

# Áramlástan feladatgyűjtemény

Az energetikai mérnöki BSc és gépészmérnöki BSc képzések  
Áramlástan című tárgyához

## 2. gyakorlat

### Viszkozitás, hidrosztatika

Összeállította:

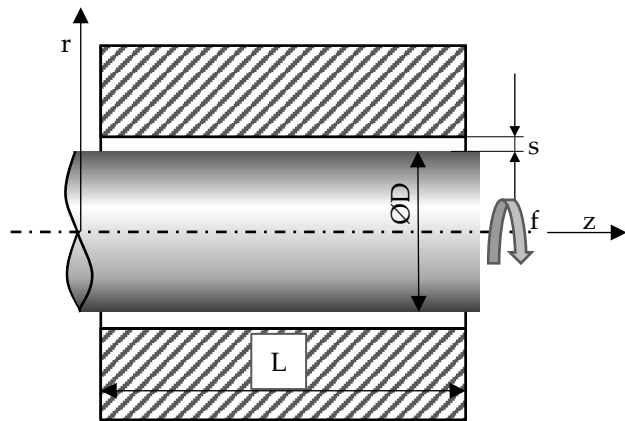
Lukács Eszter

Dr. Istók Balázs

Dr. Benedek Tamás

## SIKLÓCSAPÁGY

Egy siklócsapágy kenését és hűtését kenőolaj átáramoltatásával oldottuk meg. A kenőolajat egy volumetrikus szivattyú juttatja a siklócsapágy középső részébe, ahonnan egy keskeny, állandó vastagságú ( $s$ ) résen keresztül áramlik kifelé.



**Kérdés:** Határozza meg az olaj szükséges tömegáramát úgy, hogy az olaj hőmérsékletváltozása ne legyen több mint  $20^\circ\text{C}$ !

**Adatok:**  $s = 0,15 \text{ mm}$ ;  $D = 120 \text{ mm}$ ;  $L = 200 \text{ mm}$ ;  $n = 1200 \text{ 1/min}$ ;  
 $\nu_{\text{olaj}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $c_{p,\text{olaj}} = 2000 \text{ J/kg/K}$ ;  $\rho_{\text{olaj}} = 900 \text{ kg/m}^3$ ;  $\Delta t_{\text{olaj}} = 20^\circ\text{C}$ ;

## MEGOLDÁS

Feltételezhetjük, hogy az elvezetendő hőt az a teljesítmény állítja elő, ami a viszkozus folyadék belső súrlódása következtében disszipálódik. Ennek meghatározása során a következő megfontolásokkal élünk:

- az olaj Newtoni közegként viselkedik
- az olaj hosszirányú sebessége a forgáshoz képest elhanyagolható -  $v_z \approx 0$
- az olaj a tapadás törvénye miatt az álló ház falán nulla sebességű, a tengelyen pedig a kerületi sebességgel mozog
- a sebességeloszlás a ház és a tengely között lineárisan változik -  $\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} = \text{konstans}$
- a forgatáshoz szükséges teljesítmény a folyadéksúrlódáson keresztül hővé alakul át, amely teljes egészében az olaj melegítésére fordítódik -  $P_{\text{forg}} = P_{\text{hő}}$

A forgatáshoz szükséges teljesítmény meghatározása:

$$P_{\text{forg}} = M\omega \quad \leftarrow M = F_{\text{ker}} \cdot \frac{D}{2} \quad \leftarrow F_{\text{ker}} = \tau \cdot A_{\text{palást}} \quad \leftarrow \tau = \mu \frac{dv_\varphi}{dr} \quad \leftarrow \mu = \nu_{\text{olaj}} \rho_{\text{olaj}}$$

$$\leftarrow \omega = 2\pi f \quad \leftarrow A_{\text{palást}} = D\pi L$$

, ahol  $P_{\text{forg}}$  a forgatáshoz szükséges teljesítmény [W],  $M$  a forgatónyomaték [Nm],  $\omega$  a szögsebesség [rad/s],  $F_{\text{ker}}$  a kerületi erő [N],  $\tau$  a folyadékban keletkező csúsztatófeszültség [Pa],  $A_{\text{palást}}$  a csapágy palástfelülete,  $\mu$  az olaj dinamikai viszkozitása [kg/(ms)],  $D$  a tengely átmérője [m].

