5.GYAKORLAT (10. oktatási hét)

Lehetséges témakörök a 10. heti 5. gyakorlatra:

- Gyakorlati anyag: impulzustétel és alkalmazásaira gyakorló példák,
- Előadáson elhangzott: impulzusétel elméleti alapok

Javasolt gyakorlatra:

- **A) Álló illetve mozgó síklapra és/vagy ívelt lapra rááramló szabadsugár, lapra ható erő számítás**
- **B) Keresztmetszet-változásos csőívre ható erő**
- **C) Coanda-effektus**
- **D) Nyomáskülönbség számítása impulzustétellel sűrűségváltozás esetén**
- **X) további példák (előadás anyag)**

A)PÉLDA (impulzustétel)

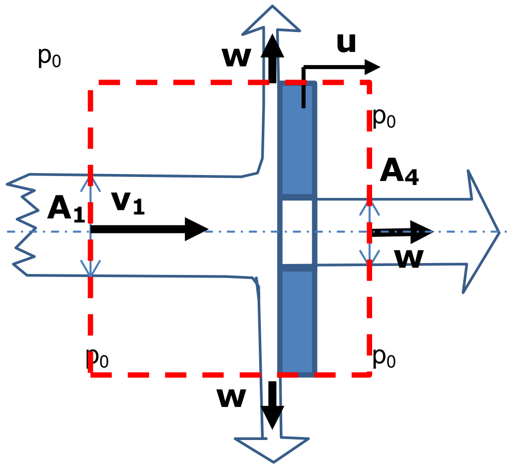
Az A_1=100cm^2 keresztmetszetű víz szabadsugár a vízszintes síkban az abszolút rendszerben értelmezett állandó v_1=50m/s sebességgel áramlik a vele azonos irányban

a)u=0m/s álló vagy

b)u=+20m/s, vagy

c)u=-20m/s sebességgel mozgó

lyukas (A_4=50cm^2) tárcsára. A tárcsa szélén (fent „2", lent „3" pontban leáramló és a lyukon keresztül átáramló víz relatív sebességei (w) az ábrán nyíllal jelöltek.



FELTÉTELEK: ρ=áll., μ=0, a szabadsugárra a nehézségi erőtér hatása elhanyagolható.

ADATOK: p_0=10^{5}Pa, g=10N/kg; $\rho_{víz}$=1000*kg/m^3*

KÉRDÉS: Határozza meg a lyukas tárcsára ható erőt! ***R***=?

Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába a felvett koordinátarendszert és az ellenőrző felületet! A példa megoldása ezek nélkül nem értelmezhető!

MEGOLDÁS

Az $A_{e.f.}$ felvétele, valamint pl. (x→, y↑) irányítottságú koordinátarendszer felvétele az első lépés. Az $A_{e.f.}$–en mindenhol p_0 a nyomás. Folytonosság és szimmetria: $A_2=A_3=(A_1-A_4)/2=25$cm^2. ρ=áll, súlyerő elhanyagolható.

a)u=0m/s (álló tárcsa),
Az 1-2, 1-3, 1-4 áramvonalakon felírt Bernoulli-egyenletekből v1=v2=v3=v4=**50m/s**.
Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete:

$$-\rho_1 v_1^2 A_1 + \rho_4 v_4^2 A_4 = -R_x$$

Az impulzustétel **y irányban** felírt komponensegyenlete:

$$+\rho_2 v_2^2 A_2 - \rho_3 v_3^2 A_3 = -R_y$$

b)u=+20m/s (rááramló vízsugárral azonos irányban mozgó tárcsa),
Az 1-2, 1-3, 1-4 áramvonalakon relatív (tárcsához rögzített) koordinátarendszerben) felírt Bernoulli-egyenletekből w1=w2=w3=w4=50-20=**30m/s**. (**w**=**v**-**u**)
Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$-\rho_1 w_1^2 A_1 + \rho_4 w_4^2 A_4 = -R_x$$

Az impulzustétel **y irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$+\rho_2 w_2^2 A_2 - \rho_3 w_3^2 A_3 = -R_y$$

c)u=-20m/s (rááramló vízsugárral szemben mozgó tárcsa),
Az 1-2, 1-3, 1-4 áramvonalakon relatív (tárcsához rögzített) koordinátarendszerben) felírt Bernoulli-egyenletekből w1=w2=w3=w4=50-(-20)=**70m/s**. (**w**=**v**-**u**)
Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

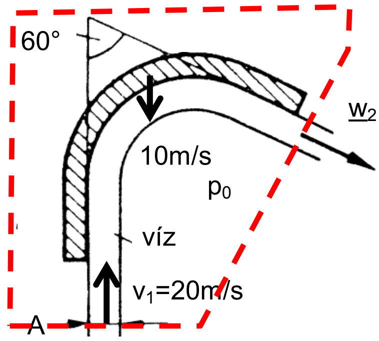
$$-\rho_1 w_1^2 A_1 + \rho_4 w_4^2 A_4 = -R_x$$

Az impulzustétel **y irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$+\rho_2 w_2^2 A_2 - \rho_3 w_3^2 A_3 = -R_y$$

A ható R erő R_x ill R_y komponenseire fenti két komponensegyenlet rendezhető, majd *R* nagysága és iránya is kiszámítható, felrajzolható.

