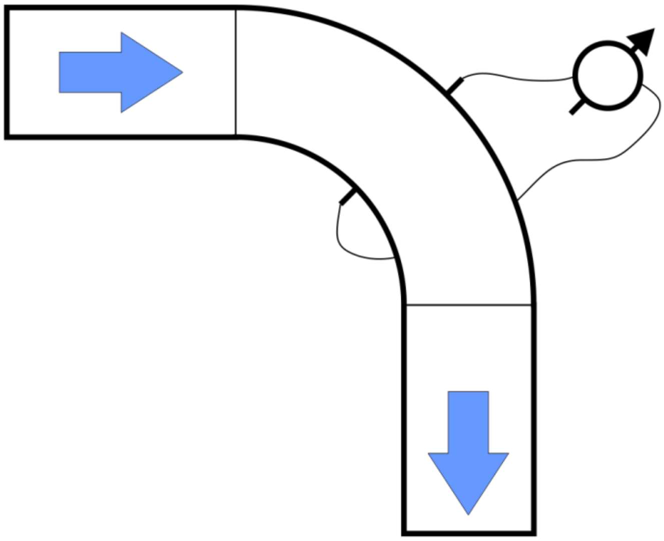
CSŐÍV	
Egy vízszintes síkban vezetett 100 x 100 mm oldalhosszúságú, négyzet keresztmetszetű csővezetékbe egy derékszögű csőívet építünk be. A belső és külső negyed körívek sugara 0,1 ill. 0,2 m. Az áramló közeg sűrűsége 1,2 kg/m^3. A nyomáskülönbség a csőív külső és belső falán 240Pa.	
Kérdés:	Határozzuk meg az áramló közeg térfogatáramát!
Adatok:	A = 100 x 100mm; r_1 = 0,1m; r_2 = 0,2 m; $p_2 - p_1$ = 240Pa; $\rho_{levegő}$ = 1,2kg/m^3



A térfogatáram kiszámítása két megoldással is lehetséges:

MEGOLDÁS 1. – EULER-EGYENLET

Kezdeti megfontolások:

- a könyök külső és belső oldalán kialakuló nyomáskülönbség jól magyarázható az Euler-egyenlet normál irányú komponens-egyenletével: görbült áramvonalak esetén (mint amilyen a csőkönyökben is kialakul) a nyomás a görbületi középponttól kifele haladva nő → tehát a csőkönyök külső oldalán mérünk nagyobb nyomást
- az Euler-egyenletet csak súrlódásmentes áramlások leírására használhatjuk → jelen esetben a súrlódástól eltekinthetünk, mivel a csőívben csak rövid szakaszon súrlódik a folyadék az álló fallal, az így keletkező veszteség csekély, elhanyagolható
- a csőkönyök vízszintes síkban fekszik, így a nehézségi térerő hatása elhanyagolható

Az Euler-egyenlet normál irányú komponense:

$$-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial n}+g_n=-\frac{v^2}{R}$$

- $\frac{\partial p}{\partial n}\cong\frac{p_2-p_1}{r_2-r_1}$
- $R=\frac{r_1+r_2}{2}=0.15\,m \leftarrow$ az áramvonalak görbületi sugarát a külső és belső ív átlagával közelítjük
- $g_n=0 \leftarrow$ a csőkönyök vízszintes síkban van

Ebből a csőben kialakuló középsebesség számolható:

$$v=\sqrt{\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}=\sqrt{\frac{(r_1+r_2)}{2\rho}\frac{p_2-p_1}{r_2-r_1}}=\sqrt{\frac{(0{,}1+0{,}2)}{2\cdot 1{,}2}\frac{240}{0{,}2-0{,}1}}=17{,}32\,\frac{m}{s}$$

A kialakuló térfogatáram:

$$\boldsymbol{q_v}=v\cdot A=17{,}32\cdot 0{,}1^2=\mathbf{0{,}1732}\,\frac{\boldsymbol{m^3}}{\boldsymbol{s}}$$

MEGOLDÁS 2. – BERNOULLI-EGYENLET

Kezdeti megfontolások:

- a csőkönyökben kialakuló áramkép hasonló egy szabad örvény forgatagához, melyben a folyadékrészek az örvény tengelye körül koncentrikus körökben haladnak
- a potenciálos örvény feltételezése jó közelítést jelent, mert a Thomson-tétel értelmében súrlódásmentes áramlások esetén a cirkuláció időben állandó → mivel nyugvó levegőből szívunk (aminek cirkulációja nulla), ezért a csőkönyökben áramló levegő cirkulációja is jó közelítéssel nulla lesz

- a potenciálos örvénysebessége leírható egy konstans és a sugár hányadosával: $v = \frac{K}{r}$
- a potenciálos örvényben a folyadékrészek nem forognak, így a Bernoulli-egyenlet egyszerűsíthető: $\int_1^2 \underline{v} \times rot\underline{v} \cdot d\underline{s} = 0$

Bernoulli-egyenlet a csőkönyök belső (1) és külső (2) pontja közé:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

- $U_1 = U_2 \leftarrow z = áll.$
- $v_1 = \frac{K}{r_1};\ v_2 = \frac{K}{r_2} \leftarrow$ potenciálos örvény

Az ismert adatokból a K konstans számítható:

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} K^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) \rightarrow K = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 240}{1{,}2\left(\frac{1}{0{,}1^2} - \frac{1}{0{,}2^2}\right)}} = 2{,}31 \frac{m^2}{s}$$

A csőkönyök belső és külső oldalán kialakuló sebességek:

$$v_1 = \frac{K}{r_1} = \frac{2{,}31}{0{,}1} = 23{,}1 \frac{m}{s} \qquad v_2 = \frac{K}{r_2} = \frac{2{,}31}{0{,}2} = 11{,}55 \frac{m}{s}$$

A csőkönyökben kialakuló átlagsebességet a belső és külső ívben kialakuló sebességek számtani középével számolva

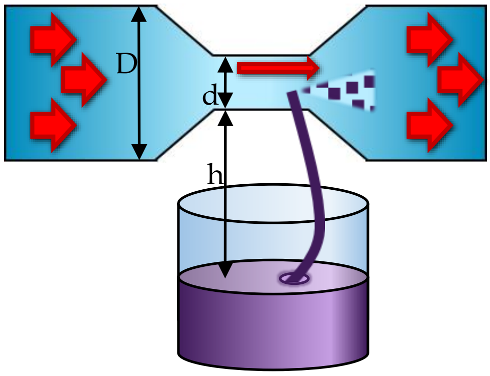
$$\overline{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{23{,}1 + 11{,}5}{2} = \mathbf{17{,}32} \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$$

a térfogatáram:

$$\boldsymbol{q_v} = \overline{v} \cdot A = 17.32 \cdot 0{,}1^2 = \mathbf{0{,}1732} \frac{\boldsymbol{m^3}}{\boldsymbol{s}}$$

Látható, hogy a két különböző megoldási módszerrel számolt térfogatáramok jó egyezést mutatnak.

FESTÉKSZÓRÓ



Az ábrán látható festékszóró a következő elven működik: a Venturi-csőbe érkező levegő a szűk áramlási keresztmetszetbe érve felgyorsul, statikus nyomása ezáltal lecsökken. A lecsökkent nyomás a festékszóró alatt található, légkörre nyitott tartályból a festéket egy csövön keresztül felszívja, majd a festék a légárammal elkeveredve kiáramlik a kezelendő felületre.

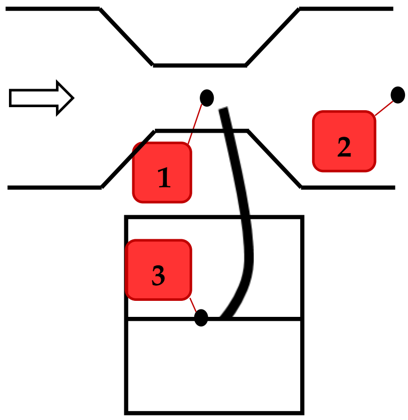
Kérdés: Milyen magasra emelhetjük a festékszórót a tartályhoz képest, hogy az még éppen képes legyen a tartályból a festéket feszívni?