A csapágy szögsebessége:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{1200}{60} \frac{1}{s} = 125,7 \frac{1}{s}$$

Newton viszkozitási törvénye alapján a folyadékban keletkező csúsztatófeszültség:

$$\tau = \mu \frac{dv_\varphi}{dr} \cong \mu \frac{v_{ker} - v_{ház}}{s} = \nu_{olaj} \cdot \rho_{olaj} \frac{\frac{D}{2} \omega - 0}{s} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 900 \cdot \frac{0,12}{2} \cdot 125,7 = 905 Pa$$

A kerületi erő:

$$F_{ker} = \tau \cdot A_{palást} = \tau \cdot (D\pi L) = 905 \cdot 0,12 \cdot \pi \cdot 0,2 = 68 N$$

A forgatónyomaték:

$$M = F_{ker} \cdot r = 68 \cdot \frac{0,12}{2} = 4,1 Nm$$

A forgatáshoz szükséges teljesítmény:

$$P_{forg} = M\omega = 4,1 \cdot 125,7 = 514 W$$

A forgatáshoz szükséges teljesítmény a folyadéksúrlódáson keresztül hővé alakul át. Ezt a hőteljesítményt kell a kenőolajjal elvezetni ahhoz, hogy a csapágy ne melegedjen.

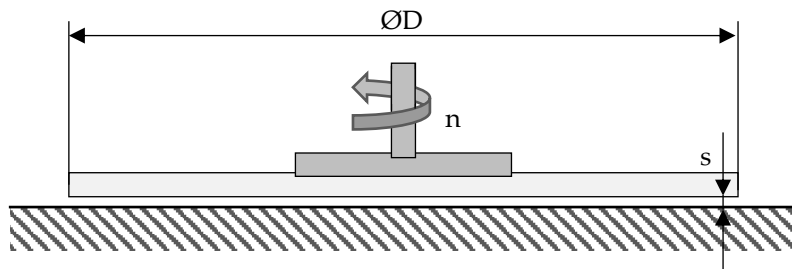
$$P_{forg} = P_{hűtés} = (\dot{Q}) = \dot{q}_{m,olaj} \cdot c_{p,olaj} \cdot \Delta t_{olaj}$$

$$\dot{q}_{m,olaj} = \frac{P_{forg}}{c_{p,olaj} \cdot \Delta t_{olaj}} = \frac{514}{2000 \cdot 20} = 0,0129 \frac{kg}{s} = \mathbf{12,9 \frac{g}{s}}$$

Az olaj szükséges tömegárama tehát 12,9 g/s.

## CD-LEJÁTSZÓ

Egy CD lejátszóban a lemez állandó szögsebességgel pörög,  $s$  résmérettel elválasztott álló ház felett.



**Kérdés:** Határozza meg a forgatáshoz szükséges teljesítményt!

**Adatok:**  $\mu_{lev} = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m/s}$ ;  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ;  $s = 0,1 \text{ mm}$ ;  $D = 120 \text{ mm}$ ;  $n = 10000 \text{ 1/min}$

## MEGOLDÁS

A megoldásnál ügyelnünk kell arra, hogy a CD kerületi sebessége a sugár függvényében változik. Ennek következtében a sugár függvénye lesz a folyadékban fellépő csúsztatófeszültség, a kerületi erő és a forgatónyomaték is.

$$P_{forg} = M(r)\omega \quad \leftarrow M = F_{ker}(r) \cdot r \quad \leftarrow F_{ker}(r) = \tau \cdot dA \quad \leftarrow \tau = \mu_{lev} \frac{dv_{\varphi}}{dz}$$

$$\leftarrow \omega = 2\pi n \quad \leftarrow dA = 2r\pi dr$$

A CD-lemez szögsebessége:

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot \frac{10000}{60} = 1047 \frac{1}{s}$$

Newton viszkozitási törvénye alapján a folyadékban keletkező csúsztatófeszültség:

$$\tau = \mu_{lev} \frac{dv_{\varphi}}{dz} \cong \mu_{lev} \frac{v_{ker} - v_{ház}}{s} = \mu_{lev} \frac{r\omega - 0}{s}$$

Az elemi kerületi erő egy  $dr$  szélességű,  $r$  sugarú körgyűrű-felületen:

$$dF_{ker}(r) = \tau \cdot dA = \mu_{lev} \frac{r\omega}{s} \cdot 2r\pi \cdot dr = \mu_{lev} \frac{2r^2\pi\omega}{s} \cdot dr$$

A forgatónyomaték a 0 és  $R$  sugár közötti összes körgyűrű felületen:

$$M = \int_0^R r \cdot dF_{ker}(r) = \mu_{lev} \frac{2\pi\omega}{s} \cdot \int_0^R r^3 dr = \mu_{lev} \frac{2\pi\omega}{s} \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\mu_{lev} \cdot \pi\omega \cdot R^4}{2s}$$

$$= \frac{1,5 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \cdot 1047 \cdot 0,06^4}{2 \cdot 10^{-4}} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$$

