Áramlástan feladatgyűjtemény

Az energetikai mérnöki BSc és gépészmérnöki BSc képzések Áramlástan című tárgyának tantermi gyakorlataihoz

Összeállította:

Lukács Eszter

Dr. Istók Balázs

Dr. Benedek Tamás

Fenyvesi Bence

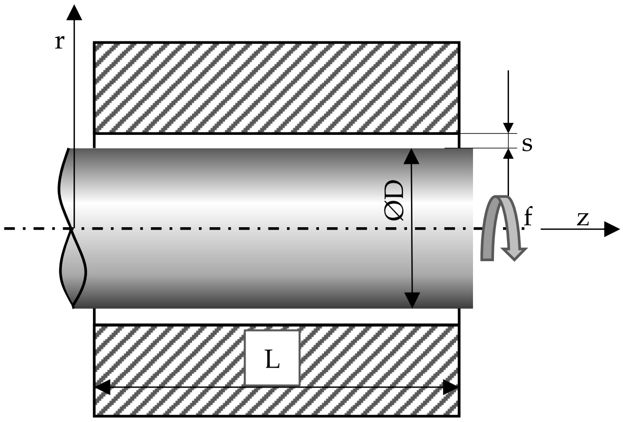
Tokaji Kristóf

Tartalom

Viszkozitás

SIKLÓCSAPÁGY

Egy siklócsapágy kenését és hűtését kenőolaj átáramoltatásával oldottuk meg. A kenőolajat egy volumetrikus szivattyú juttatja a siklócsapágy középső részébe, ahonnan egy keskeny, állandó vastagságú (s) résen keresztül áramlik kifelé.



Kérdés: Határozza meg az olaj szükséges tömegáramát úgy, hogy az olaj hőmérsékletváltozása ne legyen több mint 20°C!

Adatok: s = 0,15 mm; D = 120 mm; L = 200 mm; n = 1200 1/min;
$\nu_{olaj} = 2\ 10^{-5}\ m^2/s$; $c_{p,olaj} = 2000$ J/kg/K; $\varrho_{olaj} = 900\ kg/m^3$; $\Delta t_{ola\,j} = 20°C$;

MEGOLDÁS

Feltételezhetjük, hogy az elvezetendő hőt az a teljesítmény állítja elő, ami a viszkózus folyadék belső súrlódása következtében disszipálódik. Ennek meghatározása során a következő megfontolásokkal élünk:

- az olaj Newtoni közegként viselkedik
- az olaj hosszirányú sebessége a forgáshoz képest elhanyagolható - $v_z \approx 0$
- az olaj a tapadás törvénye miatt az álló ház falán nulla sebességű, a tengelyen pedig a kerületi sebességgel mozog
- a sebességeloszlás a ház és a tengely között lineárisan változik - $\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} = konstans$
- a forgatáshoz szükséges teljesítmény a folyadéksúrlódáson keresztül hővé alakul át, amely teljes egészében az olaj melegítésére fordítódik - $P_{forg} = P_{hő}$

A forgatáshoz szükséges teljesítmény meghatározása:

$P_{forg} = M\omega \quad \leftarrow M = F_{ker} \cdot \frac{D}{2} \quad \leftarrow F_{ker} = \tau \cdot A_{palást} \quad \leftarrow \tau = \mu \frac{dv_\varphi}{dr} \quad \leftarrow \mu = \nu_{olaj}\rho_{olaj}$

$\leftarrow \omega = 2\pi n \qquad \leftarrow A_{palást} = D\pi L$

, ahol P_{forg} a forgatáshoz szükséges teljesítmény [W], M a forgatónyomaték [Nm], ω a szögsebesség [rad/s], F_{ker} a kerületi erő [N], τ a folyadékban keletkező csúsztatófeszültség [Pa], $A_{palást}$ a csapágy palástfelülete, μ az olaj dinamikai viszkozitása [kg/(ms)], D a tengely átmérője [m].

A csapágy szögsebessége:

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot \frac{1200}{60}\frac{1}{s} = 125{,}7\frac{1}{s}$$

Newton viszkozitási törvénye alapján a folyadékban keletkező csúsztatófeszültség:

$$\tau = \mu\frac{dv_{\varphi}}{dr} \cong \mu\frac{v_{ker} - v_{ház}}{s} = \nu_{olaj} \cdot \rho_{olaj}\frac{\frac{D}{2}\omega - 0}{s} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 900 \cdot \frac{\frac{0{,}12}{2} \cdot 125{,}7}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} = 905Pa$$

A kerületi erő:

$$F_{ker} = \tau \cdot A_{palást} = \tau \cdot (D\pi L) = 905 \cdot 0{,}12 \cdot \pi \cdot 0{,}2 = 68N$$

A forgatónyomaték:

$$M = F_{ker} \cdot r = 68 \cdot \frac{0{,}12}{2} = 4{,}1Nm$$

A forgatáshoz szükséges teljesítmény:

$$P_{forg} = M\omega = 4{,}1 \cdot 125{,}7 = 514W$$

A forgatáshoz szükséges teljesítmény a folyadéksúrlódáson keresztül hővé alakul át. Ezt a hőteljesítményt kell a kenőolajjal elvezetni ahhoz, hogy a csapágy ne melegedjen.

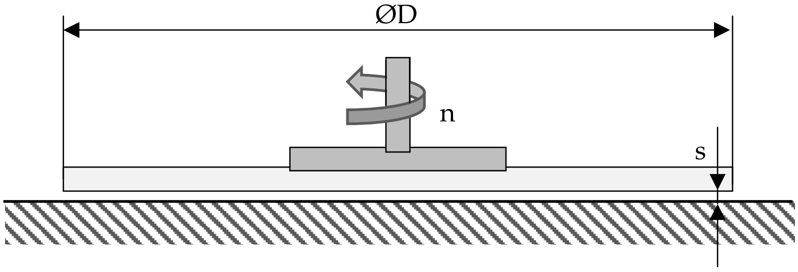
$$P_{forg} = P_{hűtés} = (\dot{Q}) = q_{m,olaj} \cdot c_{p,olaj} \cdot \Delta t_{olaj}$$

$$\boldsymbol{q_{m,olaj}} = \frac{P_{forg}}{c_{p,olaj} \cdot \Delta t_{olaj}} = \frac{514}{2000 \cdot 20} = 0{,}0129\frac{kg}{s} = \mathbf{12{,}9}\boldsymbol{\frac{g}{s}}$$

Az olaj szükséges tömegárama tehát *12,9 g/s*.

CD-LEJÁTSZÓ

Egy CD lejátszóban a lemez állandó szögsebességgel pörög, *s* résmérettel elválasztott álló ház felett.



Kérdés: Határozza meg a forgatáshoz szükséges teljesítményt!

Adatok: $\mu_{lev} = 1.5\ 10^{-5}$ kg/m/s; $\varrho = 1{,}2$ kg/m^3; s = 0,1 mm; D = 120 mm; n = 10000 1/min

MEGOLDÁS

A megoldásnál ügyelnünk kell arra, hogy a CD kerületi sebessége a sugár függvényében változik. Ennek következtében a sugár függvénye lesz a folyadékban fellépő csúsztatófeszültség, a kerületi erő és a forgatónyomaték is.

$$P_{forg} = M(r)\omega \quad \leftarrow M = F_{ker}(r)\cdot r \quad \leftarrow F_{ker}(r) = \tau\cdot dA \quad \leftarrow \tau = \mu_{lev}\frac{dv_\varphi}{dz}$$

$$\leftarrow \omega = 2\pi n \qquad \leftarrow dA = 2r\pi dr$$

A CD-lemez szögsebessége:

$$\omega = 2\pi n = 2\pi\cdot\frac{10000}{60} = 1047\frac{1}{s}$$

Newton viszkozitási törvénye alapján a folyadékban keletkező csúsztatófeszültség:

$$\tau = \mu_{lev}\frac{dv_\varphi}{dz} \cong \mu_{lev}\frac{v_{ker} - v_{ház}}{s} = \mu_{lev}\frac{r\omega - 0}{s}$$

Az elemi kerületi erő egy dr szélességű, r sugarú körgyűrű-felületen:

$$dF_{ker}(r) = \tau\cdot dA = \mu_{lev}\frac{r\omega}{s}\cdot 2r\pi\cdot dr = \mu_{lev}\frac{2r^2\pi\omega}{s}\cdot dr$$

A forgatónyomaték a 0 és R sugár közötti összes körgyűrű felületen:

$$M = \int_0^R r\cdot dF_{ker}(r) = \mu_{lev}\frac{2\pi\omega}{s}\cdot\int_0^R r^3\,dr = \mu_{lev}\frac{2\pi\omega}{s}\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\mu_{lev}\cdot\pi\omega\cdot R^4}{2s}$$

$$= \frac{1{,}5\cdot 10^{-5}\cdot\pi\cdot 1047\cdot 0{,}06^4}{2\cdot 10^{-4}} = 3{,}2\cdot 10^{-3}Nm$$

Amiből a forgatáshoz szükséges teljesítmény:

$$\boldsymbol{P_{forg}} = M \cdot \omega = \frac{\mu_{lev} \cdot \pi\omega^2 \cdot R^4}{2s} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \cdot 1047^2 \cdot 0{,}06^4}{2 \cdot 10^{-4}} = \boldsymbol{3{,}3W}$$

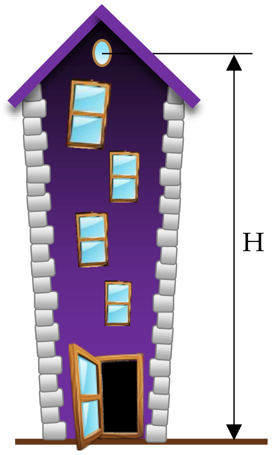
A CD-lemez forgatásához szükséges teljesítmény tehát *3,3 W*.

Hidrosztatika

A LÉPCSŐHÁZ ESETE

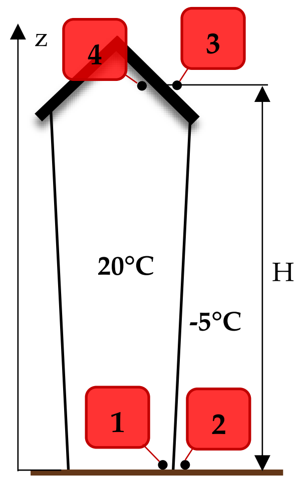
Egy hat emeletes, 20m magasságú lakóház lépcsőházának bejárata nyitva maradt, a többi nyílászáró be van zárva. Tél lévén a külső hőmérséklet -5°C, a lépcsőházban 20°C van a fűtés miatt.

Kérdés: Adja meg a legfelső emeleten kialakuló nyomáskülönbség mértékét! Rajzolja fel a nyomáseloszlást a lépcsőházban és a kültérben a magasság függvényeként!