Adatok: D = 32mm; d = 20mm; q_v=72 m³/h, $\varrho_{festék}$ = 1000 kg/m³; ϱ_{lev} = 1,2 kg/m³

MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások:

- ahogy a festékszórót egyre magasabbra emeljük, a csőszűkületben kialakult depressziónak egyre nagyobb festékoszlopot kell megtartania. A felszívott festék térfogatárama az festékszóró pozíciójának emelésével egyre csökken, mígnem elérjük azt a pontot, amikor 0 lesz. Ezt a h_{max} magasságot keressük.
- a számításhoz szükséges pontok felvétele:



Bernoulli-egyenlet az 1-2 pontok közé, a levegőben:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho_{lev}}{2} v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho_{lev}}{2} v_2^2$$

- $U_1 = g \cdot z_1 = U_2 = g \cdot z_2 \leftarrow z_1 = z_2$
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár
- $q_{v,1} = q_{v,2} = q_v \rightarrow v_1 = \frac{q_v}{A_1};\ v_2 = \frac{q_v}{A_2}$

Ebből az 1-es pontban fellépő depresszió (légköri nyomás alatti nyomás) számítható:

$$p_0 - p_1 = \frac{\rho_{lev}}{2} \cdot q_v^2 \cdot \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) = 8 \cdot \rho_{lev} \cdot \frac{\dot{q}_v^{\,2}}{\pi^2}\left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4}\right)$$

$$= 8 \cdot 1{,}2 \cdot \left(\frac{72}{3600}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{0{,}02^4} - \frac{1}{0{,}032^4}\right) = 2060 Pa$$

Bernoulli egyenlet a 3-1 pontok közé, a festékben:

$$p_3 + \rho_{festék} U_3 + \frac{\rho_{festék}}{2} v_3^2 = p_1 + \rho_{festék} U_1 + \frac{\rho_{festék}}{2} v_1^2$$

- $p_3 = p_0 \leftarrow$ légkörre nyitott
- $v_1 = v_2 = 0$
- $U_1 - U_3 = g \cdot h_{max}$

$$p_0 - p_1 = \rho_{festék} \cdot g \cdot h_{max} \rightarrow \boldsymbol{h_{max}} = \frac{p_0 - p_1}{\rho_{festék} \cdot g} = \frac{2060}{1000 \cdot 10} = \mathbf{0.206m}$$

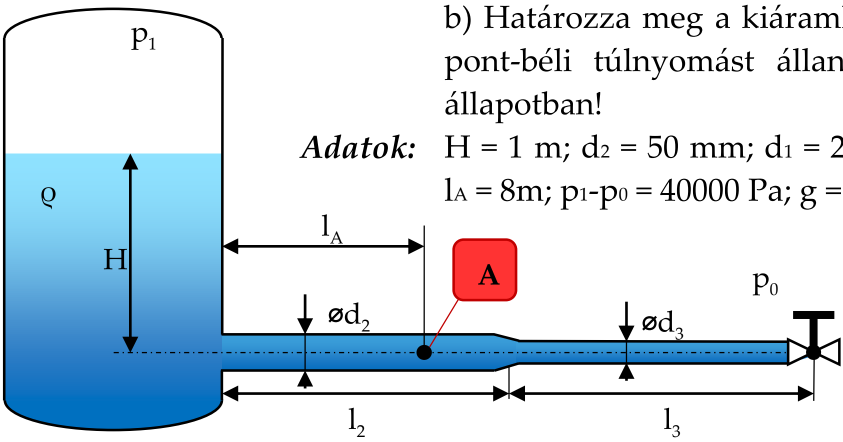
Instationäre Bernoulli-Gleichung

LÉPCSŐS KIFOLYÁS TARTÁLYBÓL

A mellékelt ábrán látható zárt tartály *H=1 m* magasságig van vízzel feltöltve. A tartályhoz egy $d_2 = 50$ *mm* és egy $d_3 = 25$ *mm* átmérőjű csőszakasz csatlakozik. A csővégen egy alap-állapotban zárt szelep található. A közeget súrlódásmentesnek, és összenyomhatatlannak feltételezzük.