A)PÉLDA (impulzustétel)



Az $A=10cm^2$ keresztmetszetű víz szabadsugár a vízszintes síkban állandó $v_1=20m/s$ sebességgel áramlik a vele ellentétes (ld. nyíl) irányban 10m/s sebességgel mozgó ívelt lapra. Az ívelt lapról a lappal párhuzamosan leáramló vízsugár relatív sebességvektora ($\underline{w}_2$) az ábrán nyíllal jelölt.

FELTÉTELEK: $\mu=0$; ρ=áll.; stacioner áramlás

ADATOK: $p_0=10^5Pa$, $g=10N/kg$; $\rho=1000 kg/m^3$

KÉRDÉSEK:

a) Határozza meg az ívelt lapra ható erőt! **$\underline{R}$**=?

b) Mekkorára változik az ívelt lapra ható **$\underline{R}$** erő, ha az ívelt lap az ábrába berajzolt nyíllal ellentétes irányban mozog 10m/s sebességgel?

Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába a felvett koordinátarendszert és az ellenőrző felületet! A példa megoldása ezek nélkül nem értelmezhető!

MEGOLDÁS

Az $A_{e.f.}$ felvétele (lásd ábra), valamint (x→, y↑) irányítottságú koordinátarendszer felvétele az első lépés.
A nyomás az $A_{e.f.}$ ellenőrző felületen mindenhol p_0. (szabadsugár!)
A sűrűség állandó.

a) A rááramló vízsugárral „szemben” mozgó tárcsa esetén:

Folytonosság és 1 -> 2 relatív áramvonalakon felírt Bernoulli-egyenletekből adódik, hogy $w_1=w_2$, és $w_1= 20-(-10)=30m/s$, illetve hogy $A_1=A_2$

Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$\rho_2 w_2^2 A_2 sin60° = -R_x$$

Az impulzustétel **y irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$-\rho_1 w_1^2 A_1 - \rho_2 w_2^2 A_2 cos60° = -R_y$$
$$R_y = \rho_1 w_1^2 A_1 (1 - cos60°)$$

A ható erő komponenseire fenti két komponensegyenlet rendezhető, majd *R* nagysága és iránya is kiszámítható, felrajzolható.

b) A rááramló vízsugárral „azonos irányban” mozgó tárcsa esetén:

Folytonosság és 1 -> 2 relatív áramvonalakon felírt Bernoulli-egyenletekből adódik, hogy $w_1=20-10=10m/s$. Továbbra is $w_1= w_2$ és $A_1=A_2$
A megoldás során azonos komponens-egyenletekbe helyettesítjük be a w új értékét:

Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

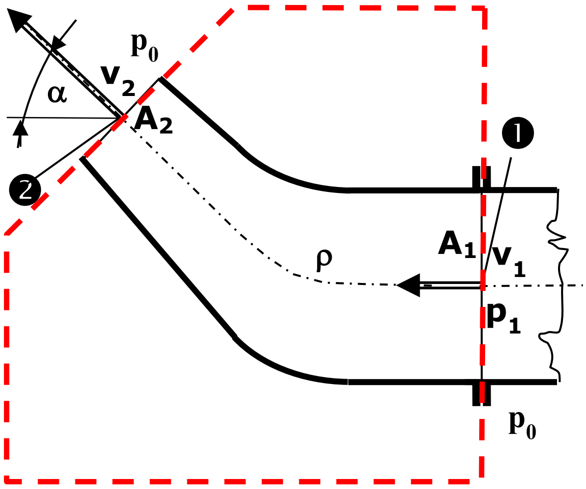
$$\rho_2 w_2^2 A_2 sin60° = -R_x$$

Az impulzustétel **y irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$-\rho_1 w_1^2 A_1 - \rho_2 w_2^2 A_2 cos60° = -R_y$$

A ható erő komponenseire fenti két komponensegyenlet rendezhető, majd *R* nagysága és iránya is kiszámítható, felrajzolható.

B)PÉLDA (impulzustétel)



Egy hőlégfúvó áramlás irányban szűkülő, a p_0 nyomású szabadba nyíló csővégi idomát mutatja az ábra. Az „1” és „2” keresztmetszetbeli tengelyek egymással α=60° szöget zárnak be, és a vízszintes (x,y) síkban fekszenek. Ismert a ρ= 1 kg/m^3 sűrűségű meleg levegő „1” keresztmetszetbeli átlagsebessége: v_1=30m/s. **FELTÉTELEK**: μ=0; ρ=áll.; stacioner áramlás, a folyadékra ható súlyerő elhanyagolható. **ADATOK:**

$p_0=10^5$Pa; g=10N/kg; ρ= 1 kg/m^3;

$A_1=10^{-3}$ m^2; $A_2=5\cdot10^{-4}m^2$ v_1=30m/s

KÉRDÉS: Határozza meg az idomra ható **R** erőt!

Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába az Ön által felvett koordináta-rendszert egyértelműen jelölt x és y tengelyekkel, illetve jelölje be számításához használt ún. ellenőrző felületet! Ezek nélkül a megoldás elvi hibás, nem értelmezhető!

