Übung Strömungslehre

03.04.2020

Konsultation möglich über Skype: Dr. Márton Balczó (Benutzername: pilgrim888)

oder Fragen können auch über Moodle (https://mikrobi.ara.bme.hu/moodle/) gestellt werden.

10.15-11.45

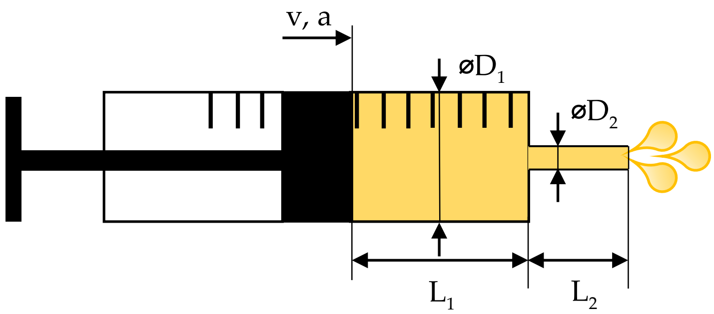
Instationäre Bernoulli-Gleichung

FECSKENDŐ

Egy vízzel töltött fecskendő dugattyúja v sebességgel és a gyorsulással mozog az ábrán jelölt irányba.

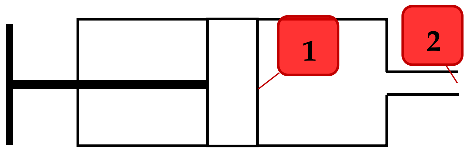
Kérdés: Határozza meg a mozgatáshoz szükséges erőt!

Adatok: v = 0.4 m/s; a = 1 m/s²; D_1 = 50 mm; L_1 = 200 mm; D_2 = 10 mm; L_2 = 80 mm; ϱ = 1000 kg/m³



MEGOLDÁS

Írjuk fel az instacioner Bernoulli-egyenletet az alábbi ábrán jelölt 1-2 pontok közé:



$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = \rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

- a gyorsulás iránya 1 → 2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_1 - U_2 = g \cdot (z_1 - z_2) = 0$
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik. Hirtelen keresztmetszetváltozás esetén a gyorsulásnak szakadása van, ott az integrálást ketté kell bontani.

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = a_1 L_1 + a_2 L_2$$

A kontinuitást felhasználva a sebességre és a gyorsulásra:

$$v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \qquad a_2 = a_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

A dugattyú két oldalán fellépő nyomáskülönbség kiadódik:

$$p_1 - p_0 = \rho \cdot \left[a_1 \cdot \left(L_1 + L_2 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right) + \frac{v_1^2}{2} \cdot \left(\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right)\right]$$

$$= 1000 \cdot \left[1 \cdot \left(0{,}2 + 0{,}08 \cdot \left(\frac{50}{10}\right)^2\right) + \frac{0{,}4^2}{2} \cdot \left(\left(\frac{50}{10}\right)^4 - 1\right)\right] = 52120\ Pa$$

Amelyből a kifejtendő erő nagysága számolható:

$$\boldsymbol{F} = A_1 \cdot (p_1 - p_0) = \frac{0{,}05^2 \pi}{4} \cdot 52120 = \mathbf{102.3\ N}$$

Impulssatz

Einführung

Impulzus-tétel (Newton II. törvénye integrál alakban):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \cdot \underline{v} \cdot dV + \int \underline{v} \cdot \rho \cdot \underline{v} \cdot \underline{dA} = \int \rho \cdot \underline{g} \cdot dV - \int p \cdot \underline{dA} - \underline{R} + \underline{S}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{dA} = dq_V; \rho \cdot dq_V = dq_m \rightarrow \int \underline{v} \cdot \rho \cdot \underline{v} \cdot \underline{dA} = \int \underline{v} \cdot dq_m$$

Megoldás menete:

I) Bernoulli-egyenlet, kontinuitási egyenlet

II) legyen stacionárius az eset vagy tegyük azzá a vonatkoztatási rendszer jó megválasztásával: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

III) Ellenőrzőfelület: a szilárd test legyen benne, (legyen merőleges az átáramlásra)