Kérdés: a) Határozza meg az „A" pont béli gyorsulást és túlnyomást a szelep hirtelen kinyitásának pillanatában!
b) Határozza meg a kiáramlási sebességet és az „A" pont-béli túlnyomást állandósult (stacioner, $t \to \infty$) állapotban!

Adatok: $H = 1$ m; $d_2 = 50$ mm; $d_1 = 25$ mm; $l_2 = 12$ m; $l_3 = 9$m; $l_A = 8$m; $p_1 - p_0 = 40000$ Pa; $g = 10$N/kg; $\varrho = 1000$ kg/m^3;



MEGOLDÁS

a) feladatrész:

Kezdeti megfontolások:

- mivel a közeg összenyomhatatlan, az „A” pont béli gyorsulás ugyanakkora, mint az l_1 szakasz bármely más pontjában
- a különböző átmérőjű szakaszokon létrejövő gyorsulások között a kontinuitás teremt kapcsolatot
- a Bernoulli-egyenletet A és 3 pontok közé felírva túl sok az ismeretlen (p_A, a_A), ezért célszerű először olyan pontokat választanunk, ahol több adat áll rendelkezésre - például a tartályban lévő folyadék felszíne és a kifolyás

Instacioner Bernoulli-egyenlet a folyadékfelszín (1) és a kifolyás (3) közé:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = \rho \cdot \int_1^3 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} + p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- A gyorsulás iránya 1 → 3, tehát a 3 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_1 - U_3 = g \cdot (z_1 - z_3) = g \cdot H$
- $v_1 = v_3 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos, ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik. Hirtelen keresztmetszetváltozás esetén a gyorsulásnak szakadása van, ott az integrálást ketté kell bontani.
- a tartályban az áramlási keresztmetszet nagyságrendekkel nagyobb, mint a cső keresztmetszete, ezért a folytonossági tételt felhasználva feltételezhetjük, hogy a tartályban a gyorsulás közel zérus.

$$\rightarrow \int_1^3 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} = a_A l_2 + a_3 l_3$$

Az 1-3 pontok közé felírt Bernoulli-egyenlet a következő formára egyszerűsödik:

$$p_1 + \rho g H = p_0 + \rho(a_A l_2 + a_3 l_3)$$

A gyorsulások között kapcsolatot teremtő kontinuitási egyenlet:

$$a_A A_2 = a_3 A_3 \qquad a_3 = a_A \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^2 = a_A \left(\frac{50}{25}\right)^2 = 4a_A$$

Ebből „A” pont béli gyorsulás számítható:

$$p_1 + \rho g H = p_0 + \rho(a_A l_2 + 4a_A l_3)$$

$$a_A = \frac{(p_1 - p_0) + \rho g H}{\rho(l_2 + 4l_3)} = \frac{40000 + 1000 \cdot 10 \cdot 1}{1000(12 + 4 \cdot 9)} = \mathbf{1{,}04 \frac{m}{s^2}}$$

Az „A” pont béli túlnyomás kiszámításához a gyorsulások ismeretében most már felírhatjuk az instacinoner Bernoulli-egyenletet A-3 pontok közé. Vigyázat: a gyorsulás (a_2) ugyan végig azonos a l_2 jelű csőben, de a lokális gyorsulás miatt a csőben fellépő túlnyomás ($p_2(x)$) áramlási irányban folyamatosan csökken.

$$p_A + \rho \cdot U_A + \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2 = \rho \cdot \int_A^3 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} + p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- a gyorsulás iránya A → 3, tehát az A oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_A - U_3 = g \cdot (z_A - z_3) = 0$
- $v_A = v_3 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik. Hirtelen keresztmetszetváltozás esetén a gyorsulásnak szakadása van, ott az integrálást ketté kell bontani.
  $$\rightarrow \int_A^3 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} = a_A \cdot (l_2 - l_A) + a_3 l_3$$