Amiből a forgatáshoz szükséges teljesítmény:

$$P_{forg} = M \cdot \omega = \frac{\mu_{lev} \cdot \pi \omega^2 \cdot R^4}{2s} = \frac{1,5 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \cdot 1047^2 \cdot 0,06^4}{2 \cdot 10^{-4}} = \mathbf{3,3W}$$

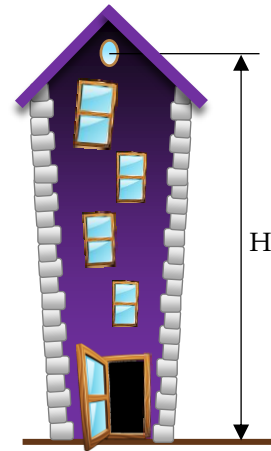
A CD-lemez forgatásához szükséges teljesítmény tehát 3,3 W.

## A LÉPCSŐHÁZ ESETE

Egy hat emeletes, 20m magasságú lakóház lépcsőházának bejárata nyitva maradt, a többi nyílászáró be van zárva. Tél lévén a külső hőmérséklet  $-5^{\circ}\text{C}$ , a lépcsőházban  $20^{\circ}\text{C}$  van a fűtés miatt.

**Kérdés:** Adja meg a legfelső emeleten kialakuló nyomáskülönbség mértékét!  
Rajzolja fel a nyomáseloszlást a lépcsőházban és a kültérben a magasság függvényeként!

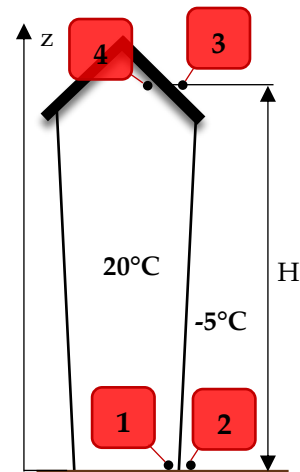
**Adatok:**  $p_0 = 1 \text{ bar}$ ;  $R = 287 \text{ J}/(\text{kgK})$ ;  $g = 10 \text{ N}/\text{kg}$ ;  
 $H = 20\text{m}$ ;  $T_b = 20^{\circ}\text{C}$ ;  $T_k = -5^{\circ}\text{C}$



## MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások:

- a 3-4-es pont között nem írhatjuk fel a hidrosztatika alapegyenletének egyszerűsített formáját, mert a két pontban eltérő a sűrűség
- mivel a földszinti ajtó nyitva van, az 1-es és 2-es pontokban a nyomást közel azonosnak feltételezhetjük



A hidrosztatika alapegyenlete az 1-4 pontok közé:

$$p_1 + \rho_B U_1 = p_4 + \rho_B U_4 \quad U = gz$$

A koordináta-rendszer ügyes megválasztásával  $z_1 = 0 \rightarrow U_1 = 0$ ;  $U_4 = gH$

$$p_1 = p_4 + \rho_B gH$$

A hidrosztatika alapegyenlete a 2-3 pontok közé:

$$p_2 + \rho_K U_2 = p_3 + \rho_K U_3 \quad \text{mivel } z_2 = 0 \rightarrow U_2 = 0; U_3 = gH$$

$$p_2 = p_3 + \rho_K gH$$

$$\text{Mivel } p_1 = p_2 \rightarrow p_3 + \rho_K gH = p_4 + \rho_B gH$$

A levegő sűrűségének kiszámítása a lépcsőházban, és a kültérben:

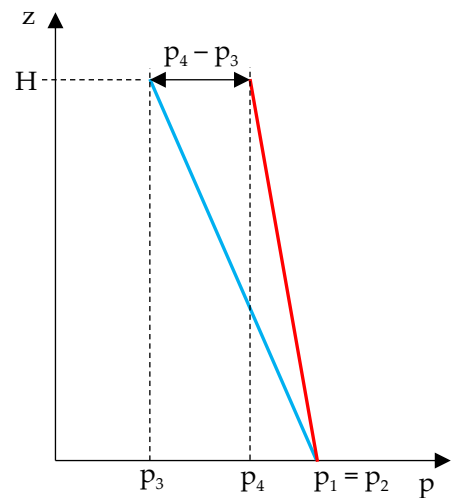
$$\rho_B = \frac{p_0}{RT_B} = \frac{10^5}{287 \cdot 293} = 1,19 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \rho_K = \frac{p_0}{RT_K} = \frac{10^5}{287 \cdot 268} = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