Adatok: p_0 = 1 bar; R = 287 J/(kgK); g = 10 N/kg; H = 20m; T_b = 20 °C; T_k = -5 °C

MEGOLDÁS



Kezdeti megfontolások:

- a 3-4-es pont között nem írhatjuk fel a hidrosztatika alapegyenletének egyszerűsített formáját, mert a két pontban eltérő a sűrűség
- mivel a földszinti ajtó nyitva van, az 1-es és 2-es pontokban a nyomást közel azonosnak feltételezhetjük

A hidrosztatika alapegyenlete az 1-4 pontok közé:

$p_1 + \rho_B U_1 = p_4 + \rho_B U_4 \qquad U = gz$

A koordináta-rendszer ügyes megválasztásával $z_1 = 0 \rightarrow U_1 = 0;\ U_4 = gH$

$p_1 = p_4 + \rho_B gH$

A hidrosztatika alapegyenlete a 2-3 pontok közé:

$p_2 + \rho_K U_2 = p_3 + \rho_K U_3$ mivel $z_2 = 0 \rightarrow U_2 = 0;\ U_3 = gH$

$p_2 = p_3 + \rho_K gH$

Mivel $p_1 = p_2 \rightarrow p_3 + \rho_K U_3 = p_4 + \rho_B U_4$

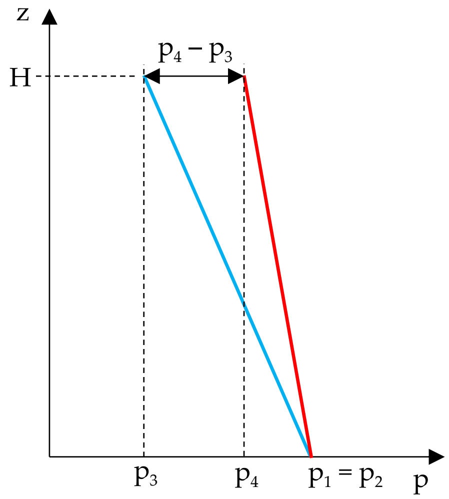
A levegő sűrűségének kiszámítása a lépcsőházban, és a kültérben:

$$\rho_B = \frac{p_0}{RT_B} = \frac{10^5}{287 \cdot 293} = 1{,}19\frac{kg}{m^3} \qquad \rho_K = \frac{p_0}{RT_K} = \frac{10^5}{287 \cdot 268} = 1{,}3\frac{kg}{m^3}$$

A legfelső emeleten kialakuló nyomáskülönbség tehát:
$\boldsymbol{p_4 - p_3} = (\rho_K - \rho_B)gH = (1{,}3 - 1{,}19) \cdot 10 \cdot 20 = \boldsymbol{22Pa}$

Nyomáseloszlás a magasság függvényében:

- talajszinten a nyomások megegyeznek; $p_1 = p_2$
- a nyomás felfele haladva lineárisan csökken
- a csökkenés meredeksége ρg, tehát a hidegebb (sűrűbb) levegőben gyorsabban, míg a melegebb levegőben kevésbé gyorsan változik a nyomás

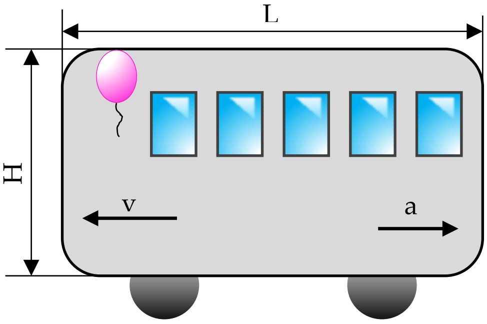


A BUSZ ÉS A LUFI

Egy *3 m* magasság, *10 m* hosszú busz *v* sebességgel halad az ábrán látható irányba, majd hirtelen fékezni kezd.

Kérdés: Mekkora a legnagyobb nyomáskülönbség a fékező buszban? Merre indul el a fékezés pillanatában buszon található héliumos lufi?

Adatok: p_0 = 1 bar; R = 287 J/(kgK); g = 10 N/kg; T = 293K; H = 3 m; L = 10 m; a = 2 m/s²



MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások:

- a feladat a busszal együtt gyorsuló koordináta-rendszerből tekinthető hidrosztatikai problémának → tehetetlenségi erőtér ($\underline{g_t}$)
- a koordináta-rendszert a busz bal alsó sarkához rögzítjük, az x-tengely a gyorsulás-vektor irányába mutat
- az 1-es pontot az origóba helyezzük, a 2-es pont helye a parametrikusan felírt számításokból derül ki

A hidrosztatika alapegyenlete az 1-2 pontok közé:

$$p_1 + \rho U_1 = p_2 + \rho U_2 \qquad U = gz + ax$$

$$p_1 + \rho g z_1 + \rho a x_1 = p_2 + \rho g z_2 + \rho a x_2$$

$$p_1 - p_2 = \rho[g \cdot (z_2 - z_1) + a \cdot (x_2 - x_1)]$$

Tehát a nyomáskülönbség akkor lesz maximális, ha a 2-es pont az 1-eshez képest a lehető legmagasabbra és + x irányban a lehető legmesszebb helyezkedik el, azaz:

$$z_2 - z_1 = H;\ x_2 - x_1 = L$$

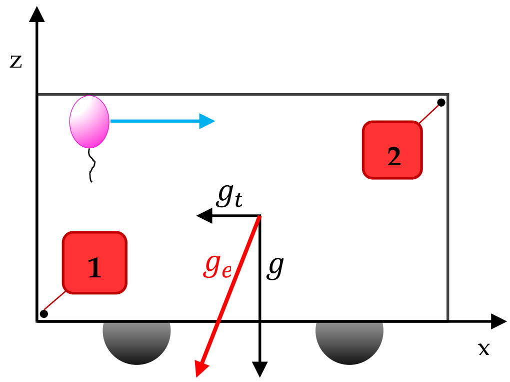
A levegő sűrűsége az ideális gáz állapot egyenletéből:

$$\rho = \frac{p_0}{RT} = \frac{10^5}{287 \cdot 293} = 1{,}19\frac{kg}{m^3}$$

A buszban kialakuló legnagyobb nyomáskülönbség értéke:

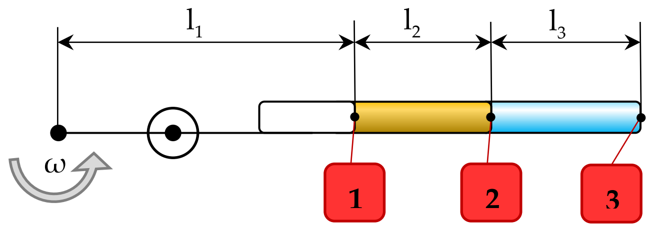
$$p_1 - p_2 = \rho[g \cdot (z_2 - z_1) + a \cdot (x_2 - x_1)] = \rho(gH + aL) = 1{,}19 \cdot (10 \cdot 3 + 2 \cdot 10) = \mathbf{60.5\ Pa}$$

Merre indul a héliumos lufi? A hélium sűrűsége kisebb, mint a levegőé, ezért a lufi a rá ható felhajtóerő következtében az eredő térerő vektorral ellentétes irányban indulna el, amerre a nyomás és azzal a sűrűség leginkább csökken. Mivel a busz teteje akadályozza az emelkedésben, ezért a fékezés időszakában **jobbra, a busz hátulja fele** indul.



SZEPARÁTOR

Egy vízszintes síkban forgó szeparátorban egy olaj-víz keverékét tartalmazó kémcsövet forgatunk. A forgatás jelentős mértékben megnöveli a ható térerősség nagyságát és ezzel felgyorsítja a különböző sűrűségű anyagok szétválását.



Kérdés: Határozzuk meg, hogy abban az esetben, mikor már szétvált a keverék, mekkora a d=40mm átmérőjű kémcső aljára ható erő!

Adatok: d = 40 mm; l_1 = 0,2 m, l_2 = 0,1 m, l_3 = 0,1 m, ω=30 1/s, ρ_{olaj}=800 kg/m^3, $\rho_{víz}$=1000 kg/m^3

MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások:

- a feladat a kémcsővel együtt forgó koordináta-rendszerből tekinthető hidrosztatikai problémának → centrifugális erőtér ($\underline{g_c}$)
- feltételezhető, hogy a folyadék felszínén a nyomás légköri
- ne felejtsük, hogy a hidrosztatika alapegyenletének egyszerűsített formája csak azonos sűrűségű pontok között írható fel → külön az olajban és külön a vízben

Felírva a hidrosztatika alapegyenletét az 1-2 pontok közé az olajban:

$$p_1 + \rho_{olaj} \cdot U_1 = p_2 + \rho_{olaj} \cdot U_2$$

- a folyadék felszínén a nyomás légköri: $p_1 = p_0$
- $U_1 = gz_1 - \frac{r_1^2\omega^2}{2}$; $U_2 = gz_2 - \frac{r_2^2\omega^2}{2}$
- $r_1 = l_1$; $r_2 = l_1 + l_2$
- mivel a szeparátor vízszintes síkban forog: $z_1 = z_2$

$$p_2 - p_0 = \rho_{olaj} \cdot \left(-\frac{l_1^2\omega^2}{2} + \frac{(l_1+l_2)^2\omega^2}{2}\right) = 800 \cdot \left(-\frac{0{,}2^2 \cdot 30^2}{2} + \frac{0{,}3^2 \cdot 30^2}{2}\right)$$
$$= 18000 Pa$$

Felírva a hidrosztatika alapegyenletét a 2-3 pontok közé a vízben:

$$p_2 + \rho_{víz} \cdot U_2 = p_3 + \rho_{víz} \cdot U_3$$

- $U_2 = gz_2 - \frac{r_2^2\omega^2}{2}$; $U_3 = gz_3 - \frac{r_3^2\omega^2}{2}$
- $r_2 = l_1 + l_2$; $r_3 = l_1 + l_2 + l_3$
- mivel a szeparátor vízszintes síkban forog: $z_2 = z_3$

$$p_3 - p_2 = \rho_{víz} \cdot \left(-\frac{(l_1 + l_2)^2\omega^2}{2} + \frac{(l_1 + l_2 + l_3)^2\omega^2}{2}\right) = 1000 \cdot \left(-\frac{0{,}3^2 \cdot 30^2}{2} + \frac{0{,}4^2 \cdot 30^2}{2}\right) = 31500Pa$$

Mivel a kémcső aljának másik oldalán szintén légköri a nyomás, a kémcső alján a nyomáskülönbség:

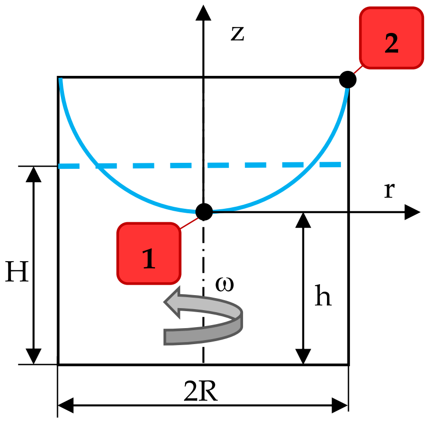
$$p_3 - p_0 = (p_2 - p_0) + (p_3 - p_2) = 18000 + 31500 = 49500Pa$$

A kémcső aljára ható erő ebből:

$$\boldsymbol{F} = \Delta p \cdot A = (p_3 - p_0) \cdot \frac{d^2\pi}{4} = 49500 \cdot \frac{0{,}04^2\pi}{4} = \boldsymbol{62N}$$

FORGÓ EDÉNY

Egy henger alakú edényben, nyugalmi helyzetben H magasságig állt a víz. Amikor az edényt középtengelye körül forgatni kezdjük, a vízfelszín alakja megváltozik: a közepén lecsökken, míg a szélén megnő a vízfelszín magassága.