IV) Hanyagoljuk el a súrlódást: $\underline{S} = 0$

V) Ha $\underline{v}_i$ merőleges A_i-re, akkor $\int_{A_i} \underline{v} \cdot \rho \cdot \underline{v} \cdot \underline{dA} = \underline{I_i} = v_i^2 \cdot \rho_i \cdot \underline{A}_i$ → merőleges a felületre és kifelé mutat a felületből.
Általánosan: $\int_{A_i} \underline{v} \cdot \rho \cdot \underline{v} \cdot \underline{dA} = \underline{I_i} = \underline{v}_i \cdot q_{m,i}$
Így látható, hogy ez az időegység alatt átáramló impulzusmennyiség. (Vegyük figyelembe, hogy a tömegáram akkor pozitív, ha kiáramlás van. tehát ha beáramlik a folyadék, akkor ellentétes lesz a sebesség irányával, ha kiáramlik, akkor pedig megegyezik azzal.)

VI) Hanyagoljuk el $\underline{g}$-t, ha lehet.

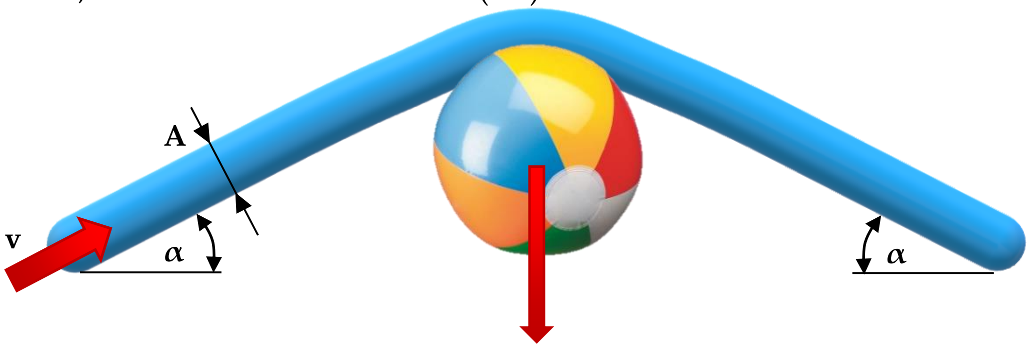
VII) $-\int_{A_i} p \cdot \underline{dA} = \underline{P_i} = -p_i \cdot \underline{A}_i$, mindig merőleges a felületre és befelé mutat. Ha a nyomás mindenhol azonos az ellenőrző felületen, akkor $\sum \underline{P} = 0$.

Ezen feltételek teljesülése esetén az impulzustétel az alábbi alakban írható fel:

$$\sum \underline{I}_\mathrm{i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$$

LABDÁN ELHAJLÓ VÍZSUGÁR

Az ábrán látható balról érkező víz szabadsugár a Coanda-effektus révén hozzátapad a labda felületéhez és azon 2α szöggel eltérül. Az áramvonalak görbültsége miatt a vízsugár és a labda érintkezésénél a nyomás a környezeti nyomáshoz képest lecsökken, melynek következtében a labdára felfelé ható erő ébred. Megfelelő paraméterek esetén ez az erő a labda súlyát képes kompenzálni. A feladat egyszerűsítése érdekében a súrlódástól és a vízsugárra ható gravitációtól eltekintünk, az áramlást síkáramlásnak (2D) feltételezzük.



Kérdés: Mekkora súlyú labdát tud megtartani a vízsugár?

Adatok: v_1=10m/s; ϱ=1000kg/m^3; A=10cm^2; α=15°

MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások: a következőkben bemutatott alapelveket célszerű minden impulzus-tétellel megoldani kívánt feladatra alkalmazni.

Az impulzustétel általános alakja a következőképpen írható fel:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \cdot \underline{v} \cdot dV}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int \underline{v} \cdot \rho \cdot v \cdot \underline{dA}}_{\mathrm{II}} = \underbrace{\int \rho \cdot \underline{g} \cdot dV}_{\mathrm{II}} - \underbrace{\int p \cdot \underline{dA}}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\underline{R}}_{\mathrm{V}} + \underbrace{\underline{S}}_{\mathrm{V}}$$

, ahol I az eredő mozgásmennyiség lokális megváltozása (instacionárius tag), II az impulzus-áram, III a térerősségből származó erő, IV a nyomásból származó erő, V az áramlásban lévő szilárd testre ható erő, VI pedig a súrlódásból származó erő. A következő megfontolásokkal élve az impulzus-tétel jelentősen egyszerűbb alakra hozható:

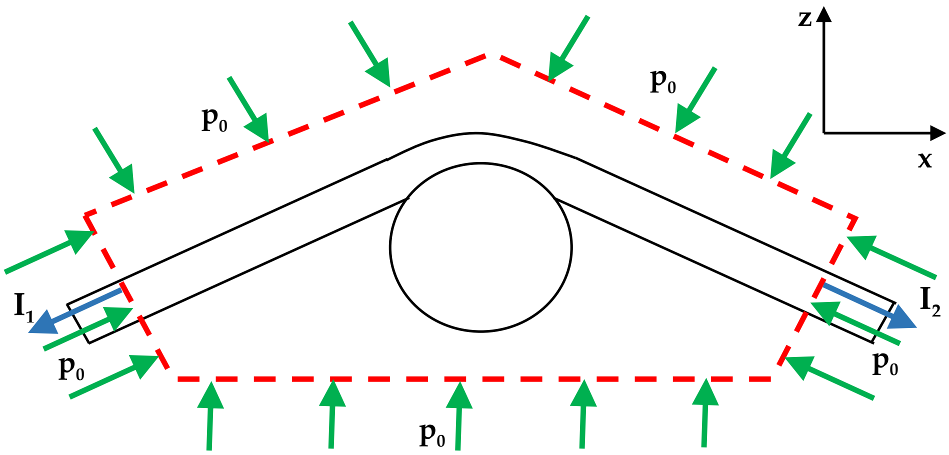
1. Stacionárius az áramlás vagy azzá tudjuk tenni pl. együtt mozgó koordináta-rendszerből vizsgálva a feladatot? Ha igen, *I. tag = 0*. Az ügyesen megválasztott koordináta-rendszert tüntessük fel az ábrán.
2. Rajzoljuk be az ábrába az ellenőrző felületet: (1) ha testre ható erőt keresünk, legyen benne a test (*V. tag*), (2) ahol az ellenőrző felületen keresztül átáramlás van, ott a felület legyen merőleges az átáramlásra.
3. Rajzoljuk be az ábrába az impulzusáram-vektorokat (*II. tag*), melyek
   - nagysága: $I = q_m v = \rho v^2 A$
   - iránya: párhuzamos $\underline{v}$-vel
   - irányítottsága: a zárt ellenőrző felületből mindig **kifelé** mutat

4. Rajzoljuk be az ábrába az nyomásból származó erővektorokat (*IV. tag*), melyek
   - nagysága: $P = pA$
   - iránya: merőleges a felületre
   - irányítottsága: a zárt ellenőrző felületbe mindig **befelé** mutat
5. Vizsgáljuk meg, hogy eltekinthetünk-e a súrlódás hatásától (*VI. tag*)
6. Írjuk fel az impulzus-tételből származó komponens-egyenleteket x, y és z irányba.
7. Ne feledjük, hogy a kontinuitás és a Bernoulli-egyenlet továbbra is jó szolgálatot tehetnek a feladat megoldása során.

Az impulzustétel egyszerűsített formája súrlódásmentes, stacioner esetre a térerő elhanyagolásával a következő alakot ölti:

$$\sum \underline{I} = \sum \underline{P} - \underline{R}$$

Az alábbi ábrán pirossal jelöltük az ellenőrző felületet, kékkel az impulzus-áram vektorokat és zölddel a nyomásvektorokat, valamint feltüntettük a feladatmegoldáshoz használt koordináta-rendszert.



Bernoulli egyenlet az 1 belépő és a 2 kilépő keresztmetszet között:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

- $U_1 \cong U_2$
- $p_1 = p_2 = p_0 \leftarrow$ mert szabad áramlás, és az áramvonalak párhuzamos egyenesek az átáramlási keresztmetszetekben

Ebből következően a sugárban a sebesség állandó:
$v_1 = v_2 = v$

Kontinuitási egyenlet, a belépő és kilépő tömegáram azonos, a víz sűrűsége állandónak tekinthető:
$q_{m,1} = q_{m,2} = q_m;\ \rho = const. \rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$

A Bernoulli-egyenletből láttuk, hogy $v_1 = v_2$, hiszen a nyomás és a potenciál azonos, ezért a vízsugár belépő és kilépő keresztmetszete azonos:
$A_1 = A_2 = A$

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, a súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:
$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$