MEGOLDÁS

Folytonosság tétele: $v_1 A_1 = v_2 A_2$, és $A_1/A_2=2$

A feltételek szerinti folytonosság tételt kihasználva v_1=30m/s, v_2=60m/s, és aBernoulli-egyenletet felírva „1” és „2” pontok közé a nyomáskülönbség (p_1-p_0= 1350 Pa) ismeretében :

Az $A_{e.f.}$ felvétele (lásd ábra), valamint (x⟶, y↑) irányítottságú koordinátarendszer felvétele az első lépés.

A nyomás az $A_{e.f.}$ –en mindenhol p_0, kivéve A_1 keresztmetszetet, ahol p_1.

A sűrűség állandó.

Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$\rho_1 v_1^2 A_1 - \rho_2 v_2^2 A_2 cos60° = -\int_{Ax} p d\underline{A} - R_x$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő x komponense: $-\int_{Ax} p d\underline{A} = -(p_1 A_1 - p_0 A_1) = (p_0 - p_1) A_1$

Az impulzustétel **y irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

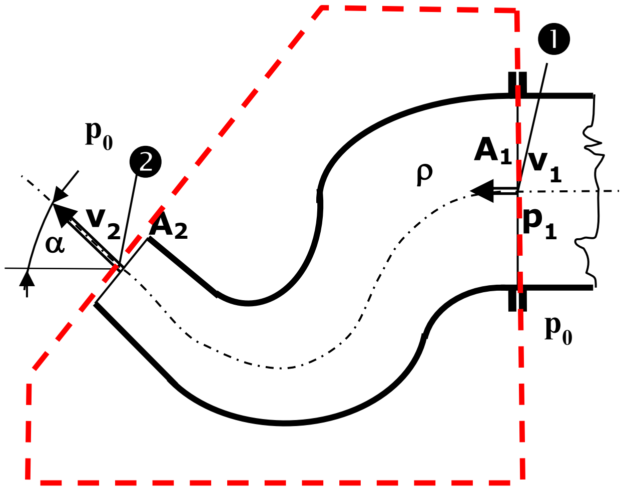
$$\rho_2 v_2^2 A_2 sin60° = -\int_{Ay} p d\underline{A} - R_y$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő y komponense: $-\int_{Ay} p d\underline{A} = 0$

A ható erő komponenseire fenti két komponensegyenlet rendezhető, majd *R* nagysága és iránya kiszámítható, felrajzolható.

B) PÉLDA (impulzustétel)

Egy, az áramlás irányában szűkülő, a p_0 nyomású szabadba nyíló S-alakú csővégi idomot mutat az ábra. A csövek „1” és „2” keresztmetszetbeli tengelyei egymással α=60° szöget zárnak be, és a vízszintes síkban fekszenek. Ismert a ρ=1000kg/m^3 sűrűségű víz „2” keresztmetszetbeli átlagsebessége: v_2=20m/s. **FELTÉTELEK**: μ=0; ρ=áll.; stacioner áramlás, a folyadékra ható súlyerő elhanyagolható.



ADATOK: ρ=1000kg/m^3; p_0=10^{5}Pa;
g=10N/kg; A_1=0,1m^2;
A_2=0,05m^2

KÉRDÉS: Határozza meg az idomra ható **R** erőt!

Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába az Ön által felvett koordináta-rendszert és az ellenőrző felületet! Ezek nélkül a megoldása nem értelmezhető!

MEGOLDÁS

Folytonosság tétele: $v_1 A_1 = v_2 A_2$, és $A_1/A_2=2$
A feltételek szerinti folytonosság tételt kihasználva v_2=20m/s alapján v_1=10m/s, és a stacioner esetre a Bernoulli–egyenletet felírva „1” és „2” pontok közötti áramvonalon a nyomáskülönbségre adódik p_1-p_0=150000 Pa.

Az $A_{e.f.}$ felvétele (lásd ábra), valamint (x←, y↑) irányítottságú koordinátarendszer felvétele az első lépés.
A nyomás az $A_{e.f.}$ –en mindenhol p_0, kivéve A_1 keresztmetszetet, ahol p_1 a nyomás. A sűrűség állandó, stb feltételek szerint az impulzustétel komponens egyenletei felírhatók:

Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete:

$$-\rho_1 v_1^2 A_1 + \rho_2 v_2^2 A_2 \cos 60° = -\int_{Ax} p d\underline{A} - R_x$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő x komponense: $-\int_{Ax} p d\underline{A} = -(-p_1 A_1 + p_0 A_1) = (p_1 - p_0) A_1$ =15kN
Ezzel $R_x = (p_1 - p_0)A_1 + \rho_1 v_1^2 A_1 - \rho_2 v_2^2 A_2 \cos 60° = 15kN + 10kN - 10kN = 15kN$ (Tehát a felvett $x \leftarrow$ iránnyal megegyező).
Az impulzustétel **y irányban** felírt komponensegyenlete:

$$\rho_2 v_2^2 A_2 \sin 60° = -\int_{Ay} p d\underline{A} - R_y$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő y komponense: $-\int_{Ay} p d\underline{A} = 0$
Ezzel $R_y = -\rho_2 v_2^2 A_2 \sin 60° = -17{,}321 kN$ (Tehát a felvett y↑ iránnyal ellenétes)

Az x és y komponensekkel $\underline{R}$ nagysága és iránya kiszámítható, felrajzolható.

