) és  $15^\circ\text{C}$  hőmérsékletű levegővel, melynek sűrűsége:

$$\rho_C = p_C / (R \cdot T_C) = 75000 / (287 \cdot 288) = 0,907375145\text{ kg/m}^3$$

ezzel a tömege:  $m_C = \rho_C \cdot V = 771,27\text{ kg}$

Tehát  $\Delta m = m_B - m_C = 26,52\text{kg}$  tömegű levegőt kellett kiengedni.

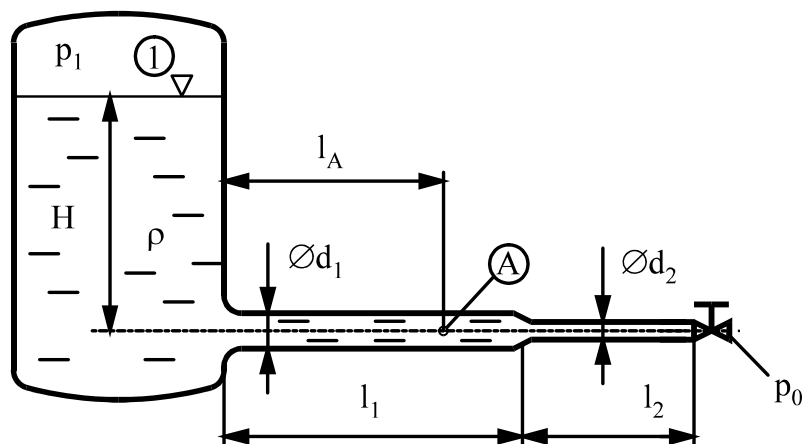
## PÉLDA (Instacioner Bernoulli-egyenlet)

Egy  $p_1 = 2,5 \text{ bar}$  nyomású, vízzel töltött zárt fedelű tartályhoz csatlakozó vízszintes tengelyű csővezeték végén egy alapállapotban teljesen zárt szelep található. **FELTÉTELEK:**  $\mu=0$ ;  $\rho=\text{áll.}$ ;  $A_{\text{tartály}} \gg A_{\text{cső}}$ ; a tartályt a csővel és a csőszakaszokat egymással elhanyagolható hosszú csőidomok kötik össze, a szelep hossza is elhanyagolható. A csővégi szelep be- és kilépő keresztmetszetei a  $d_2$  átmérőjű csőével azonosak. **ADATOK:**

$$p_0 = 10^5 \text{ Pa} \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad g = 10 \text{ N/kg} \quad H = 15 \text{ m}$$

$$d_1 = 50 \text{ mm} \quad d_2 = 25 \text{ mm} \quad \ell_1 = 10 \text{ m} \quad \ell_2 = 5 \text{ m}$$

$$\ell_A = 7 \text{ m}$$



### KÉRDÉSEK:

- Mekkora a víz „A” pontbeli kezdeti gyorsulása a nyitás  $t_0=0\text{s}$  időpillanatában?
- Mekkora a víz „A” pontbeli gyorsulása sebessége abban az időpillanatban, amikor a kiáramlási sebesség a stacioner kiáramlási sebességnek épp a háromnegyede?

### MEGOLDÁS (a lap túloldalán is folytathatja)

a) Az instacioner esetre felírt Bernoulli-egyenlet az „1” és „2” pont közötti áramvonalon:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

A  $z=0\text{m}$  referencia szintet bárhova felvehetjük, most legyen  $z=0\text{m}$  az alsó csőtengelyben.