A nyomás az ellenőrző felületen mindenhol légköri (szabadsugár): $\sum \underline{P} = 0$

Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:
$|\underline{I_1}| = q_{m,1} \cdot v_1 = q_m \cdot v$

$I_{1,x} = -q_m \cdot v_{1,x} = -q_m \cdot v \cdot cos\alpha$

$I_{1,y} = 0$

$I_{1,z} = -q_m \cdot v_{1,y} = -q_m \cdot v \cdot sin\alpha$

Az impulzusáram az 2-es keresztmetszetben:
$|\underline{I_2}| = q_{m,2} \cdot v_2 = q_m \cdot v$

$I_{2,x} = q_m \cdot v_{2,x} = q_m \cdot v \cdot cos\alpha$

$I_{2,y} = 0$

$I_{2,z} = q_m \cdot v_{2,y} = -q_m \cdot v \cdot sin\alpha$

Komponens egyenletek:

- x-irány:

$$I_{1,x} + I_{2,x} = -R_x$$

$$R_x = q_m \cdot v \cdot cos\alpha - q_m \cdot v \cdot cos\alpha = 0$$

- y-irány: abban az irányban nincsenek vektorkomponensek
- z-irány:

$$I_{1,z} + I_{2,z} = -R_z$$

$$-R_z = -q_m \cdot v \cdot sin\alpha - q_m \cdot v \cdot sin\alpha = -2 \cdot q_m \cdot v \cdot sin\alpha =$$

$$= -2 \cdot \rho v^2 A \cdot \sin\alpha = -2 \cdot 1000 \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot \sin 15° = -\,51N$$

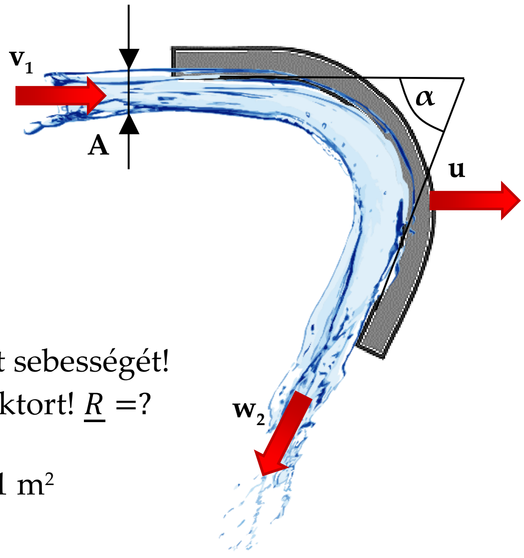
Mivel a labda egyensúlyban van, a rá ható erők eredője 0, tehát $-R_z$ meg fog egyezni a labda súlyával:

$$\underline{\boldsymbol{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-51} \end{bmatrix} \boldsymbol{N}$$

Érdekesség, hogy mivel a labda tetején görbült az áramvonal, itt radiális irányban nyomásgradiens alakul ki, azaz a labda vízsugárral érintkező felszínén légköri alatti nyomáseloszlás lesz. Mivel a labda alján a nyomáseloszlás légköri, a nyomáskülönbség fent tartja a sugárban a labdát!

MOZGÓ TERELŐLAPRA HATÓ ERŐ

A mellékelt ábrán látható ívelt lapát u=13m/s sebességgel mozog a vízszintes síkban. A lapátra víz szabadsugár áramlik v_1=$30m/s$ sebességgel.
A súrlódásból és a folyadék tömegére térerősségből származó erő elhanyagolható.



Kérdés: a) Határozza meg a kiáramlás abszolút sebességét!
b) Határozza meg a lapátra ható erővektort! $\underline{R}$ =?

Adatok: α = 60°; v_1 = 13 m/s; u = 13 m/s; A = 0,01 m^2
ϱ = 1000 kg/m^3; p_0 = 10^5 Pa

MEGOLDÁS

a) feladatrész:

A feladat stacionáriussá tétele érdekében a problémát a lapáttal együtt mozgó koordináta-rendszerből vizsgáljuk.