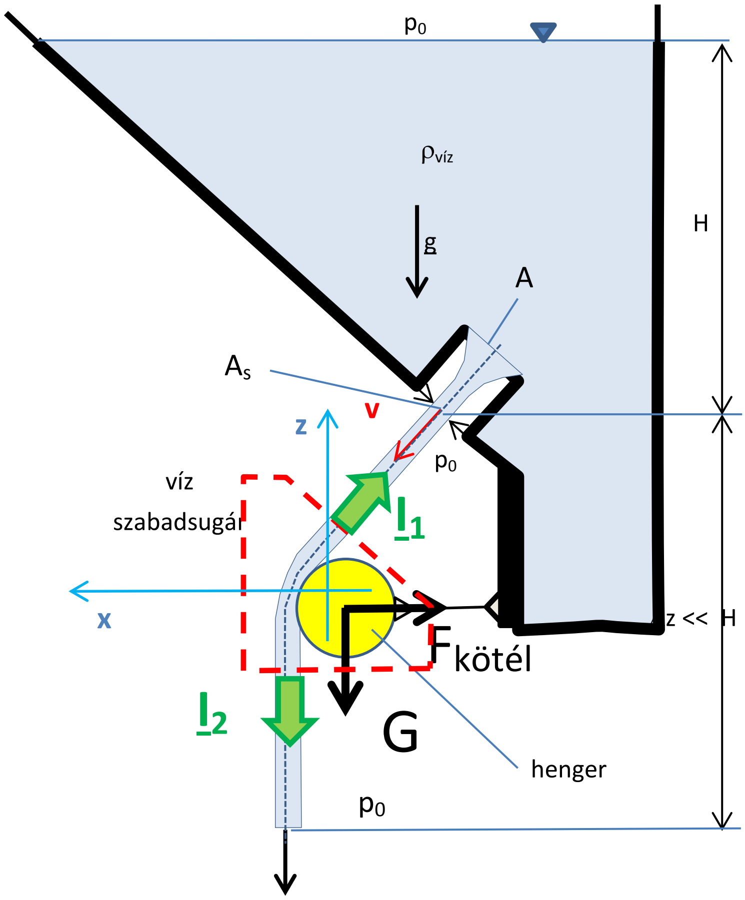
C) PÉLDA (impulzustétel)

Víz szabadsugár áramlik ki ferdén (a vízszinteshez képest 45°-ban) az ábrán látható szabadfelszínű, H=5m szinting vízzel töltött tartályon lévő 0,6 értékű kontrakciós tényezőjű Borda-féle kifolyónyílásból a szabadba. A Coanda-effektus miatt a szabadsugár a tartályhoz vízszintes kötéllel kikötött henger felszínén eltérül: a hengerről leáramló vízsugár pont függőlegesen lefelé halad tovább. A vízsugáron „lógó" ismeretlen G[N] súlyú henger az ábrán jelölt pozícióban egyensúlyban van: a tartály oldalához elhanyagolható súlyú kötéllel kikötve a kötél éppen vízszintes. **FELTÉTELEK:** stac. áll., ρ=áll., μ=0, a szabadsugárra a nehézségi erőtér hatása elhanyagolható (Δz<<H).

ADATOK: $A=0{,}01m^2$; $H=5m$; $g=10N/kg$; $p_0=10^5Pa$; $\rho_{víz}=1000kg/m^3$;

.

Határozza meg a hengerre ható erőt! **R**=? Mekkora súlyú hengert tart meg a vízsugár és mekkor a kötélerő?



Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába az Ön által felvett koordináta-rendszert és az ellenőrző felületet! Ezek nélkül a megoldása nem értelmezhető!

MEGOLDÁS

A szabadfelszínű tartályból egy Borda-féle kifolyónyíláson kiáramló víz kontrahált keresztmetszetbeli sebessége $v=\sqrt{2gH}=10m/s$ (Bernoulli-egyenlet vízfelszín egy pontja és a kontrahált keresztmetszetbeli pont között).
Mivel a feltételeink szerint a tartályon kívüli szabadsugárra a nehézségi erőtér hatása elhanyagolható (azaz H=5m értékhez képest Δz<<H), így a hengert körülvevő ellenőrző felületbe beáramló illetve abból kiáramló vízsugár sebesség is v=10m/s, hiszen a nyomás az ellenőrző felületen p_0 (szabadsugár!)
Az összenyomhatatlan közeg stacioner áramlása esetén érvényes folytonosság tétele (q_V=v A=állandó) szerint a hengert körülvevő ellenőrző felületbe beáramló illetve abból kiáramló vízsugár keresztmetszetek is azonosak a Borda-féle kifolyónyílás utáni A_s kontrahált vízsugár keresztmetszettel ($A_s=\alpha\cdot A=0{,}6\cdot 0{,}01m^2=0{,}006\ m^2$).
Fentiek alapján a hengert körülvevő ellenőrző felületbe beáramló illetve abból kiáramló vízsugár keresztmetszetek, a sebességek és az ellenőrző felületen a nyomás ismert.
Az (x←, y↑) irányítottságú koordinátarendszer felvétele az első lépés. Az $A_{e.f.}$ felvétele úgy célszerű, hogy ahol a vízsugár átáramlik rajta, legyen a felületi normális vektorral (d<u>A</u>) párhuzamos, lásd ábra. Jelenleg az egyik (y) tengely párhuzamos a kiáramlási sebességgel.
A nyomás az $A_{e.f.}$ –en mindenhol p_0, tehát nyomáskülönbségből nem származik folyadékra ható erő.
A sűrűség állandó, stb feltételek szerint az impulzustétel komponens-egyenletei felírhatók:
Az impulzustétel **<u>x irányban</u>** felírt komponensegyenlete az **<u>I</u>₁** és **<u>I</u>₂** impulzusáram vektorok x komponenseivel:

$$-(\rho_1 v_1^2 A_1)cos45° = -R_x$$

Ezzel $R_x=(\rho_1 v_1^2 A_1)cos45° = 1000\cdot 10^2\cdot 0{,}006\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=424{,}3N$

Tehát a felvett x ← iránnyal megegyező irányú a hengerre ható erő x komponense. Valamint $F_{kötél}=-R_x$

Az impulzustétel **<u>y irányban</u>** felírt komponensegyenlete:

$$(\rho_1 v_1^2 A_1)sin45° - (\rho_2 v_2^2 A_2) = -R_y$$

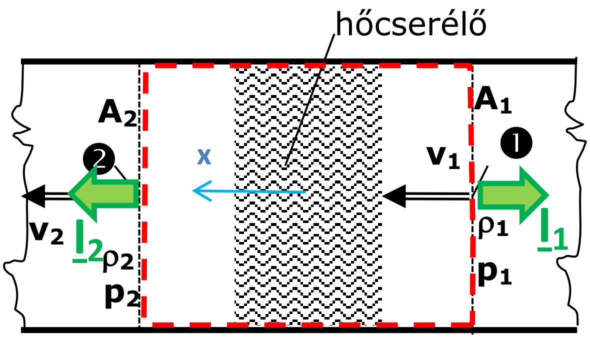
Ezzel $R_y=(\rho_2 v_2^2 A_2)-(\rho_1 v_1^2 A_1)sin45° = 1000\cdot 10^2\cdot 0{,}006\cdot(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=175{,}74N$

Tehát a felvett y↑ iránnyal megegyező irányú a hengerre ható erő y komponense. Valamint $G=-R_y$

Az x és y komponensekkel $\underline{R}$ nagysága és iránya kiszámítható, felrajzolható. $R=\sqrt{{R_x}^2+{R_y}^2}$

D) PÉLDA (impulzustétel)

Egy vízszintes tengelyű, A_1=A_2=2m^2 állandó keresztmetszetű hőcserélővel az „1” és „2” keresztmetszetek között az áramló ρ_1=0,8kg/m^3 sűrűségű forró füstgázt lehűtjük, mely következtében sűrűsége ρ_2=1,1kg/m^3 lesz. Ismert az „1 pontbeli v_1=20m/s áramlási átlagsebesség.



FELTÉTELEK: μ=0; stacioner állapot, a hőcserélőre ható erő és a folyadékra ható súlyerő elhanyagolható.

KÉRDÉS: Határozza meg az „1” ill. „2” keresztmetszetek közötti Δp_{12}=(p_1-p_2) nyomáskülönbség értékét! Δp_{12}=? [Pa]

Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába a felvett koordinátarendszert és az ellenőrző felületet! A példa megoldása ezek nélkül nem értelmezhető!

MEGOLDÁS

A Bernoulli-egyenlet elvi hiba lenne felírni „1” és „2” pontok között, hiszen nem elhanyagolható mértékben változik sűrűség!

Az összenyomható közeg stacioner áramlása esetén érvényes folytonosság tétele (q_m=ρ v A=állandó) alapján v_2 sebesség kiszámítható, hiszen v_1=20m/s ismert és ismertek a sűrűségek és keresztmetszetek. Mivel A_1=A_2, így $v_2=v_1\cdot\rho_1/\rho_2$.

A vízszintes tengely (z=áll., a súlyerő elhanyagolható) elegendő az impulzustételnek csak a tengely, azaz az x irányú komponens-egyenletét felírnunk, melyből a keresett nyomáskülönbség meghatározható, mivel a hőcserélőre ható R erő elhanyagolható.

Az ellenőrző felületbe beáramló illetve abból kiáramló sebességek ismertek, de a nyomás nem.

Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete az $\underline{I}_1$ és $\underline{I}_2$ impulzusáram vektorok x komponenseivel:

$$-(\rho_1 v_1^2 A_1) + (\rho_2 v_2^2 A_2) = -\int_{Ax} p d\underline{A}$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő x komponense: $-\int_{Ax} p d\underline{A} = -(-p_1 A_1 + p_2 A_2) = (p_1 - p_2) A_1$

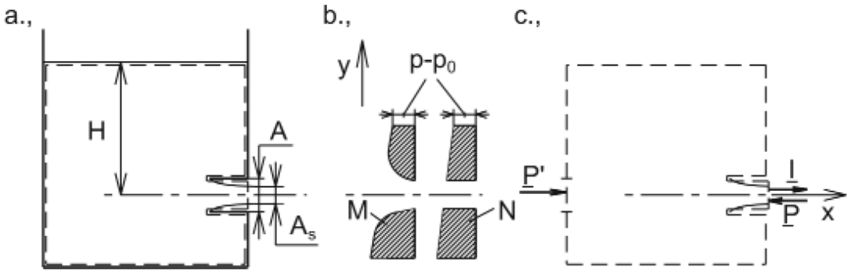
Ezzel az „1” ill. „2” keresztmetszetek közötti Δp_{12}=(p_1-p_2) nyomáskülönbség értéke számítható (folytonosság tételéből $v_2=v_1(\rho_1/\rho_2)$=20(0,8/1,2)=13,33m/s

Δp_{12}= (p_1-p_2) $= \rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2$ = 1,1·13,33^2-0,8·20^2 = - 124,4Pa

X) PÉLDA (Borda féle kifolyónyílás, lásd tankönyv 7.2.1.)

Előadáson elhangzó tananyag.

Lásd tankönyv: 7.2.1: A Borda-féle kifolyónyílás kontrakciós tényezőjének ($\alpha_S=A_S/A$) paraméteres levezetése impulzustétellel. (A Borda-féle kifolyásra az elméleti értékre $\alpha_{S,elm}=0{,}5$ kapunk, a gyakorlatban $\alpha_{S,gyak}\cong0{,}6$. A különféle kifolyónyílások kontrakciós tényezőjének gyakorlati értéke $0{,}6<\alpha<1$.

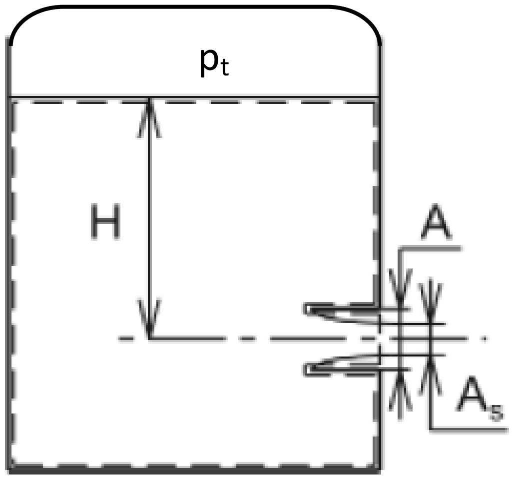


7.4. ábra
Borda-féle kifolyónyílás

X) PÉLDA (Borda féle kifolyónyílás)

Előadáson elhangzó tananyag.

Egy vízzel ($\rho=1000 kg/m^3$) teli p_t=2bar nyomású tartályból az $A=0{,}01m^2$ keresztmetszetű Borda-féle kifolyónyíláson ($\alpha_S=0{,}6$) keresztül víz áramlik ki a $p_0=10^5$Pa nyomású szabadba az ábrán látható módon. (g=10N/kg; $A_{tartály}>>A$) Az A_S kontrahált keresztmetszeten a víz sebessége ismert v_S=20m/s.



FELTÉTELEK: $\mu=0$; ρ=áll.; stacioner áramlás, a folyadékra ható súlyerő elhanyagolható.

KÉRDÉS: Határozza meg

a) a tartálybeli H vízoszlopmagasság értékét (H=?)

b) a kontrahált A_S keresztmetszet nagyságát (A=?)

c) és a vízsugár A keresztmetszetbeli átlagsebességet! (v=?)

d) a vízsugár tömegáramát! q_m=?

MEGOLDÁS *(a túloldalon is folytathatja)*

Bernoulli-egyenlet tartály vízfelszín és A_S kontrahált keresztmetszet között:

$$p_t + \rho \cdot g \cdot H = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot v_S^2$$

$$H = \frac{p_0 - p_t + \frac{\rho}{2} \cdot v_S^2}{\rho \cdot g} = 10m$$

Borda-féle kifolyónyílás kontrakciós tényezője: $a_S=A_S/A=0{,}6$; így $A_S=A\cdot0{,}6=0{,}006m^2$

Folytonosság tétele A és A_S között: $v = v_S \frac{A_S}{A} = v_S \cdot 0{,}6 = 12m/s$

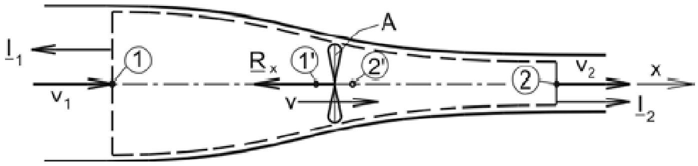
A tömegáram: $q_m = \rho\cdot v\cdot A=1000\cdot12\cdot0{,}01 = 120$ kg/s

X) PÉLDA (Légcsavar sugárelmélete, lásd tankönyv 7.4.2.)

Előadáson elhangzó tananyag.

ADATOK: Repülőgép sebessége 162km/h; ρ=1,2kg/m^3; 1db légcsavar A=1m^2; v_2=243km/h.

KÉRDÉSEK: Mekkora a légcsavar tolóerő és a propulziós hatásfok értéke?