	„1”=tartály vízfelszín	„2”=csővég, a szelep utáni kiáramlási keresztmetszet
p [Pa]	250 000Pa	$p_0=100\ 000\text{Pa}$
v [m/s]	$v_1=0$ (tartály)	$v_2=0$ (nyitás pillanata!)
z [m]	15m	0m

Az „1” és „2” pontok közötti folyadék gyorsításához szükséges többletnyomás, azaz a  $\rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$  tag kiszámítása:

Mivel  $A_{\text{tartály}} \gg A_{\text{cső}}$ , és az átmeneti idomok hossza elhanyagolható és a csőkeresztmetszet változik, de szakaszonként állandó ( $a_1 A_1 = a_2 A_2$ ), a csőhosszak pedig  $L_1=10\text{m}$  és  $L_2=5\text{m}$  így:  $\rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \rho \cdot a_1 \cdot L_1 + \rho \cdot a_2 \cdot L_2$ . (Itt az „1” ill. „2” alsó index az „1”-es ill. „2” csőszakaszra utal!) Az instacioner Bernoulli-egyenlet a nyitás időpillanatában (azaz a maximális értékű)  $a_A = a_1$  gyorsulásra rendezhető:  $a_A = \checkmark$ .

$$a_1 = \frac{p_1 - p_2 + \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2)}{\rho \cdot \left( L_1 + L_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} \right)} = \frac{250000 - 100000 + 1000 \cdot 10 \cdot 15}{1000 \cdot \left( 10 + 5 \cdot \left( \frac{50}{25} \right)^2 \right)} = \frac{300}{30} = 10 \text{ m/s}^2$$

b) A  $t=\infty$  stacioner kiáramlási sebesség a stacioner Bernoulli-egyenletből rendezve meghatározható:

$$v_{2,\text{stac}} = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + 2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{300 + 300} = \sqrt{600} \text{ m/s}$$

A Bernoulli-egyenlet instacioner alakja abban a  $t$  időpillanatban ( $t_0 < t < \infty$ ) felírva, amelyben  $v_2$  a  $v_{2,\text{stac}}$  háromnegyede (azaz  $0,75\sqrt{600}\text{m/s}$ ), ismét csak az  $a$  gyorsulás ismeretlen:

	„1”=tartály vízfelszín	„2”=csővég, a szelep utáni kiáramlási keresztmetszet
p [Pa]	250 000Pa	$p_0=100\ 000\text{Pa}$
v [m/s]	$v_1=0$ (tartály)	$v_2=0,75\sqrt{600}\text{m/s}$
z [m]	15m	0m

Az instacioner Bernoulli-egyenlet fenti adatokkal rendezhető:  $a = \checkmark$

$$a = \frac{p_1 - p_2 - \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 - \rho \cdot g \cdot z_2}{\rho \cdot \left( L_1 + L_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} \right)} = \frac{150 - 168,75 + 150}{30} = \frac{131,25}{30} = 4,375 \text{ m/s}^2$$

## PÉLDA (Instacioner Bernoulli-egyenlet)

A vízszintes tengelyű óriásfecskendőben víz van. A megfigyelt  $t$  időpillanatban ( $t_0 < t < \infty$ ) ismert a dugattyú sebessége és gyorsulása

$$v_d = 2 \text{ m/s} \quad a_d = 2 \text{ m/s}^2$$

A dugattyú baloldalán

és a fecskendő kiáramlási keresztmetszetében a nyomás  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ .

**Feltételek:** Ideális közeg. A  $\varnothing D$  ill.  $\varnothing d$  átmérőjű, és  $L$  ill.  $l$  hosszúságú csőszakaszok közötti átmeneti idom (konfúzor) hossza a csőhosszakhoz képest elhanyagolható.