A legfelső emeleten kialakuló nyomáskülönbség tehát:

$$p_4 - p_3 = (\rho_K - \rho_B)gH = (1,3 - 1,19) \cdot 10 \cdot 20 = \mathbf{22Pa}$$

Nyomáseloszlás a magasság függvényében:

- talajszinten a nyomások megegyeznek;  $p_1 = p_2$
- a nyomás felfele haladva lineárisan csökken
- a csökkenés meredeksége  $\rho g$ , tehát a hidegebb (sűrűbb) levegőben gyorsabban, míg a melegebb levegőben kevésbé gyorsan változik a nyomás

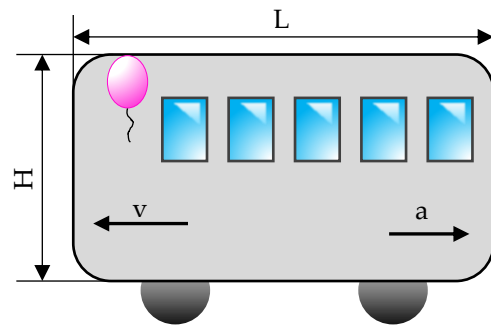


## A BUSZ ÉS A LUFÍ

Egy 3 m magasság, 10 m hosszú busz  $v$  sebességgel halad az ábrán látható irányba, majd hirtelen fékezni kezd.

**Kérdés:** Mekkora a legnagyobb nyomáskülönbség a fékező buszban? Merre indul el a fékezés pillanatában buszon található héliumos lufi?

**Adatok:**  $p_0 = 1 \text{ bar}$ ;  $R = 287 \text{ J}/(\text{kgK})$ ;  
 $g = 10 \text{ N}/\text{kg}$ ;  $T = 293\text{K}$ ;  
 $H = 3 \text{ m}$ ;  $L = 10 \text{ m}$ ;  $a = 2 \text{ m}/\text{s}^2$



## MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások:

- a feladat a busszal együtt gyorsuló koordináta-rendszerből tekinthető hidrosztatikai problémának  $\rightarrow$  tehetetlenségi erőtér ( $\underline{g}_t$ )
- a koordináta-rendszert a busz bal alsó sarkához rögzítjük, az x-tengely a gyorsulás-vektor irányába mutat
- az 1-es pontot az origóba helyezzük, a 2-es pont helye a parametrikusan felírt számításokból derül ki

A hidrosztatika alapegyenlete az 1-2 pontok közé:

$$p_1 + \rho U_1 = p_2 + \rho U_2 \quad U = gz + ax$$

$$p_1 + \rho gz_1 + \rho ax_1 = p_2 + \rho gz_2 + \rho ax_2$$

$$p_1 - p_2 = \rho [g \cdot (z_2 - z_1) + a \cdot (x_2 - x_1)]$$

Tehát a nyomáskülönbség akkor lesz maximális, ha a 2-es pont az 1-eshez képest a lehető legmagasabbra és + x irányban a lehető legmesszebb helyezkedik el, azaz:

$$z_2 - z_1 = H; \quad x_2 - x_1 = L$$

A levegő sűrűsége az ideális gáz állapot egyenletéből:

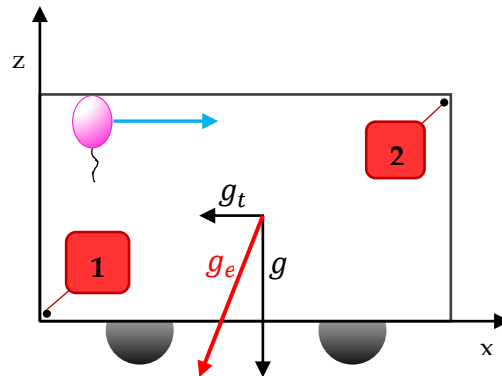
$$\rho = \frac{p_0}{RT} = \frac{10^5}{287 \cdot 293} = 1,19 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

A buszban kialakuló legnagyobb nyomáskülönbség értéke:

$$p_1 - p_2 = \rho [g \cdot (z_2 - z_1) + a \cdot (x_2 - x_1)] = \rho (gH + aL) = 1,19 \cdot (10 \cdot 3 + 2 \cdot 10) = \mathbf{60 \text{ Pa}}$$

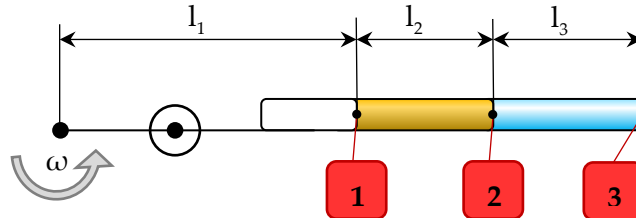


Merre indul a héliumos lufi? A hélium sűrűsége kisebb, mint a levegőé, ezért a lufi a rá ható felhajtóerő következtében az eredő térerő vektorral ellentétes irányban indulna el, amerre a nyomás és azzal a sűrűség leginkább csökken. Mivel a busz teteje akadályozza az emelkedésben, ezért a fékezés időszakában **jobbra, a busz hátulja fele** indul.