Kérdés: Mekkora szögsebességgel kell forgatni, hogy a közepén h-ig csökkenjen a magasság?

Adatok: h = 0,2 m; H = 0,3 m; R = 0,1 m; $\rho_{víz}$=1000 kg/m³

MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások:

- a feladat az edénnyel együtt forgó koordináta-rendszerből tekinthető hidrosztatikai problémának → centrifugális erőtér ($\underline{g_c}$)
- feltételezhető, hogy a folyadék felszínén a nyomás légköri
- az összes folyadék az edényben marad, nem csordul túl a peremen

A hidrosztatika alapegyenlete az 1-2 pontok között, nehézségi és centrifugális erőterek figyelembevételével:

$$p_1 + \rho U_1 = p_2 + \rho U_2 \qquad U = U_t + U_c = gz - \frac{r^2\omega^2}{2}$$

$$p_1 + \rho\left(gz_1 - \frac{r_1^2\omega^2}{2}\right) = p_2 + \rho\left(gz_2 - \frac{r_2^2\omega^2}{2}\right) \qquad r_1 = 0, r_2 = R$$

Mivel az 1-es és 2-es pont is szabad felszínen van: $p_1 = p_2 = p_0$

Egyszerűsítve és ω-ra rendezve:

$$\omega = \sqrt{2\frac{g(z_2 - z_1)}{R^2}} \tag{1}$$

Az (1) egyenlet jobb oldalából a magasság-különbség $(z_2 - z_1)$ nem ismert.

A magasság-különbség meghatározásához felhasználjuk, hogy az (2) egyenlet alapján - melyet az (1) egyenlet magasságkülönbségre való átrendezésével nyerünk -, a folyadékfelszín magasság a sugárral négyzetesen nő, azaz a folyadékfelszín alakja egy másodfokú forgási paraboloid lesz.

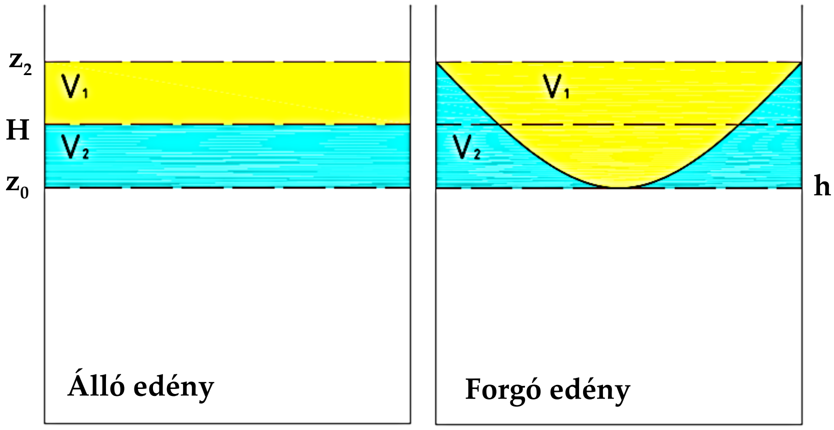
$$z_2 - z_1 = \frac{R^2\omega^2}{2g} \tag{2}$$

Egy $z(r) = k \cdot r^2$ másodfokú forgási paraboloid térfogata a következőképpen számolható:

$$V = \int z dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R kr^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi = 2\pi \cdot k \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{R^2 \pi \cdot z(R)}{2} \tag{3}$$

Tehát a (3) egyenlet alapján másodfokú forgási paraboloid térfogata az őt magába foglaló henger térfogatának fele. Jelen esetben a másodfokú forgási paraboloidunkat magába foglaló hengert V_1 térfogatú levegő és V_2 térfogatú víz tölti ki az alábbi ábrán látható módon. A térfogata pedig a következőképpen számolható ((4)-egyenlet):

$$V = (z_2 - z_1) \cdot R^2 \pi = V_1 + V_2 \tag{4}$$



A forgási paraboloidot a levegő tölti ki, melynek térfogata a fentiek alapján:

$$V_1 = \frac{V}{2} \tag{5}$$

A (4) és (5) egyenletekből következően:

$$V_1 = \frac{V}{2} = \frac{(z_2 - z_1)}{2} R^2 \pi \tag{6}$$

Valamint:

$$V_2 = (H - h) R^2 \pi \tag{7}$$

A (6) és (7) egyenleteket felhasználva könnyen belátható, hogy:

$$z_2 - z_1 = 2(H - h) \tag{8}$$

Az (1) és (8) egyenletekből a szögsebesség számolható:

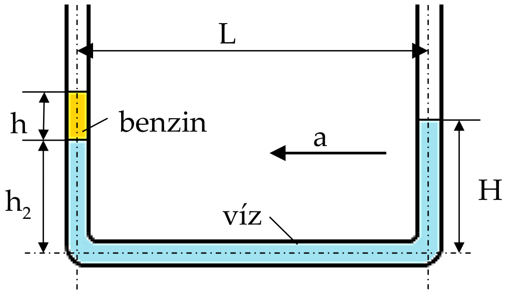
$$\boldsymbol{\omega} = \sqrt{2\frac{g(z_2 - z_1)}{R^2}} = \sqrt{4\frac{g(H - h)}{R^2}} = \sqrt{4\frac{10 \cdot (0{,}3 - 0{,}2)}{0{,}1^2}} = \mathbf{20}\,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}} \tag{9}$$

GYORSULÓ U-CSŐ

Az ábrán látható üvegcsőben víz és benzin található a bemutatott nyugalmi elrendezésben.

Kérdés: Határozza meg a bal oldali benzinoszlopnak a vízszintes csőszakasz feletti felső szintjét,
a) nyugalmi helyzetben
b) ha az üvegcső **a=3m/s²** gyorsulással mozog a megadott irányban.

Adatok: h = 18 mm; H = 55 mm; L = 200 mm;
$\varrho_{víz}$ = 1000 kg/m³; ϱ_{benzin} = 700 kg/m³;
g = 10 N/kg; a = 3 m/s²

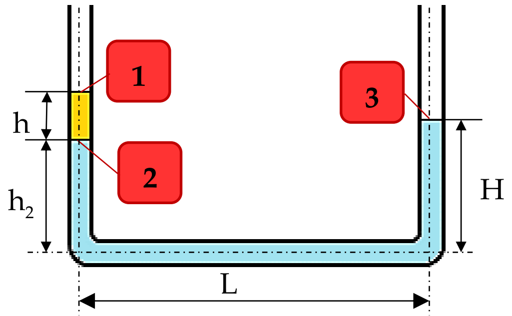


MEGOLDÁS

a) feladatrész

A folyadékszint meghatározása nyugalmi helyzetben, kezdeti megfontolások:

- a feladat hidrosztatikai probléma, kizárólag a nehézségi erőtér hat
- a pontok felvételekor ügyelnünk kell rá, hogy a hidrosztatika alapegyenletének egyszerűsített formája csak állandó sűrűségű közegek esetén írható fel → külön a benzinben és külön a vízben



Felírva a hidrosztatika alapegyenletét az 1-2 pontok közé a benzinben:

$$p_1 + \rho_b U_1 = p_2 + \rho_b U_2$$

- $p_1 = p_0$
- $U_1 = gz_1;\ U_2 = gz_2 \rightarrow$
  $U_1 - U_2 = g(z_1 - z_2) = gh$

$$p_2 = p_1 + \rho_b(U_1 - U_2) = p_0 + \rho_b gh \qquad (1)$$

Felírva a hidrosztatika alapegyenletét a 2-3 pontok közé a vízben:

$$p_2 + \rho_v U_2 = p_3 + \rho_v U_3$$

- a folyadék felszínén a nyomás légköri: $p_3 = p_0$
- $U_2 = gz_2;\ U_3 = gz_3 \rightarrow \qquad U_3 - U_2 = g(z_3 - z_2) = g(H - h_2)$

$$p_2 = p_3 + \rho_v(U_3 - U_2) = p_0 + \rho_v g(H - h_2) \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből:

$$p_0 + \rho_b gh = p_0 + \rho_v g(H - h_2) \rightarrow h_2 = \frac{\rho_v H - \rho_b h}{\rho_v} = \frac{1000 \cdot 55 - 700 \cdot 18}{1000} = 42{,}4mm$$

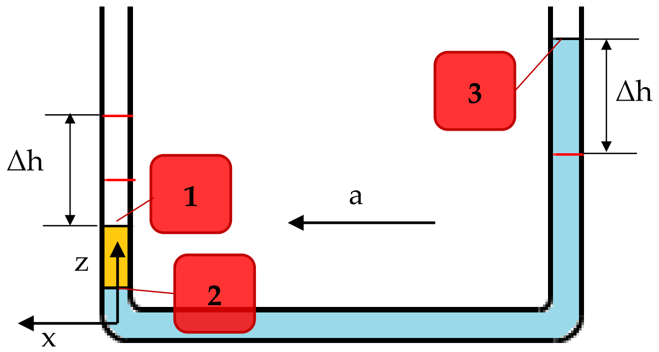
A benzinoszlop vízszintes csőszakasz feletti felső szintje tehát:

$\boldsymbol{h_2} + \boldsymbol{h} = 42{,}4 + 18 = \mathbf{60{,}4}\boldsymbol{mm}$

b) feladatrész

a vízszint meghatározása gyorsulás esetén, kezdeti megfontolások:

- a feladat az U-csővel együtt gyorsuló koordináta-rendszerből tekinthető hidrosztatikai problémának → tehetetlenségi erőtér ($\underline{g}_t$)
- a koordináta-rendszert az U-cső bal alsó sarkához rögzítjük, az x-tengely a gyorsulás-vektor irányába mutat
- a tehetetlenségi erőtér hatására a jobb oldali szárban Δh-val megemelkedik, míg a bal oldali szárban Δh-val lecsökken a folyadékszint. A felemelkedés és lecsökkenés egyenlősége a kontinuitás és a csőátmérő állandóságának folyománya.
- a benzinoszlop teljes egészében a függőleges szárban marad