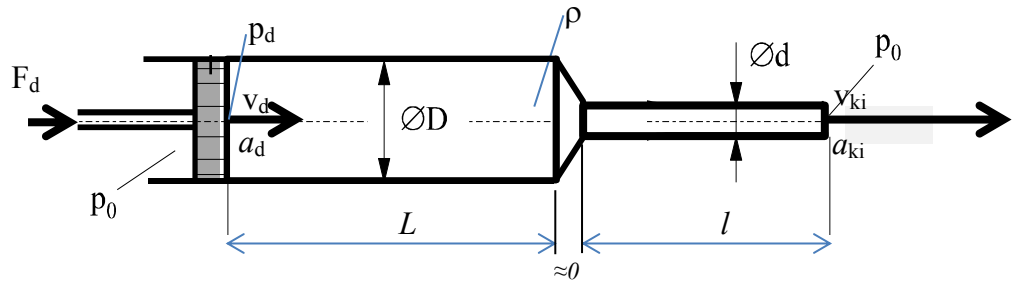
**ADATOK:**  $L = 500 \text{ mm}$ ;  $l = 500 \text{ mm}$ ;  $\varnothing D = 50 \text{ mm}$ ;  $\varnothing d = 25 \text{ mm}$ ,  $\rho_{\text{víz}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ;  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$

**KÉRDÉSEK:**

a) Mekkora ekkor a szabadba kiáramló vízszög sebessége és gyorsulása?  $v_{ki} = ?$   $a_{ki} = ?$

b) Mekkora akkor a dugattyú belső felületén a nyomás?  $p_d = ?$

c) Mekkora  $F_d$  erővel kell hatni a dugattyúra ebben a pillanatban?  $F_d = ?$



### MEGOLDÁS (a lap túloldalán is folytathatja)

a) A csőkeresztmetszet változik, de szakaszonként állandó, a gyorsulásokra alkalmazható folytonosság-tétel ( $a_1 A_1 = a_2 A_2$ ) miatt  $a_1 = a_{\text{dug}} = 2 \text{ m/s}^2$ , ezzel  $a_2 = 4 \cdot a_1 = 8 \text{ m/s}^2$ .

A sebesség hasonló ( $v_1 A_1 = v_2 A_2$ ) módon  $v_1 = v_{\text{dug}} = 2 \text{ m/s}$  alapján  $v_2 = 4 \cdot v_1 = 8 \text{ m/s}$ .

b)

Az instacioner esetre felírt Bernoulli-egyenlet az „1” (dugattyú belső felszíne) és „2” (csővég) pont közötti áramvonalon:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} d\underline{s}$$

A  $z=0 \text{ m}$  referencia szintet bárhova felvehetjük, most legyen  $z=0 \text{ m}$  az alsó csőtengelyben.

	„1”	„2”
$p$ [Pa]	$p_{\text{belső}} = p_1 = ?$	$p_0 = 100\,000 \text{ Pa}$
$v$ [m/s]	$v_1 = v_{\text{dug}} = 2 \text{ m/s}$	$v_2 = 4 \cdot v_1 = 8 \text{ m/s}$ (folytonosság!)
$z$ [m]	0 m	0 m

Az „1” és „2” pontok közötti folyadék gyorsításához szükséges többletnyomás, azaz a  $\rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} d\underline{s}$  tag kiszámítása:

Mivel az átmeneti idom hossza elhanyagolható és a csőkeresztmetszet változik, de szakaszonként állandó, a csőhosszak pedig  $L_1 = 0,5 \text{ m}$  és  $L_2 = 0,5 \text{ m}$  így:  $\rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} d\underline{s} = \rho \cdot a_1 \cdot L_1 + \rho \cdot a_2 \cdot L_2$ . (Itt az „1” ill. „2” alsó index az „1”-es ill. „2” csőszakaszra utal!). Ezzel a keresett nyomás

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 - \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + \rho \cdot a_1 \cdot L_1 + \rho \cdot a_2 \cdot L_2 = 100000 + 32000 - 2000 + 1000 + 4000 = 135000 \text{ Pa}$$

b)  $F_{\text{dug}} = \Delta p \cdot A_{\text{dug}} = (p_1 - p_0) \cdot A_{\text{dug}} = 35000 \text{ Pa} \cdot (0,05 \cdot 0,05 \cdot \pi/4) = 68,72 \text{ N}$