## SZEPARÁTOR

Egy vízszintes síkban forgó szeparátorban egy olaj-víz keverékét tartalmazó kémcsövet forgatunk. A forgatás jelentős mértékben megnöveli a ható térerősség nagyságát és ezzel felgyorsítja a különböző sűrűségű anyagok szétválását.



**Kérdés:** Határozzuk meg, hogy abban az esetben, mikor már szétvált a keverék, mekkora a  $d=40\text{mm}$  átmérőjű kémcső aljára ható erő!

**Adatok:**  $d = 40 \text{ mm}$ ;  $l_1 = 0,2 \text{ m}$ ,  $l_2 = 0,1 \text{ m}$ ,  $l_3 = 0,1 \text{ m}$ ,  $\omega = 30 \text{ 1/s}$ ,  $\rho_{\text{olaj}} = 800 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_{\text{víz}} = 1000 \text{ kg/m}^3$

## MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások:

- a feladat a kémcsővel együtt forgó koordináta-rendszerből tekinthető hidrosztatikai problémának  $\rightarrow$  centrifugális erőtér ( $\underline{g}_c$ )
- feltételezhető, hogy a folyadék felszínén a nyomás légköri
- ne felejtsük, hogy a hidrosztatika alapegyenletének egyszerűsített formája csak azonos sűrűségű pontok között írható fel  $\rightarrow$  külön az olajban és külön a vízben

Felírva a hidrosztatika alapegyenletét az 1-2 pontok közé az olajban:

$$p_1 + \rho_{\text{olaj}} \cdot U_1 = p_2 + \rho_{\text{olaj}} \cdot U_2$$

- a folyadék felszínén a nyomás légköri:  $p_1 = p_0$

$$- U_1 = gz_1 - \frac{r_1^2 \omega^2}{2}; U_2 = gz_2 - \frac{r_2^2 \omega^2}{2}$$

$$- r_1 = l_1; r_2 = l_1 + l_2$$

- mivel a szeparátor vízszintes síkban forog:  $z_1 = z_2$

$$p_2 - p_0 = \rho_{\text{olaj}} \cdot \left( -\frac{l_1^2 \omega^2}{2} + \frac{(l_1 + l_2)^2 \omega^2}{2} \right) = 800 \cdot \left( -\frac{0,2^2 \cdot 30^2}{2} + \frac{0,3^2 \cdot 30^2}{2} \right)$$

$$= 18000 \text{ Pa}$$

Felírva a hidrosztatika alapegyenletét a 2-3 pontok közé a vízben:

$$p_2 + \rho_{\text{víz}} \cdot U_2 = p_3 + \rho_{\text{víz}} \cdot U_3$$

$$- U_2 = gz_2 - \frac{r_2^2 \omega^2}{2}; U_3 = gz_3 - \frac{r_3^2 \omega^2}{2}$$

$$- r_2 = l_1 + l_2; r_3 = l_1 + l_2 + l_3$$

$$- \text{mivel a szeparátor vízszintes síkban forog: } z_2 = z_3$$

$$p_3 - p_2 = \rho_{\text{víz}} \cdot \left( -\frac{(l_1 + l_2)^2 \omega^2}{2} + \frac{(l_1 + l_2 + l_3)^2 \omega^2}{2} \right) = 1000 \cdot \left( -\frac{0,3^2 \cdot 30^2}{2} + \frac{0,4^2 \cdot 30^2}{2} \right) = 31500 \text{ Pa}$$

Mivel a kémcső aljának másik oldalán szintén légköri a nyomás, a kémcső alján a nyomáskülönbség:

$$p_3 - p_0 = (p_2 - p_0) + (p_3 - p_2) = 18000 + 31500 = 49500 \text{ Pa}$$

A kémcső aljára ható erő ebből:

$$F = \Delta p \cdot A = (p_3 - p_0) \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = 49500 \cdot \frac{0,04^2 \pi}{4} = \mathbf{62 \text{ N}}$$