Felírva a hidrosztatika alapegyenletét a 2-3 pontok közé a vízben:

$p_2 + \rho_v U_2 = p_3 + \rho_v U_3$

- a folyadék felszínén a nyomás légköri: $p_3 = p_0$
- p_2 az a) feladatrészben leírt módon számítható, mivel a tehetetlenségi erőtér a z-tengely irányában nem végez munkát: $p_2 = p_0 + \rho_b g h$
- $U_2 = g z_2 + a x_2 = g(h_2 - \Delta h);\ U_3 = g z_3 + a x_3 = g(H + \Delta h) + a(-L)$

A 2-3 pontok közé felírt hidrosztatikai alapegyenlet a behelyettesítés után tehát a következőképpen alakul:

$p_0 + \rho_b g h + \rho_v\, g(h_2 - \Delta h) = p_0 + \rho_v[g(H + \Delta h) + a(-L)]$

$$\Delta h = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\rho_b}{\rho_v} h + h_2 - H + \frac{a}{g} L\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{700}{1000} \cdot 18 + 42{,}4 - 55 + \frac{3}{10} \cdot 200\right] = 30mm$$

A benzinoszlop vízszintes csőszakasz feletti felső szintje gyorsuló U-cső esetén tehát:

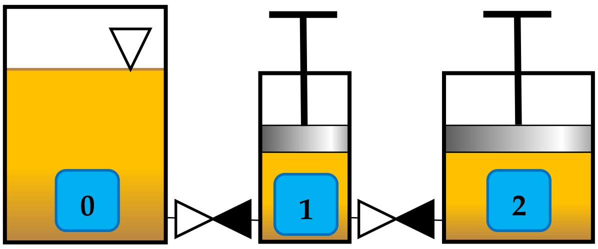
$\boldsymbol{h_2} + \boldsymbol{h} - \Delta\boldsymbol{h} = 42{,}4 + 18 - 30 = \mathbf{30{,}4}\,\boldsymbol{mm}$

Az eredményt visszaellenőrizve a benzinoszlop valóban teljes egészében az U-cső függőleges szárában marad.

Kontinuitás

MUNKAHENGER

Egy hidraulikus emelőben két munka-henger és egy tartály található. A kisebb átmérőjű munkahenger (1) a tartályból (0) szívja és a nagyobb munkahengerbe (2) szállítja az olajat. A visszaáramlást visszacsapó szelepek akadályozzák meg.



Kérdés: a) Mekkora lesz a nagyobb munkahenger sebessége abban az esetben, ha a kisebb munkahenger v_1 sebességgel mozog lefele?

b) A lökethosszok (l) ismeretében határozza meg, hányszor kell a kisebb hengert működtetni a nagyobb teljes kimozdításához!

c) Mekkora erőt ad le a nagyobb munkahenger, ha a kisebbiket F_1 erővel nyomjuk?

Adatok: $d_1 = 10$ mm; $d_2 = 60$ mm; $l_1 = 90$mm; $l_2 = 90$mm; $v_1 = 6$ mm/s; $F_1 = 100$ N

MEGOLDÁS

a) feladatrész

Kontinuitás összenyomhatatlan közeg esetén ($\rho = áll.$):

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$v_1 \frac{d_1^2 \pi}{4} = v_2 \frac{d_2^2 \pi}{4}$$

$$\boldsymbol{v_2} = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{10}{60}\right)^2 = \mathbf{0{,}17} \frac{\boldsymbol{mm}}{\boldsymbol{s}}$$

b) feladatrész

Egy működtetéssel benyomott mennyiség:

$$V_1 = l_1 \cdot A_1 = l_1 \frac{d_1^2 \pi}{4} = 90 \cdot \frac{10^2 \pi}{4} = 7069 mm^3$$

A szükséges működtetések száma:

$$\boldsymbol{n} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{l_2}{l_1} \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \frac{90}{90} \left(\frac{60}{10}\right)^2 = \mathbf{36}$$

c) feladatrész

A hengerekben a hidrosztatikából származó nyomáskülönbségeket elhanyagolva a nyomás állandó:

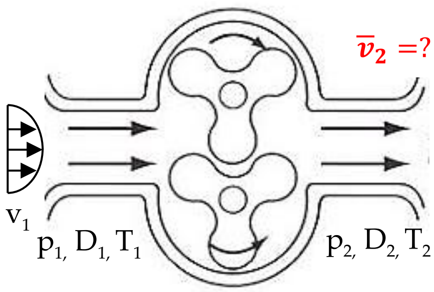
$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = p_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\boldsymbol{F_2} = F_1 \frac{A_2}{A_1} = F_1 \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 100\left(\frac{60}{10}\right)^2 = \boldsymbol{3600N}$$

KOMPRESSZOR

Levegő nyomásának növelésére kompresszort használunk, melynek **szívó**csövében 7-edfokú paraboloid írja le a sebesség eloszlását.

Kérdés:	Az ismert adatok alapján határozzuk meg a **nyomó**csőben az átlagos sebességet!
Adatok:	p_1 = 1 bar; p_2 = 3,5 bar; D_1 = 180 mm; D_2 = 90 mm; T_1 = 300K; T_2 = 380K; R = 287J/(kgK); $v_{max,1}$ = 30 m/s; n = 7



MEGOLDÁS

A kontinuitás alapján a tömegáram állandó, a szívó- és nyomócsonkon megegyezik:

$$q_m = \overline{v}_1\rho_1 A_1 = \overline{v}_2\rho_2 A_2$$

- $\overline{v}_1$ és $\overline{v}_2$ rendre a szívó- és nyomócsonkon kialakuló átlagsebességek
- A_1 és A_2 rendre a szívó- és nyomócsonk-keresztmetszetek: $A = \frac{D^2\pi}{4}$
- a sűrűség az ideális gáztörvényből: $\rho = \frac{p}{RT}$

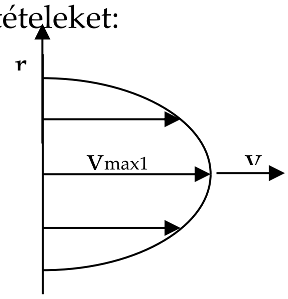
$$q_m = \overline{v}_1 \cdot \frac{p_1}{RT_1} \cdot \frac{D_1^2\pi}{4} = \overline{v}_2 \cdot \frac{p_2}{RT_2} \cdot \frac{D_2^2\pi}{4}$$

$$\overline{v}_2 = \overline{v}_1 \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

A $\overline{v}_1$ átlagsebesség kiszámításához írjuk fel a sebességprofilra jellemző 7-edfokú parabola általános képletét és a hozzá tartozó peremfeltételeket:

$$v = a - b \cdot r^n$$

- $r = 0 \;\rightarrow\; v = v_{max} \;\rightarrow\; a = v_{max}$
- $r = R \;\rightarrow\; v = 0 \;\rightarrow\; 0 = v_{max} - b \cdot R^n \;\rightarrow b = \frac{v_{max}}{R^n}$



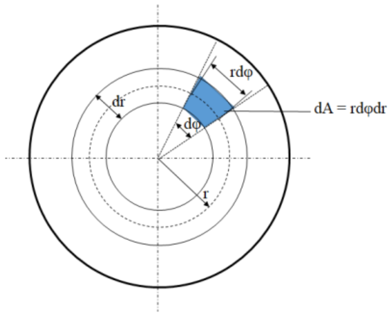
$$v = v_{max} - v_{max} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n = v_{max} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]$$

A csőben kialakuló térfogatáram:

$$q_V = \int v dA = \int_0^R v \cdot 2\pi r \cdot dr = \int_0^R v_{max} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right] \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$= v_{max} \cdot 2\pi \cdot \int_0^R \left[r - \frac{r^{n+1}}{R^n}\right] \cdot dr = v_{max} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{n+2} \cdot \frac{r^{n+2}}{R^n}\right]_0^R$$

$$= v_{max} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{R^2}{2} - \frac{1}{n+2} \cdot \frac{R^{n+2}}{R^n}\right] = R^2\pi \cdot v_{max} \left[\frac{n}{n+2}\right] = A \cdot v_{max} \left[\frac{n}{n+2}\right]$$



Ebből az átlagsebesség a szívócsőben:

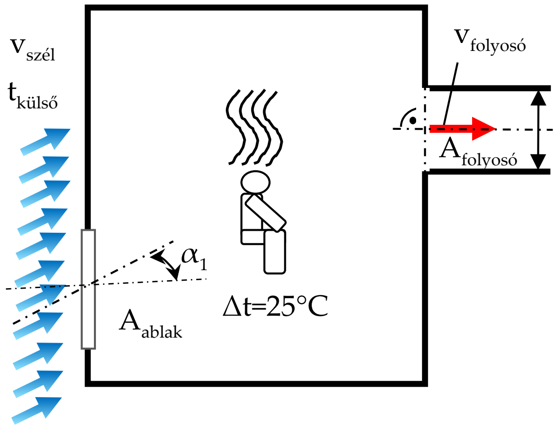
$$\overline{v}_1 = \frac{q_v}{A_1} = v_{max} \left[\frac{n}{n+2}\right] = 30 \cdot \left[\frac{7}{7+2}\right] = 23{,}3 \frac{m}{s}$$

Átlagsebesség a nyomócsőben a kontinuitás alapján:

$$\boldsymbol{\overline{v}_2} = \overline{v}_1 \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = 23{,}3 \cdot \frac{1}{3{,}5} \cdot \frac{380}{300} \cdot \left(\frac{180}{90}\right)^2 = \boldsymbol{33{,}8 \frac{m}{s}}$$

K.1.50.

A K.1.50. előadóterem téglalap alakú nyitott ablakán 45°-os szögben fúj be a hűvös, őszi szél. A teremben ülő 100 hallgató és a fűtés miatt a levegő 25°C-os hőmérséklet-növekedés után a folyosóra áramlik ki.
A folyosó a terem falára merőleges tengelyű, téglalap keresztmetszetű csatornának tekinthető. A terem mindenhol máshol zárt.



Kérdés: Határozza meg:
a) a beáramló levegő térfogatáramát!
b) a termen átáramló levegő tömegáramát!
c) a folyosón áramló levegő térfogatáramát!
d) a folyosón áramló levegő átlagsebességét!