7.11. ábra
Áramlás légcsavaron keresztül

Impulzustételből kapjuk R_x-et

$$R_x = \rho v_1^2 A_1 - \rho v_2^2 A_2.$$

Folytonosság tételét ($\rho \cdot v \cdot A = \rho \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho \cdot v_2 \cdot A_2$) felhasználva

$$\boxed{R_x = \rho\, v\, A\, (v_1 - v_2),}$$

A légcsavarra ható erő felírható így v-vel, ahol ($\rho \cdot v \cdot A$) a légcsavaron átáramló levegő tömegárama.
Bernoulli-egyenletekből kapjuk:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_{1'}^2}{2} + \frac{p_{1'}}{\rho}$$

$$\frac{v_{2'}^2}{2} + \frac{p_{2'}}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho},$$

Rendezve:

$$p_{1'} - p_{2'} = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2).$$

Légcsavarra ható erő $R_x = \Delta p \cdot A$:

$$\boxed{R_x = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) A}$$

Fentiek alapján az alábbi egyenlőségből:

$$\boxed{R_x = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) A = \rho v A (v_1 - v_2).}$$

kifejezhető a légcsavaron átáramló levegő átlagos sebessége, v:

$$\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{2}.}$$

Légcsavarra ható erő (R_x = -T, ahol T[N] a légcsavar tolóereje):

$$T = -R_x = \rho v A (v_2 - v_1)$$

Hasznos teljesítmény a repülő sebességével számolt P_h[W]:

$$P_h = v_1\, |R_x|.$$

A bevezetett teljesítmény a közeg légcsavaron átáramoltatásához szükséges teljesítmény P_{be}[W]::

$$P_{be} = v\, |R_x|.$$

Ezekkel definiálható a légcsavar ún. η_p propulziós hatásfoka:

$$\boxed{\eta_p = \frac{v_1 R}{v R} = \frac{v_1}{v} = \frac{2}{1 + v_2 / v_1}.}$$

MEGOLDÁS *(a túloldalon is folytathatja)*

A repülő sebessége: v_1=162km/h=162/3,6=45m/s

A légsugár sebessége: v_2=243km/h=243/3,6=67,5m/s

Légcsavaron átáramló levegő átlagos sebessége: $v = \frac{v_1+v_2}{2} = \frac{162/3{,}6+243/3{,}6}{2} = 56{,}25 m/s$

Tolóerő: T=-R_x=-ρvA(v_1-v_2)=-1,2·56,25·1· (45-67,5)=1518,75N

Propulziós hatásfok jelen légcsavarra: η_p=80%

X) PÉLDA (Szélturbina, lásd tankönyv 7.4.3.)

Előadáson elhangzó tananyag.

ADATOK: $v_{szél}$=36km/h; ρ=1,2kg/m^3. A szélturbina A keresztmetszetének átmérője D=40m.

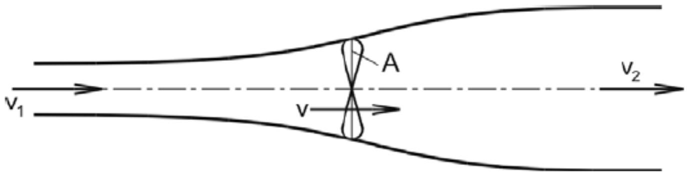
KÉRDÉSEK:

A) Mekkora a szélturbina P_{max} elméleti max. teljesítménye, és a P_h hasznos teljesítménye, ha minden egyéb veszteséget η=60% hatásfokkal veszünk figyelembe?

B) Mekkorára változik P_{max} értéke, ha a szélsebesség a felére csökken?

C) Mekkorára változik P_{max} értéke, ha a szélkerék átmérője kétszeres? D=80m

D) Mekkorák egy kisméretű, A=1m^2 szélturbinára a fenti A) és B) kérdésekben szereplő P_{max} teljesítmény értékek?



7.12. ábra
Áramlás a szélkeréken keresztül

A szélturbina teljesítménye ($P \sim v_1^3$) felírható:

$$P = \rho A \frac{v_1 + v_2}{2}\left(\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}\right)$$

Keressük a P maximumát v_2 függvényében ($\partial P/\partial v_2=0$). Ehhez a $\partial P/\partial v_2=0$ deriválást elvégezve kapjuk:

$$v_2 = \frac{1}{3} v_1$$

Tehát olyan szélturbinát kell alkalmaznunk, mely a rááramlás (szél)sebességét harmadára csökkenti. Behelyettesítve P fenti összefüggésébe ezt, a P_{max} maximális teljesítménye kapjuk:

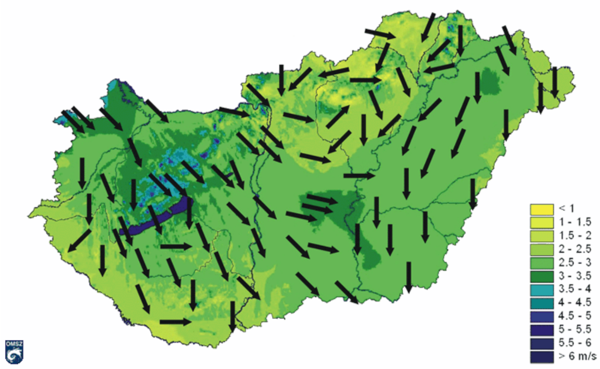
$$P_{max} = \frac{16}{27}\frac{\rho}{2} A v_1^3$$

A kifejezésben szereplő 16/27 érték (~59%) az ún. Betz-limit, amely az az elméleti határérték, amely kifejezi, hogy a szél másodpercenkénti mozgási energiájának még veszteségmentes esetben is csak az 59%-át lehet mechanikai energiává alakítani.