Az A-3 pontok közé felírt Bernoulli-egyenlet a korábban felírt kontinuitási egyenlet segítségével a következő formára egyszerűsödik, melyből „A” pont béli túlnyomás számítható:

$$\boldsymbol{p_A - p_0} = \rho a_A (l_2 - l_A + 4 l_3) = 1000 \cdot 1{,}04 \cdot (12 - 8 + 4 \cdot 9) = \boldsymbol{41600 Pa}$$

b) feladatrész:

Kezdeti megfontolások:

- A nyitás követően az áramlás egy stacionárius állapotba áll be, ahol a túlnyomás és a potenciálkülönbség nem a csőben lévő lokális gyorsulást fogja fedezni, hanem a csőszájánál és a szűkületnél a konvektív gyorsulást - a tartály béli 0 sebességről felgyorsul a folyadék a 2-es cső béli sebességre, valamint az 2-es cső béli sebességről a 3-es cső béli sebességre
- mivel az áramlás súrlódásmentes, ezért az „A” pont béli túlnyomás ugyanakkora, mint az l_2 szakasz bármely más pontjában

Írjuk fel a stacionárius Bernoulli-egyenletet az 1-3 pontok közé:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_1 - U_3 = g \cdot (z_1 - z_3) = g \cdot H$
- $v_1 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_3$ (konti.)

Ebből a kifolyási sebesség számítható:

$$v_3 = \sqrt{2 \cdot \frac{p_1 - p_0 + \rho g H}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(40000 + 10 \cdot 1000 \cdot 1)}{1000}} = \mathbf{10\,\frac{m}{s}}$$

Stacionárius Bernoulli-egyenlet az A-3 pontok között:

$$p_A + \rho \cdot U_A + \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2 = p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

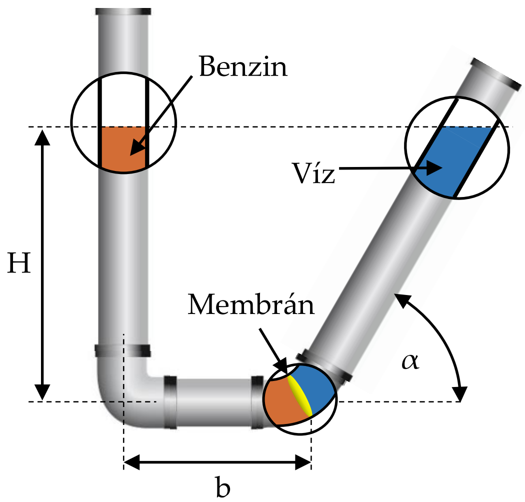
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_A - U_2 = g \cdot (z_A - z_2) = 0$
- folytonosság: $q_{V,A} = q_{V,3} \rightarrow v_A = v_3 \cdot \frac{A_3}{A_A} = 2{,}5\,\frac{m}{s}$

Ebből az „A" pontban fellépő túlnyomás stacionárius esetben:

$$\boldsymbol{p_A - p_0} = \frac{\rho}{2} \cdot (v_3^2 - v_A^2) = \frac{1000}{2}(10^2 - 2{,}5^2) = \mathbf{46875\ Pa}$$

ELTÉRŐ SŰRŰSÉGŰ ANYAGOK ESETE

Egy *D = 6 mm* átmérőjű, az ábrán látható kialakítású cső alján membrán található, aminek bal oldalán *H = 80 cm* magasságú benzin, a jobb oldalán azonos magasságú vízoszlop nyugszik. Mindkét csőszár a légkörre nyitott. A membrán elpattanásakor a folyadékoszlopok az egyensúlyi állapotra törekedve mozgásba jönnek.