Adatok: $A_{ablak} = 6m\times3m$; $A_{folyosó} = 2m\times2m$; α = 45°; $t_{külső}$ = 10°C; Δt = 25°C; $v_{szél}$ = 3km/h;
R = 287J/(kgK); p_0 = 1 bar

MEGOLDÁS

a) feladatrész

az ablakon beáramló szél térfogatárama, figyelembe véve a ferde megfúvást:

$$\boldsymbol{q_{v,szél}} = v_{szél} \cdot A_{ablak} \cdot \cos\alpha = \frac{3}{3{,}6} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \cos 45^{\circ} = \mathbf{10,6} \frac{\boldsymbol{m^3}}{\boldsymbol{s}}$$

b) feladatrész

a tömegáram számításához szükséges a beáramló levegő sűrűségének számítása, mely az ideális gáztörvényből:

$$\rho_{szél} = \frac{p_0}{R \cdot T_{szél}} = \frac{10^5}{287 \cdot 283} = 1{,}23 \frac{kg}{m^3}$$

A termen átáramló tömegáram:

$$\boldsymbol{q_m} = q_{v,szél} \cdot \rho_{szél} = 10{,}6 \cdot 1{,}23 = \mathbf{13,1} \frac{\boldsymbol{kg}}{\boldsymbol{s}}$$

c) feladatrész

a folyosón áramló levegő térfogatáramához szükséges a kiáramló levegő sűrűsége (a tömegáramok megegyeznek):

$$\rho_{ki} = \frac{p_0}{R \cdot (T_{szél} + \Delta T)} = \frac{10^5}{287 \cdot (283 + 25)} = 1{,}13\,\frac{kg}{m^3}$$

$$\boldsymbol{q_{v,folyosó}} = \frac{q_m}{\rho_{ki}} = \frac{13{,}1}{1{,}13} = \mathbf{11{,}6\,\frac{m^3}{s}}$$

d) feladatrész

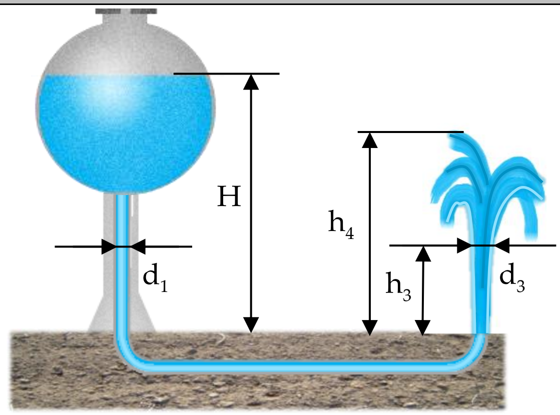
a folyosón áramló levegő átlagsebessége:

$$\boldsymbol{v_{folyosó}} = \frac{q_{v,folyosó}}{A_{folyosó}} = \frac{11{,}6}{2 \cdot 2} = \mathbf{2{,}9\,\frac{m}{s}}$$

Bernoulli-egyenlet

SZÖKŐKÚT

Az ábrán látható szökőkutat egy a légkörre nyitott víztározó táplál, melyben a vízszint talajtól mért magassága 20m. A szökőkutat a víztározóval összekötő veszteségmentes vezeték átmérője 50mm, a vége a talajszinten van.



Kérdés: a) Mekkora sebességgel lép ki a víz a vezetékből?

b) Mekkora a szökőkútból kiáramló vízsugár átmérője 16 méter magasan?

c) Milyen magasra megy fel a vízsugár?

Adatok: H = 20m; h_3 = 16m; d_1 = 50mm; g = 10N/kg

MEGOLDÁS

<u>Kezdeti megfontolások</u>: a Bernoulli egyenlet az Euler-egyenlet vonal menti integrálja. A megfelelő koordinátarendszer kiválasztásával illetve a megfelelő útvonalon való integrálással az egyenlet lényegesen leegyszerűsíthető:

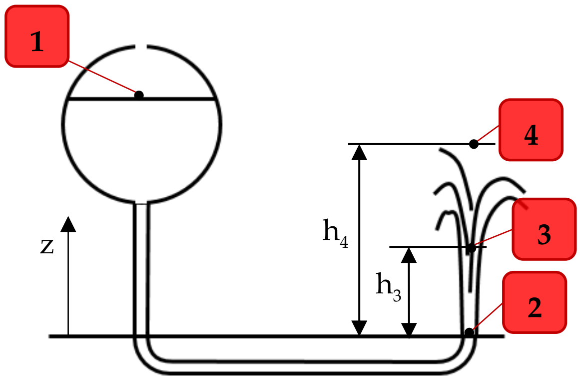
- **Stacionárius a feladat, vagy azzá tehető?** A víztározó térfogata „elég” nagy, így a víztározóban a vízszint csökkenésétől eltekintünk (*H=áll.*). Valamint a szökőkút megnyitásától számítva eltelik annyi idő, hogy az áramlás elérje a maximális sebességét, így a feladat stacionáriusré válik.
- **Lehet áramvonalon integrálni?** Mivel a víztározóban feltételezzük, hogy a vízszint nem változik, azért az egész térfogatban áll a folyadék. Így bármely vonal áramvonal. A csővezeték mentén haladva szintén adott az áramvonalon való integrálás (geometriai kényszer), csakúgy, mint a szökőkút szabadsugarában függőlegesen felfele haladva is.
- **Potenciálos az erőtér?** Igen, a nehézségi erőtér potenciálos.
- **Állandó a sűrűség, vagy ha nem, akkor csak a nyomástól függ?** Igen, a víz összenyomhatatlanak tekinthető, a sűrűség állandó.

Ezen megfontolások alapján a Bernoulli-egyenlet a következő, formában írható fel:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

<u>Pontok felvétele:</u> a pontokat célszerű úgy felvenni, hogy az egyik pontban minden változó (nyomás, potenciál, sebesség), míg a másik pontban a keresett változón kívül a másik két változó ismert legyen. Ennek alapján az 1-es pontot a víztározóban lévő

víz felszínén; a 2-es pontot a vezetékből való kiáramlásnál, talajszinten; a 3-as pontot h_3 magasságban, a vízsugárban; a 4-as pontot pedig a szökőkútból kiáramló vízsugár tetején vesszük fel.



a) feladatrész: Bernoulli-egyenlet az 1-2 pontok között:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

- $p_1 = p_0 \leftarrow$ a vízfelszínen a nyomás légköri (p_0), mivel a víztorony a légkörre nyitott
- $v_1 \approx 0 \leftarrow A_1 \gg A_2$ (lásd kontinuitás)
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ a vízsugár szabadsugár, a benne uralkodó statikus nyomás megegyezik a környezeti nyomással, jelen esetben a légköri nyomással, aminek 1 és 2 pontok közötti változása elhanyagolható a víz béli nyomásváltozáshoz képest (p_0)
- $U_1 - U_2 = g \cdot (z_1 - z_2) = g \cdot H$

Ebből a vízsugár kilépési sebessége számítható:

$$\boldsymbol{v_2} = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 10} = \mathbf{20} \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$$

b) feladatrész: Bernoulli-egyenlet az 1-3 pontok között:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_3 + \rho U_3 + \frac{\rho}{2} v_3^2$$

- az a) feladatrész megfontolási itt is érvényesek
- $U_1 - U_3 = g \cdot (z_1 - z_3) = g \cdot (H - h_3)$

Ebből a vízsugár sebessége a 3-as pontban számítható:

$$v_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h_3)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot (20 - 16)} = \mathbf{8{,}94} \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$$

A vízsugár 3-as pont béli átmérője a 2-3 pontok közé felírt kontinuitási egyenlet segítségével határozható meg:

$$\rho_2 v_2 A_2 = \rho_3 v_3 A_3$$

- $\rho_2 = \rho_3 \leftarrow$ a víz összenyomhatatlan

- $A_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4}$; $A_3 = \frac{d_3^2 \pi}{4}$

Ebből a vízsugár d_3 átmérője:

$$\boldsymbol{d_3} = d_2 \sqrt{\frac{v_2}{v_3}} = 50 \cdot \sqrt{\frac{20}{8{,}94}} = \boldsymbol{74{,}8mm}$$

c) feladatrész: Bernoulli-egyenlet az 1-4 pontok között:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_4 + \rho U_4 + \frac{\rho}{2} v_4^2$$

- az a) feladatrész megfontolási itt is érvényesek
- $p_4 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár
- $v_4 = 0 \leftarrow$ a vízsugár a felső holtpontján megáll, sebessége 0

Ebből következik, hogy:

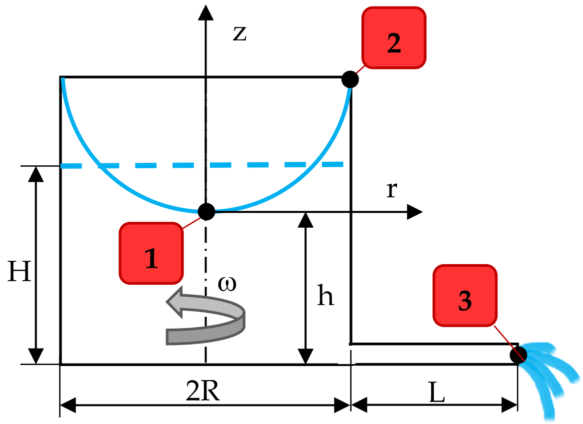
$$U_4 = U_1 \rightarrow \boldsymbol{h_4 = H = 20m}$$

A vízsugár tehát 20m magasra megy fel. Ez várható eredmény, hiszen számításaink során az áramlási veszteségeket elhanyagoltuk.

FORGÓ EDÉNY KIFOLYÁSSAL

Egy henger alakú edény oldalához L hosszúságú, a végén elzáró csappal felszerelt vízszintes kifolyócsövet csatlakoztatunk, az ábrán látható módon.

A hengert H magasságig töltjük vízzel, majd tengelye körül ω szögsebességgel forgatni kezdjük. A kifolyócső végén lévő csap megnyitását követően a víz folyni kezd a tartályból.



Kérdés: a) Számítással határozzuk meg, hogy mekkora lesz a felszín legnagyobb felemelkedése!

b) Határozzuk meg a kiáramlás térfogatáramát!