Bernoulli-egyenlet együtt mozgó koordináta-rendszerben a belépés (1) és kilépés (2) egy pontja között:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 = p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot w_2^2$$

- $p_1 = p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár
- $U_1 = U_2 \leftarrow$ vízszintes

Ebből következően a relatív rendszerben felírt belépő és kilépő sebesség nagysága megegyező, értéke az abszolút sebesség és a szállítósebeség különbsége:

$$w_1 = w_2 = v_1 - u = 17\frac{m}{s}$$

A kilépő abszolút sebesség a kilépő relatív sebesség és a szállító sebességösszege:

$$\underline{v_2} = \underline{w_2} + \underline{u} = \begin{bmatrix} w_{2x} \\ w_{2y} \\ w_{2z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_2 \cdot \cos 60° \\ -w_2 \cdot \sin 60° \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \cdot \cos 60° \\ -17 \cdot \sin 60° \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4{,}5 \\ -14{,}7 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

$$|\underline{v_2}| = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 14{,}7^2} = \mathbf{15{,}4}\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$$

b) feladatrész

A **kontinuitás**i és a **Bernoulli-egyenlet** alapján a korábbi feladatokban bemutatott módon levezethető a belépő és kilépő keresztmetszetek azonossága:

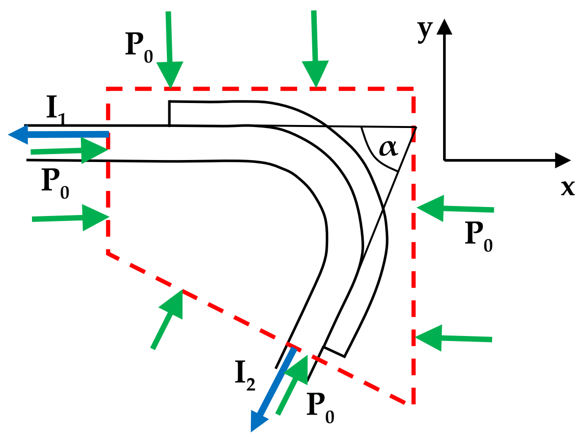
$$q_{m,1} = q_{m,2} = q_m$$

$$\rho = const., w_1 = w_2 = w$$

$$\rightarrow A_1 = A_2 = A$$

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$$



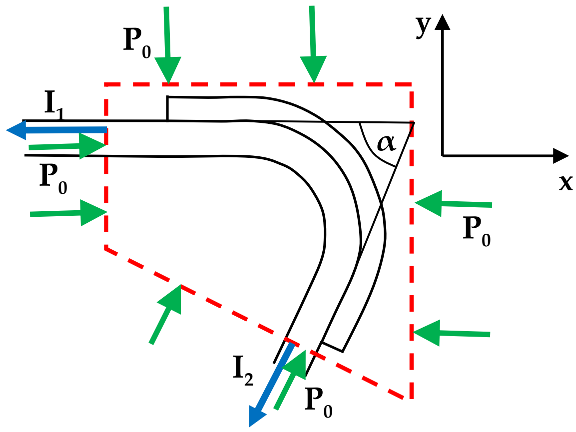
A nyomás az ellenőrző felületen mindenhol légköri: $\sum \underline{P} = 0$

Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:
$|\underline{I_1}| = q_{m,1} \cdot w_1 = q_m \cdot w$

$I_{1,x} = -q_m \cdot w_{1,x} = -q_m \cdot w$

$I_{1,y} = 0$

$I_{1,z} = 0$



Az impulzusáram az 2-es keresztmetszetben:
$|\underline{I_2}| = q_{m,2} \cdot w_2 = q_m \cdot w$

$I_{2,x} = q_{m,2} \cdot w_{2,x} = -q_m \cdot w \cdot cos\alpha$

$I_{2,y} = q_{m,2} \cdot w_{2,y} = -q_m \cdot w \cdot sin\alpha$

$I_{2,z} = 0$

Komponens egyenletek:

- x-irány:

$$I_{1,x} + I_{2,x} = -R_x$$

$$R_x = q_m \cdot w + q_m \cdot w \cdot cos\alpha = \rho w^2 A \cdot (1 + cos\alpha) =$$

$$= 1000 \cdot 17^2 \cdot 0{,}01 \cdot (1 + 0{,}5) = \mathbf{4335}\boldsymbol{N}$$

- y-irány:

$$I_{1,y} + I_{2,y} = -R_y$$

$$R_y = 0 + q_m \cdot w \cdot sin\alpha = \rho w^2 A \cdot \sin 60° = 1000 \cdot 17^2 \cdot 0{,}01 \cdot \sin 60° =$$