Kérdés:	Határozza meg a membrán elpattintásakor a) a vízoszlop gyorsulását! b) a benzinoszlop gyorsulását!
Adatok:	D = 6 mm; H = 80 cm; b = 30 cm; $\alpha = 60°$ $\varrho_b = 750\ kg/m^3$; $\varrho_v = 1000\ kg/m^3$; $p_0 = 10^5\ Pa$; $g = 10\ m/s^2$; $\mu = 0$

MEGOLDÁS

a) (és b)) feladatrész:

Kezdeti megfontolások:

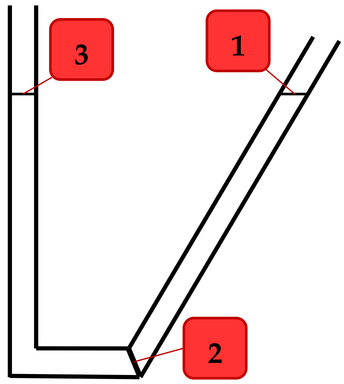
- mielőtt fejjel rohannánk a falnak, gondoljuk végig, hogy lehet-e a vízoszlopnak és a benzinoszlopnak eltérő gyorsulása!

  …

  Nem! A folyadékoszlopok sem egymásba nem csúszhatnak, sem üres tér nem keletkezhet közöttük. A vízoszlop és a benzinoszlop gyorsulása tehát azonos lesz: $a_{víz} = a_{benzin} = a$
- eddigre már szépen kifejlődött mérnöki érzékünk alapján pedig azt is meg tudjuk mondani, hogy a víz fog megindulni a benzin felé, mert az azonos magasságú (H) vízoszlop nagyobb sűrűsége miatt nagyobb nyomással nehezedik a membránra, mint a kisebb sűrűségű benzin. Figyelem: a vízoszlop alján létrejövő túlnyomás csak a vízfelszín magasságától függ, a csőszár állásszöge nem befolyásolja azt.
- a Bernoulli-egyenletet egyszerűsített formájában csak azonos sűrűségű folyadékokra alkalmazható, azért külön írjuk fel a vízben, és külön a benzinben

Instacionárius Bernoulli egyenlet a vízre a jobb felszín (1) és a membrán (2) közé:

$$p_1 + \rho_v \cdot U_1 + \frac{\rho_v}{2} \cdot v_1^2 = \rho_v \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} + p_2 + \rho_v \cdot U_2 + \frac{\rho_v}{2} \cdot v_2^2$$



- a gyorsulás iránya 1 → 2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_1 = p_0 \leftarrow$ szabadfelszín
- $U_1 - U_2 = g \cdot (z_1 - z_2) = g \cdot H$
- $v_1 = v_2 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos, ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik.

  $$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} = a \cdot \frac{H}{\sin\alpha}$$

Ebből a 2 pontban fellépő túlnyomás:

$$p_2 - p_0 = \rho_v \cdot \left(g \cdot H - a \cdot \frac{H}{\sin\alpha}\right) \tag{1}$$

Instacionárius Bernoulli egyenlet a benzinre a membrán (2) és a bal felszín (3) közé:

$$p_2 + \rho_b \cdot U_2 + \frac{\rho_b}{2} \cdot v_2^2 = \rho_b \cdot \int_2^3 \frac{\partial v}{\partial t} ds + p_3 + \rho_b \cdot U_3 + \frac{\rho_v}{2} \cdot v_3^2$$

- a gyorsulás iránya 2 → 3, tehát a 3 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadfelszín
- $U_3 - U_2 = g \cdot (z_3 - z_2) = g \cdot H$
- $v_3 = v_2 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik.
  $$\int_2^3 \frac{\partial v}{\partial t} ds = a \cdot (H + b)$$

Ebből a 2 pontban fellépő túlnyomás:

$$p_2 - p_0 = \rho_b \cdot [g \cdot H + a \cdot (H + b)] \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletetek alapján a folyadékoszlopok gyorsulása számítható:

$$\boldsymbol{a} = \frac{(\rho_v - \rho_b) g H}{\rho_b (H + b) + \rho_v \frac{H}{\sin \alpha}} = \frac{(1000 - 750) \cdot 10 \cdot 0{,}8}{750 \cdot (0{,}8 + 0{,}3) + 1000 \frac{0{,}8}{\sin 60°}} = \boldsymbol{1{,}14 \frac{m}{s^2}}$$