Adatok: ω = 20 1/s; H = 0,2m; L = 0,2m; R = 0,1m; $d_{cső}$ = 10mm; ϱ = 1000kg/m³; g = 10N/kg

MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások:

- a feladatot együtt forgó koordináta-rendszerben oldjuk meg
- a henger sugara kellően nagy, benne a vízszint süllyedése elhanyagolható (konti.)
- a térfogatáramot a cső nyitását követő, kezdeti tranziens folyamatok lecsengése után határozzuk meg
  → a feladat stacionáriusnak tekinthető
- a folyadék felszíne másodfokú paraboloid lesz, a nyugalmi állapothoz képest a felszín lesüllyedése és felemelkedése azonos (ld. korábbi forgó edényes feladat)
- feltételezhető, hogy a folyadék felszínén a nyomás légköri

a) feladatrész: hidrosztatika az 1-2 pontok közé, együtt forgó rendszerben

$$p_1 + \rho \cdot U_1 = p_2 + \rho \cdot U_2$$

- $p_1 = p_2 = p_0$
- $U_1 - U_2 = g \cdot (z_1 - z_2) + \frac{[-r_1^2 - (-r_2^2)] \cdot \omega^2}{2}$

$$U_1 - U_2 = 0 = g \cdot (z_1 - z_2) + \frac{R^2 \cdot \omega^2}{2} \rightarrow z_2 - z_1 = \frac{R^2 \cdot \omega^2}{2g} = \frac{0{,}1^2}{2 \cdot 10} \cdot 20^2 = 0{,}2m$$

Az eredeti vízszinthez képest a felemelkedés (és lesüllyedés) mértéke:

$$\frac{z_2 - z_1}{2} = 0{,}1m$$

A felszín legnagyobb lesüllyedése és felemelkedése tehát:

$$\boldsymbol{z_1} = H - \frac{z_2 - z_1}{2} = 0{,}2 - 0{,}1 = \mathbf{0{,}1}\boldsymbol{m};\ z_2 = H + \frac{z_2 - z_1}{2} = 0{,}2 + 0{,}1 = \mathbf{0{,}3}\boldsymbol{m}$$

b) feladatrész: Bernoulli egyenlet az 1-3 pontok közé, együtt forgó rendszerben (w – relatív sebesség)

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 + \rho \cdot U_1 = p_3 + \frac{\rho}{2} \cdot w_3^2 + \rho \cdot U_3$$

- $w_1 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_{cső}$ (konti.)
- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár
- $U_1 - U_3 = g \cdot (z_1 - z_3) + \frac{[-r_1^2 - (-r_3^2)] \cdot \cdot \omega^2}{2}$

Ebből a kilépés relatív sebessége számolható:

$$w_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot z_1 + (R + L)^2 \cdot \omega^2} = 6.16 \frac{m}{s}$$

Melyből a térfogatáram:

$$\boldsymbol{q_v} = w_3 A_{cső} = w_3 \frac{d_{cső}^2 \pi}{4} = 6{,}16 \cdot \frac{0{,}01^2 \pi}{4} = \mathbf{0{,}48} \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{s}}$$

CSŐÍV	
Egy vízszintes síkban vezetett 100 x 100 mm oldalhosszúságú, négyzet keresztmetszetű csővezetékbe egy derékszögű csőívet építünk be. A belső és külső negyed körívek sugara 0,1 ill. 0,2 m. Az áramló közeg sűrűsége 1,2 kg/m^3. A nyomáskülönbség a csőív külső és belső falán 240Pa.	
Kérdés:	Határozzuk meg az áramló közeg térfogatáramát!
Adatok:	A = 100 x 100mm; r_1 = 0,1m; r_2 = 0,2 m; $p_2 - p_1$ = 240Pa; $\rho_{levegő}$ = 1,2kg/m^3

A térfogatáram kiszámítása két megoldással is lehetséges:

MEGOLDÁS 1. – EULER-EGYENLET

Kezdeti megfontolások:

- a könyök külső és belső oldalán kialakuló nyomáskülönbség jól magyarázható az Euler-egyenlet normál irányú komponens-egyenletével: görbült áramvonalak esetén (mint amilyen a csőkönyökben is kialakul) a nyomás a görbületi középponttól kifele haladva nő → tehát a csőkönyök külső oldalán mérünk nagyobb nyomást
- az Euler-egyenletet csak súrlódásmentes áramlások leírására használthatjuk → jelen esetben a súrlódástól eltekinthetünk, mivel a csőívben csak rövid szakaszon súrlódik a folyadék az álló fallal, az így keletkező veszteség csekély, elhanyagolható
- a csőkönyök vízszintes síkban fekszik, így a nehézségi térerő hatása elhanyagolható

Az Euler-egyenlet normál irányú komponense:

$$-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial n}+g_n=-\frac{v^2}{R}$$

- $\frac{\partial p}{\partial n} \cong \frac{p_2-p_1}{r_2-r_1}$
- $R=\frac{r_1+r_2}{2}=0.15\,m$ ← az áramvonalak görbületi sugarát a külső és belső ív átlagával közelítjük
- $g_n=0$ ← a csőkönyök vízszintes síkban van

Ebből a csőben kialakuló középsebesség számolható:

$$v=\sqrt{\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}=\sqrt{\frac{(r_1+r_2)}{2\rho}\frac{p_2-p_1}{r_2-r_1}}=\sqrt{\frac{(0{,}1+0{,}2)}{2\cdot 1{,}2}\frac{240}{0{,}2-0{,}1}}=17{,}32\,\frac{m}{s}$$

A kialakuló térfogatáram:

$$\boldsymbol{q_v}=v\cdot A=17{,}32\cdot 0{,}1^2=\mathbf{0{,}1732}\,\frac{\boldsymbol{m^3}}{\boldsymbol{s}}$$

MEGOLDÁS 2. – BERNOULLI-EGYENLET

Kezdeti megfontolások:

- a csőkönyökben kialakuló áramkép hasonló egy szabad örvény forgatagához, melyben a folyadékrészek az örvény tengelye körül koncentrikus körökben haladnak
- a potenciálos örvény feltételezése jó közelítést jelent, mert a Thomson-tétel értelmében súrlódásmentes áramlások esetén a cirkuláció időben állandó → mivel nyugvó levegőből szívunk (aminek cirkulációja nulla), ezért a csőkönyökben áramló levegő cirkulációja is jó közelítéssel nulla lesz
- a potenciálos örvénysebessége leírható egy konstans és a sugár hányadosával: $v = \frac{K}{r}$
- a potenciálos örvényben a folyadékrészek nem forognak, így a Bernoulli-egyenlet egyszerűsíthető: $\int_1^2 \underline{v} \times rot\underline{v} \cdot d\underline{s} = 0$

Bernoulli-egyenlet a csőkönyök belső (1) és külső (2) pontja közé:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

- $U_1 = U_2 \leftarrow z = áll.$
- $v_1 = \frac{K}{r_1};\ v_2 = \frac{K}{r_2} \leftarrow$ potenciálos örvény

Az ismert adatokból a K konstans számítható:

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} K^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) \rightarrow K = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 240}{1{,}2\left(\frac{1}{0{,}1^2} - \frac{1}{0{,}2^2}\right)}} = 2{,}31 \frac{m^2}{s}$$

A csőkönyök belső és külső oldalán kialakuló sebességek:

$$v_1 = \frac{K}{r_1} = \frac{2{,}31}{0{,}1} = 23{,}1 \frac{m}{s} \qquad v_2 = \frac{K}{r_2} = \frac{2{,}31}{0{,}2} = 11{,}55 \frac{m}{s}$$

A csőkönyökben kialakuló átlagsebességet a belső és külső ívben kialakuló sebességek számtani közepével számolva

$$\overline{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{23{,}1 + 11{,}5}{2} = \mathbf{17{,}32 \frac{m}{s}}$$

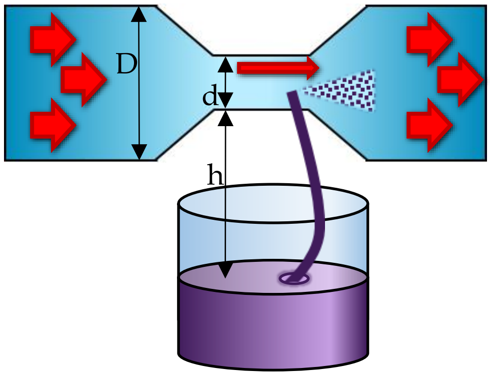
a térfogatáram:

$$\boldsymbol{q_v} = \overline{v} \cdot A = 17.32 \cdot 0{,}1^2 = \mathbf{0{,}1732 \frac{m^3}{s}}$$

Látható, hogy a két különböző megoldási módszerrel számolt térfogatáramok jó egyezést mutatnak.

FESTÉKSZÓRÓ

Az ábrán látható festékszóró a következő elven működik: a Venturi-csőbe érkező levegő a szűk áramlási keresztmetszetbe érve felgyorsul, statikus nyomása ezáltal lecsökken. A lecsökkent nyomás a festékszóró alatt található, légkörre nyitott tartályból a festéket egy csövön keresztül felszívja, majd a festék a légárammal elkeveredve kiáramlik a kezelendő felületre.



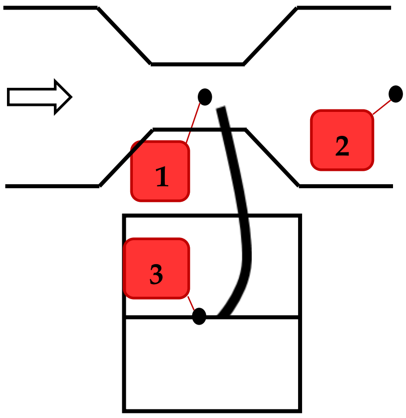
Kérdés: Milyen magasra emelhetjük a festékszórót a tartályhoz képest, hogy az még éppen képes legyen a tartályból a festéket feszívni?

Adatok: D = 32mm; d = 20mm; q_v=72 m³/h, $\varrho_{festék}$ = 1000 kg/m³; ϱ_{lev} = 1,2 kg/m³

MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások:

- ahogy a festékszórót egyre magasabbra emeljük, a csőszűkületben kialakult depressziónak egyre nagyobb festékoszlopot kell megtartania. A felszívott festék térfogatárama az festékszóró pozíciójának emelésével egyre csökken, mígnem elérjük azt a pontot, amikor 0 lesz. Ezt a h_{max} magasságot keressük.
- a számításhoz szükséges pontok felvétele:



Bernoulli-egyenlet az 1-2 pontok közé, a levegőben:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho_{lev}}{2} v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho_{lev}}{2} v_2^2$$

- $U_1 = g \cdot z_1 = U_2 = g \cdot z_2 \leftarrow z_1 = z_2$
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár
- $q_{v,1} = q_{v,2} = q_v \rightarrow v_1 = \frac{q_v}{A_1};\ v_2 = \frac{q_v}{A_2}$

Ebből az 1-es pontban fellépő depresszió (légköri nyomás alatti nyomás) számítható:

$$p_0 - p_1 = \frac{\rho_{lev}}{2} \cdot q_v^2 \cdot \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) = 8 \cdot \rho_{lev} \cdot \frac{\dot{q}_v^{\,2}}{\pi^2} \left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4}\right)$$

$$= 8 \cdot 1{,}2 \cdot \left(\frac{72}{3600}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{0{,}02^4} - \frac{1}{0{,}032^4}\right) = 2060 Pa$$

Bernoulli egyenlet a 3-1 pontok közé, a festékben:

$$p_3 + \rho_{festék} U_3 + \frac{\rho_{festék}}{2} v_3^2 = p_1 + \rho_{festék} U_1 + \frac{\rho_{festék}}{2} v_1^2$$

- $p_3 = p_0 \leftarrow$ légkörre nyitott
- $v_1 = v_2 = 0$
- $U_1 - U_3 = g \cdot h_{max}$

$$p_0 - p_1 = \rho_{festék} \cdot g \cdot h_{max} \rightarrow \boldsymbol{h_{max}} = \frac{p_0 - p_1}{\rho_{festék} \cdot g} = \frac{2060}{1000 \cdot 10} = \mathbf{0.206m}$$

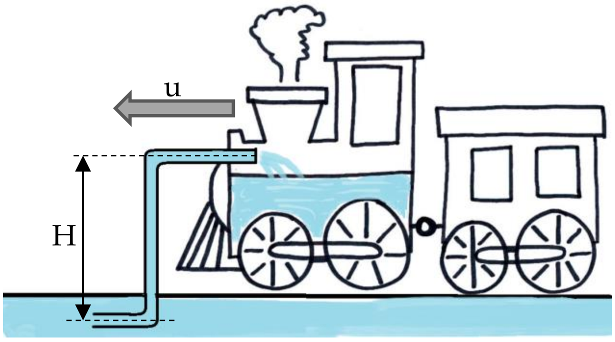
MOZDONY VÍZFELSZÍVÓ

A vadnyugaton gőzmozdonyokkal szállítottak egy időben mindent. A probléma az volt, hogy a gőzmozdonyoknak időről időre meg kellett állni vizet vételezni és ekkor sebezhetők voltak, valamint kiesést okozott a menetidejükben. A megoldást egy a mozdony víztartályából kivezetett S alakú cső és egy igen hosszú, a sínnel párhuzamos vályú jelentette, amiben a csövet végighúzták, ezáltal menet közben tudtak vizet vételezni.