$\mathbf{2503}\boldsymbol{N}$

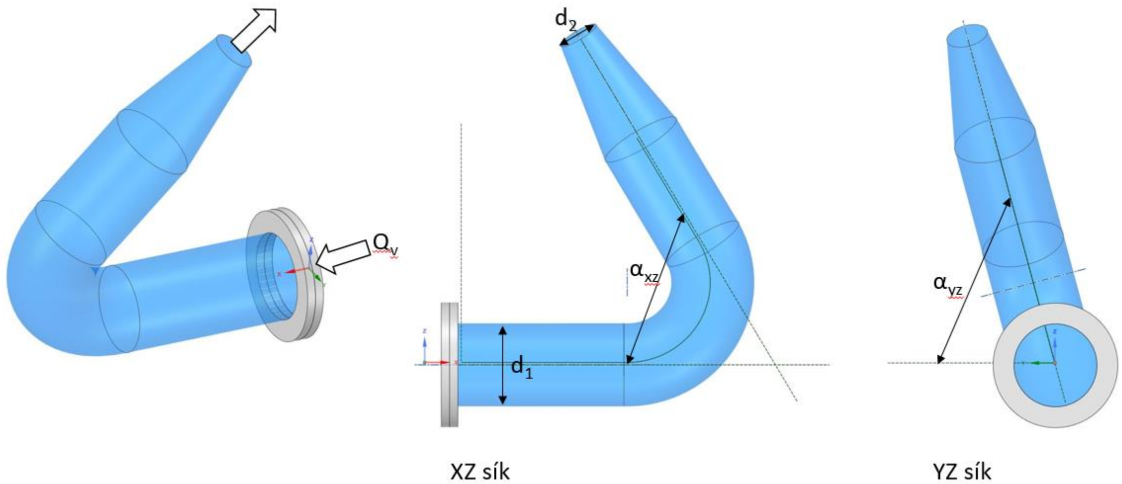
- z-irány: abban az irányban nem történik semmi

A lapátra ható erővektor tehát:

$$\underline{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{4335} \\ \mathbf{2503} \end{bmatrix} \boldsymbol{N}$$

CSŐKÖNYÖKRE HATÓ ERŐ

Levegő áramlik ki az ábrán látható, α_{xz} szögben meghajlított és az x tengely körül α_{yz} szöggel elforgatott csőkönyökből a p_0 nyomású szabadba.



Kérdés: a) Határozza meg a (p_1-p_0) nyomáskülönbséget! (A magasságkülönbségből adódó nyomásváltozás elhanyagolható.)

b) Határozza meg a karimakötésre ható **R** erőt! (**R**$_x$, **R**$_y$, **R**$_y$)

Adatok: $v_1 = 20$ m/s; $\varrho_{lev} = 1{,}2$ kg/m^3; $d_1 = 100$ mm; $d_2 = 50$ mm; $\alpha_{xz} = 60°$; $\alpha_{yz} = 60°$

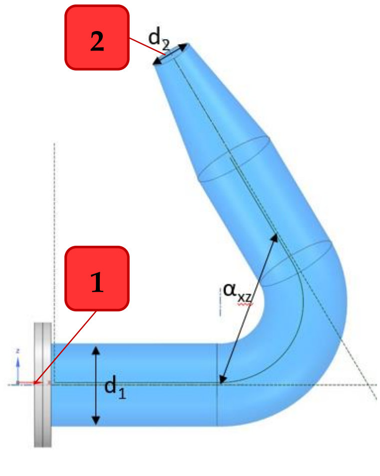
MEGOLDÁS

a) feladatrész

Írjuk fel a Bernoulli-egyenletet a beáramlás (1) és a kiáramlás (2) közé:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

- $U_1 \cong U_2 \leftarrow$ a különbség elhanyagolható
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár
- $v_2 = v_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = 80\frac{m}{s} \leftarrow$ kontinuitás, a sűrűség változása elhanyagolhatóan kicsiny



XZ sík

Fentiek alapján a keresett nyomáskülönbség:

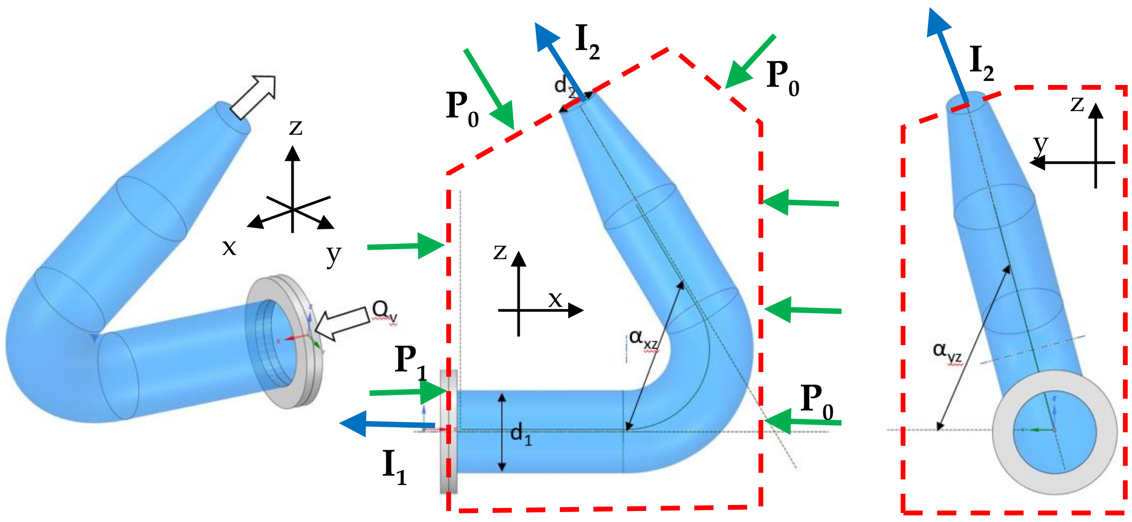
$$p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1{,}2}{2}(80^2 - 20^2) = \boldsymbol{3600Pa}$$

b) feladatrész

Rajzoljuk be az ábrába az ellenőrző felületet valamint az impulzusáram- és nyomás-vektorokat!

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$$



XZ sík YZ sík

A nyomás csak az 1-es felületen nem légköri, ezért csak ott lesz nyomásból származó erő:

$$|\sum \underline{P}| = (p_1 - p_0) \cdot A_1$$

Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:

$$|\underline{I_1}| = q_{m,1} \cdot v_1 = q_m \cdot v_1$$
$$I_{1,x} = -q_m \cdot v_{1,x} = -q_m \cdot v_1$$

$I_{1,y} = 0$
$I_{1,z} = 0$

Az impulzusáram az 2-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_2| = q_{m,2} \cdot v_2 = q_m \cdot v_2$
$I_{2,x} = q_m \cdot v_{2,x} = -q_m \cdot v_2 \cdot cos\alpha_{xz}$
$I_{2,y} = q_m \cdot v_{2,y}$=$q_m \cdot v_2 \cdot sin\alpha_{xz} \cdot cos\alpha_{yz}$
$I_{2,z} = q_m \cdot v_{2,z}$=$q_m \cdot v_2 \cdot sin\alpha_{xz} \cdot sin\alpha_{yz}$

A tömegáram: $q_m = A_1 \cdot \rho \cdot v_1 = 0{,}188 \frac{kg}{s}$

Komponens egyenletek:
- x-irány:

$I_{1,x} + I_{2,x} = |\sum \underline{P}| - R_x$
$R_x = q_m \cdot v_1 + q_m \cdot v_2 \cdot cos\alpha_{xz} + (p_1 - p_0) \cdot A_1 =$

$$0{,}188 \cdot 20 + 0{,}188 \cdot 80 \cdot \cos 60° + 3600 \cdot \frac{0{,}1^2\pi}{4} = 39{,}58\ N$$

- y-irány:

$I_{1,y} + I_{2,y} = -R_y$
$R_y = 0 - q_m \cdot v_2 \cdot sin\alpha_{xz} \cdot cos\alpha_{yz} = -0{,}188 \cdot 80 \cdot \sin 60° \cdot \cos 60° =$
$-6.53\ N$

- z-irány:

$I_{1,z} + I_{2,z} = -R_z$
$R_z = 0 - q_m \cdot v_2 \cdot sin\alpha_{xz} \cdot sin\alpha_{yz} = -0{,}188 \cdot 80 \cdot \sin 60° \cdot \sin 60° =$
$-11.31\ N$

$$\boldsymbol{R} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{39{,}58^2 + 6{,}53^2 + 11{,}31^2} = \boldsymbol{41{,}7\ N}$$