E) Telepítünk egy összesen 200.000.-Ft költségű A=1m^2 szélkereket a háztetőnkre. Hány év az elméleti megtérülési idő, ha egész évben jó irányból fúj a $v_{átlag}$=2,5m/s értékű átlagos szélsebesség, valamint Á = 12,50 Ft/kWh átvételi árral számolunk? (Itt is felvehetünk egy η=60% értéket.)

Megjegyzés: „Hazánkban országos átlagban évente 122 szeles nap fordul elő (vagyis amikor a szél legerősebb lökésének sebessége eléri vagy meghaladja a 10 m/s-t), és ‚ezek közül 35 nap viharos (vagyis ennyi alkalommal nagyobb a széllökés 15 m/s-nál is)"

Forrás: https://www.met.hu/eghajlat/magyarorszag_eghajlata/altalanos_eghajlati_jellemzes/szel/



Az évi átlagos szélsebességek [m/s] és az uralkodó szélirányok Magyarországon (2000-2009)

EGYEBEK: http://magyarenergetika.hu/wp-content/uploads/energia_muhely_dok/12_Kircsi_Toth_MET20170928.pdf

MEGOLDÁS *(a túloldalon is folytathatja)*

ADATOK: $v_{szél}$=36km/h; ρ=1,2kg/m^3. A szélturbina A keresztmetszetének átmérője D=40m.
KÉRDÉSEKRE VÁLASZOK:

A) Mekkora a szélturbina P_{max} elméleti max. teljesítménye, és a P_h hasznos teljesítménye, ha minden egyéb veszteséget η=60% hatásfokkal veszünk figyelembe?

$$P_{max} = \frac{16}{27}\frac{\rho}{2}Av^3 = \frac{16}{54}\cdot 1{,}2\cdot A\cdot 10^3 = 446\,804\ W \cong 447\ kW$$
$$P_h = \eta P_{max} = 0{,}6\cdot 446804\ W \cong 268\,083\ \mathrm{W} = 268\ kW$$

B) Mekkorára változik P_{max} értéke, ha a szélsebesség a felére csökken?
$P'_{max}=(v'/v)^3\cdot P_{max} = 0{,}5^3\cdot P_{max} = 0{,}125\cdot P_{max}$ = 55,85 kW

C) Mekkorára változik P_{max} értéke, ha a szélkerék átmérője kétszeres? D'=80m
$P''_{max}=(D'/D)^2\cdot P_{max} = 2^2\cdot P_{max} = 4\cdot P_{max}$ = 1 787 217 W = 1,787 MW

D) Egy kisméretű, A'=1m^2 szélturbinára mekkorák a fenti A) és B) kérdésekben szereplő P_{max} teljesítmény értékek?
Az eredeti D=40m szélturbinára A=D^{2}π/4=1256,637 m^2=1257 m^2
Tehát 1257-ed részére csökkennek az értékek:
$P'''_{max}= (A'/A)\cdot P_{max} = (1m^2/1257\ m^2)\cdot P_{max}$

Ezzel az A) és B) kérdésekre a válaszok:

D/A) P'''_{max}= 447kW / 1257 = 355 W
$P'''_h= 0{,}6\cdot P'_{max}$ = 213 W

D/B) P'''_{max}= 55,85kW /1257 = 44,4 W
$P'''_h= 0{,}6\cdot P'_{max}$ = 27 W

E) Telepítünk egy összesen 200.000.-Ft költségű A=1m^2 szélkereket a háztetőnkre. Hány év az elméleti megtérülési idő, ha egész évben jó irányból fúj a $v_{átlag}$=2,5m/s értékű átlagos szélsebesség, valamint Á = 12,50 Ft/kWh átvételi árral számolunk? (Itt is felvehetünk egy η=60% értéket.)

$$P_{max} = \frac{16}{27}\frac{\rho}{2}Av^3 = \frac{16}{27}\cdot 1{,}2/2\cdot 1\cdot 2{,}5^3 = 5{,}55\ W$$
$$P_h = \eta\cdot P_{max} = 0{,}6\cdot 5{,}55\ W \cong 3{,}33\ \mathrm{W}\ (= 3{,}33\cdot 10^{-3}\mathrm{kW})$$

E)Megoldása:
A haszon évente: H=(3,33·10^{-3}kW · 12,50Ft/kWh · 8760h/év)= 365.-Ft/év
É=(költség)/(haszon/év)= (200.000,-Ft)/(365.-Ft/év) = 548 év
Még 2 x átlagos szélsebesség (5m/s) esetén is É=68 év.
Még 4 x átlagos szélsebesség (10m/s) esetén is É=8,6 év.