Legyen a vályúbeli vízszint és az S-cső szintkülönbsége *H*, a mozdony sebessége *u*, a cső átmérője *D*, a tartály térfogata *V*. A tartály felül nyitott, nem lehet benne túlnyomás.

Kérdés: Milyen hosszú vályúra van szükség a feltöltéshez?

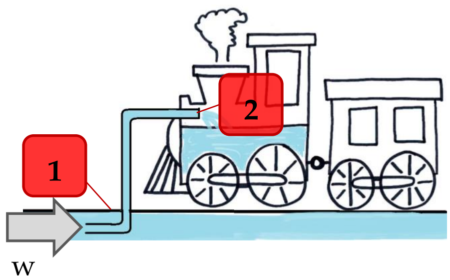
Adatok: H = 2m; u = 36km/h; D=0,05m; V=1m³



MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások:

- a megoldás relatív rendszerben történik, amelyet a vonathoz rögzítünk. Ebben a mozdony áll, a vályúban a víz *w*=*u* sebességgel jön a mozdony felé.
- a Bernoulli egyenletet a vályú béli vízfelszín és a tartálybéli kilépés között írjuk fel



Bernoulli egyenlet az 1-2 pontok közé:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 + \rho \cdot U_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot w_2^2 + \rho \cdot U_2$$

- $p_1 = p_0 \leftarrow$ nyílt vízfelszín
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár
- $w_1 = u$
- $U_2 - U_1 = g \cdot H$

Fentiekből a csőből kilépő víz sebessége és térfogatárama számítható:

$$w_2 = \sqrt{u^2 - 2 \cdot g \cdot H} = \sqrt{\left(\frac{36}{3{,}6}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot 2} = 7{,}74 \frac{m}{s}$$

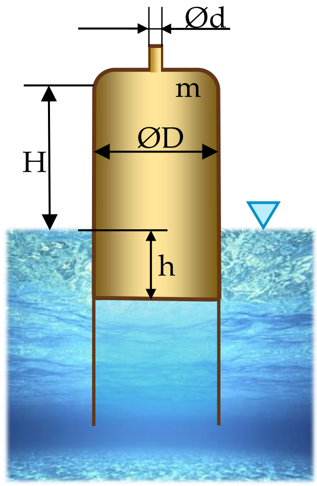
$$q_v = w_2 \cdot A_{cső} = 7{,}74 \cdot \frac{0{,}05^2 \cdot \pi}{4} = 0{,}0152 \frac{m^3}{s}$$

A tartály megtöltéséhez szükséges idő, és ezalatt a vonat által megtett út (vagyis a vályú szükséges hossza):

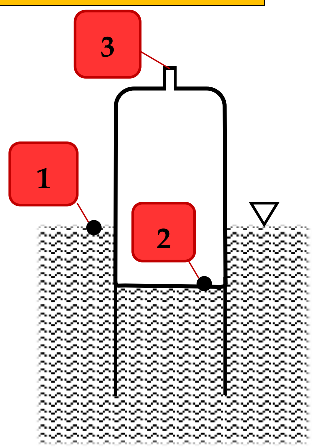
$$t = \frac{V}{q_v} = \frac{1}{0{,}0152} = 65.7\ s$$

$$\boldsymbol{L} = u \cdot t = \frac{36}{3{,}6} \cdot 66 = \boldsymbol{657\ m}$$

HARSONA

<table>
<tr><td colspan="2">Egy ókori templomban hatalmas harsonák megszólaltatásához nagy, felül zárt, alul nyitott bronz hengereket használtak, amiket fokozatosan vízbe merítettek. A bronzhengerek súlya túlnyomást hozott létre az üreges hengerben, ami a hengerek tetején levő fúvókákon jutott ki, így szólaltatta meg a harsonákat. A bronzhenger vízbe merülése miatti súlycsökkenése, a levegőre ható súlyerő, a vízfelszín emelkedési sebessége valamint a harsonán létrejövő nyomásváltozás elhanyagolható.</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Kérdés:</td><td>Stacionárius állapotot feltételezve, határozza meg, hogy
a) mekkora a hengerfal két oldalán a vízszintek különbsége h!
b) mekkora a kiáramló térfogatáram q_V!
c) mennyi ideig szól a harsona, ha a henger $\Delta H = 0{,}6$m-t süllyed!</td></tr>
<tr><td>Adatok:</td><td colspan="2">$m = 0{,}5t$; $D = 1{,}2m$; $H = 3m$; $\rho_{víz} = 1000kg/m^3$; $\rho_{levegő} = 1{,}2kg/m^3$; $d = 12mm$; $g = 10N/kg$</td></tr>
</table>

MEGOLDÁS



a) feladatrész: A henger egyenesvonalú egyenletes mozgást (EVEM) végez, ezért a túlnyomásból származó erő kiegyenlíti a súlyerőt:

$$(p_2 - p_0) \cdot A_{alap} = m \cdot g$$

$$p_2 - p_0 = \frac{m \cdot g}{A_{alap}} = \frac{500 \cdot 10}{\frac{1{,}2^2 \cdot \pi}{4}} = 4421\ Pa$$

A vízszintkülönbség, mint egy U-csöves manométer mutatja a nyomáskülönbséget (hidrosztatika 1-2). A vízfelszínen a nyomás légköri: $p_1 = p_0$

$$\boldsymbol{p_2 - p_1} = \rho_{víz} \cdot g \cdot h \rightarrow h = \frac{p_2 - p_0}{\rho_{víz} \cdot g} = \frac{4421}{1000 \cdot 10} = \mathbf{0{,}442}\boldsymbol{m}$$

b) feladatrész: Bernoulli-egyenlet a kifúvás (3) és a henger belseje (2) közé levegőre:

$$p_2 + \frac{\rho_{lev}}{2} \cdot v_2^2 + \rho \cdot U_2 = p_3 + \frac{\rho_{lev}}{2} \cdot v_3^2 + \rho \cdot U_3$$

- $v_2 \approx 0 \leftarrow A_{alap} \gg A_{ki}$ (konti.)
- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár
- $U_2 - U_3 \approx 0 \leftarrow$ a levegőre ható súlyerőt elhanyagoltuk

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho_{lev}} \cdot (p_2 - p_0)} = \sqrt{\frac{2}{1{,}2} \cdot 4421} = 85{,}84 \frac{m}{s}$$

A kiáramló térfogatáram: $q_v = A_{ki} \cdot v_2 = \frac{0{,}012^2 \cdot \pi}{4} \cdot 85{,}84 = \mathbf{0{,}0097} \boldsymbol{\frac{m^3}{s}}$**=9,7**$\boldsymbol{\frac{liter}{s}}$**,**

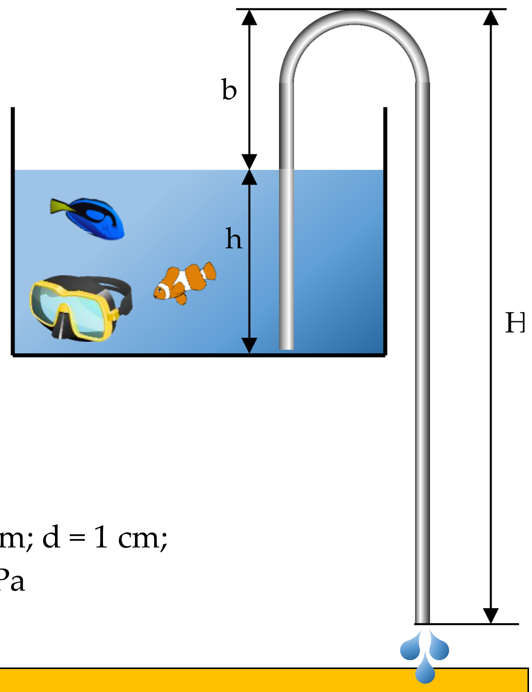
ami elég komoly vitálkapacitásnak felel meg!

c) feladatrész:

$$q_V = \frac{\Delta V}{T} \rightarrow \boldsymbol{T} = \frac{\Delta V}{q_V} = \frac{\Delta H \cdot D^2 \cdot \frac{\pi}{4}}{q_V} = \mathbf{69{,}9\ s}$$

AKVÁRIUM LEÜRÍTÉSE

Egy 1000 literes akváriumban 20 cm magasan áll a víz. A leürítést egy 1 cm átmérőjű, 2,4 m hosszúságú szivornyával (pl. szilikoncsővel) végezzük.

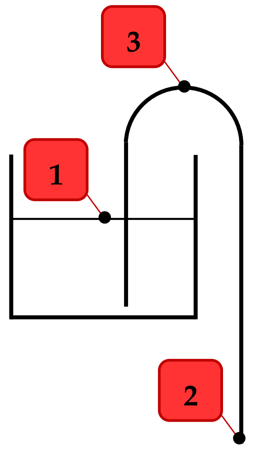


Kérdés: a) Határozza meg a folyadékoszlop gyorsulását a nyitás pillanatában!
b) Becsülje meg állandósult állapotban a leürítéshez szükséges időt!
c) Hogyan tudjuk csökkenteni a leürítéshez szükséges időt?
d) Mi a csőhossz növelésének elvi határa?

Adatok: V = 1000 l; h = 0,2 m; H = 2 m; b = 0,2 m; d = 1 cm;
$\varrho = 1000\ kg/m^3$; $p_0 = 10^5$ Pa; $p_{gőz} = 10^3$ Pa

MEGOLDÁS

a) feladatrész: írjuk fel az instacioner Bernoulli-egyenletet a vízfelszín (1) és a cső kilépő keresztmetszete közé (2):



$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = \rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} + p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

- a gyorsulás iránya 1 → 2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_1 = p_2 = p_0 \leftarrow$ (1) szabadfelszín és (2) szabadkifolyás
- $v_1 = v_2 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- $U_1 - U_2 = g \cdot (z_1 - z_2) = g \cdot (H - b)$
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik. Hirtelen keresztmetszetváltozás esetén a gyorsulásnak szakadása van, ott az integrálást ketté kell bontani.
- a tartályban az áramlási keresztmetszet nagyságrendekkel nagyobb, mint a cső keresztmetszete, ezért a folytonossági tételt felhasználva feltételezhetjük, hogy a tartályban a gyorsulás közel zérus:

$$\rightarrow \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} = a_{cső} \cdot L_{cső} = a_{cső} \cdot (h + b + H)$$

A vízoszlop kezdeti gyorsulása tehát:

$$a_{cső} = \frac{g(H-b)}{(H+b+h)} = \frac{10 \cdot (2-0{,}2)}{2+0{,}2+0{,}2} = \mathbf{7{,}5\,\frac{m}{s^2}}$$

b) feladatrész: a nyitás követően az áramlás egy kvázistacionárius állapotba áll be, ahol a potenciálkülönbség nem a csőben lévő lokális gyorsulást fogja fedezni, hanem a csőszájánál fellépő konvektív gyorsulást (az akvárium béli 0 sebességről felgyorsul a folyadék a cső béli sebességre). Írjuk fel a stacionárius Bernoulli-egyenletet az 1-2 pontok közé:

$$p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 + \rho U_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \rho U_2$$

- $p_1 = p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadfelszín és szabadkifolyás
- $U_1 - U_2 = g \cdot (z_1 - z_2)$
- $v_1 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_{cső}$ (konti.)

Ebből a kiáramlási sebesség:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (z_1 - z_2)}$$

Látható, hogy az áramlás hajtóereje a potenciálkülönbég (szintkülönbség) a két pont között. Beláthatjuk azt is, hogy mivel a szintkülönbség folyamatosan csökken, ahogy ürül a tartály, a kiáramlási sebesség is folyamatosan csökkenni fog. Ez azt is jelenti, hogy továbbra is lesz lokális gyorsulás (lassulás), azonban élhetünk azzal a feltételezéssel, hogy ez a tag elhanyagolható, mivel vízfelszín süllyedési sebessége alapvetően kicsi.

A leürítés elején: $(z_1 - z_2)_e = H - b \rightarrow v_{2,e} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - b)} = 6\, m/s$

A leürítés végén: $(z_1 - z_2)_v = H - b - h \rightarrow v_{2,v} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - b - h)} = 5{,}66\, m/s$

Így az átlagos kiáramlási sebesség:

$$\overline{v}_2 = \frac{(v_{2,e} + v_{2,v})}{2} = 5{,}83\, m/s$$

Ebből az átlagos térfogatáram:

$$\overline{q}_v = \overline{v}_2 \cdot A_{cső} = 5{,}83 \cdot \frac{0{,}01^2\pi}{4} = 4{,}58 \cdot 10^{-4}\, \frac{m^3}{s} = 0{,}458\frac{l}{s}$$

És a leürítési idő:

$$T = \frac{V}{\overline{q}_v} = \frac{1000}{0{,}458} = \mathbf{2184{,}5\ s \approx 36 min}$$

A leürítési idő nagyságából és v_2 kismértékű megváltozásából látszik, hogy valóban nem követtünk el számottevő hibát az időfüggő tag elhanyagolásával.

b) feladatrész: ALTERNATÍV MEGOLDÁS

Vezessük be a következő jelöléseket:

- $\alpha = \frac{A_{cső}}{A_{felszín}}$; $(A_{felszín} = \frac{V}{h})$
- $x = z_1 - z_2$

A korábban felírt Bernoulli-egyenlet alapján:

$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot x}$

A kontinuitási egyenlet alapján: $v_1 = \alpha \cdot v_2 = \alpha \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot x}$

Másrészről pedig a felszín v_1 süllyedési sebessége meg fog egyezni a szintkülönbség időegységre eső megváltozásával:

$$-v_1 = -\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot x} = \frac{dx}{dt}$$

Ez egy szétválasztható differenciálegyenlet, amelyet a következő módon oldhatunk meg:

$$\int_0^T dt = -\frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_e^v \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$T = -\frac{2}{\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \left[\sqrt{x}\right]_e^v$$

$x_e = H - b; x_v = H - b - h \rightarrow T = \mathbf{2184,5\ s}$

c) feladatrész: írjuk fel a leeresztéshez szükséges időt paraméteresen (a sebességet a jobb átláthatóság érdekében a kezdeti sebességgel becsüljük):

$$T = \frac{V}{\overline{q}_v} = \frac{V}{\overline{v}_2 \cdot A_{cső}} \approx \frac{V}{\sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho} + 2 \cdot g \cdot (H - b)} \cdot A_{cső}}$$

- a cső keresztmetszetének növelésével ($A_{cső}$)
- a cső lelógó hosszának növelésével ($H - b$)
- a tartálynyomás növelésével ($p_1 - p_0$)
- szivattyú beépítése
- gyorsítjuk felfelé rendszert - ez nagyon elvi (g)

d) feladatrész: a csőhossz növelés elvi határát az jelenti, hogy a legfelső ponton (3) a lecsökkent nyomás hatására elforr a folyadék. Ezen csőhossz meghatározása az 2-3 pontok közé felírt Bernoulli-egyenlettel történhet:

$$p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 = p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- $v_2 = v_3$
- $U_3 - U_2 = g \cdot (z_3 - z_2) = g \cdot H_{max}$
- $p_3 = p_{gőz}$

Ebből a maximálisan megengedhető csőhossz:

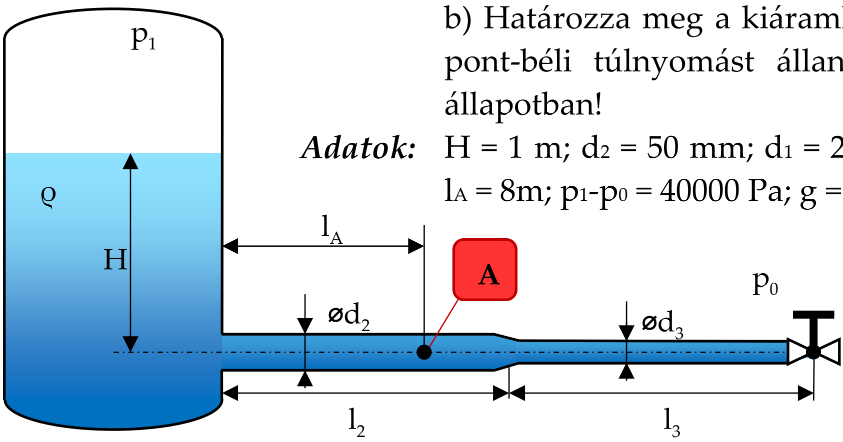
$$H_{max} = \frac{p_0 - p_g}{\rho g} = \frac{10^5 - 10^3}{1000 \cdot 10} = 9{,}9m \rightarrow L_{max} = H_{max} + b + h = 9{,}9 + 0{,}2 + 0{,}2 = \mathbf{10{,}3m}$$

LÉPCSŐS KIFOLYÁS TARTÁLYBÓL

A mellékelt ábrán látható zárt tartály *H=1 m* magasságig van vízzel feltöltve. A tartályhoz egy $d_2 = 50\ mm$ és egy $d_3 = 25\ mm$ átmérőjű csőszakasz csatlakozik. A csővégen egy alap-állapotban zárt szelep található. A közeget súrlódásmentesnek, és összenyomhatatlannak feltételezzük.

Kérdés: a) Határozza meg az „A” pont béli gyorsulást és túlnyomást a szelep hirtelen kinyitásának pillanatában!
b) Határozza meg a kiáramlási sebességet és az „A” pont-béli túlnyomást állandósult (stacioner, t→∞) állapotban!

Adatok: H = 1 m; d_2 = 50 mm; d_1 = 25 mm; l_2 = 12 m; l_3 = 9m; l_A = 8m; p_1-p_0 = 40000 Pa; g = 10N/kg; ϱ = 1000 kg/m³;



MEGOLDÁS

a) feladatrész:

<u>Kezdeti megfontolások</u>:

- mivel a közeg összenyomhatatlan, az „A” pont béli gyorsulás ugyanakkora, mint az l_1 szakasz bármely más pontjában
- a különböző átmérőjű szakaszokon létrejövő gyorsulások között a kontinuitás teremt kapcsolatot
- a Bernoulli-egyenletet A és 3 pontok közé felírva túl sok az ismeretlen (p_A, a_A), ezért célszerű először olyan pontokat választanunk, ahol több adat áll rendelkezésre - például a tartályban lévő folyadék felszíne és a kifolyás

Instacioner Bernoulli-egyenlet a folyadékfelszín (1) és a kifolyás (3) közé:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = \rho \cdot \int_1^3 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} + p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- A gyorsulás iránya 1 → 3, tehát a 3 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_3 = p_0$ ← szabadkifolyás
- $U_1 - U_3 = g \cdot (z_1 - z_3) = g \cdot H$
- $v_1 = v_3 = 0$ ← a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos, ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik. Hirtelen keresztmetszetváltozás esetén a gyorsulásnak szakadása van, ott az integrálást ketté kell bontani.

- a tartályban az áramlási keresztmetszet nagyságrendekkel nagyobb, mint a cső keresztmetszete, ezért a folytonossági tételt felhasználva feltételezhetjük, hogy a tartályban a gyorsulás közel zérus.

  $$\rightarrow \int_1^3 \frac{\partial v}{\partial t}\underline{ds} = a_A l_2 + a_3 l_3$$

Az 1-3 pontok közé felírt Bernoulli-egyenlet a következő formára egyszerűsödik:

$$p_1 + \rho g H = p_0 + \rho(a_A l_2 + a_3 l_3)$$

A gyorsulások között kapcsolatot teremtő kontinuitási egyenlet:

$$a_A A_2 = a_3 A_3 \qquad a_3 = a_A \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^2 = a_A \left(\frac{50}{25}\right)^2 = 4a_A$$

Ebből „A” pont béli gyorsulás számítható:

$$p_1 + \rho g H = p_0 + \rho(a_A l_2 + 4a_A l_3)$$

$$a_A = \frac{(p_1 - p_0) + \rho g H}{\rho(l_2 + 4l_3)} = \frac{40000 + 1000 \cdot 10 \cdot 1}{1000(12 + 4 \cdot 9)} = \mathbf{1{,}04\frac{m}{s^2}}$$

Az „A” pont béli túlnyomás kiszámításához a gyorsulások ismeretében most már felírhatjuk az instacinoner Bernoulli-egyenletet A-3 pontok közé. Vigyázat: a gyorsulás (a_2) ugyan végig azonos a l_2 jelű csőben, de a lokális gyorsulás miatt a csőben fellépő túlnyomás ($p_2(x)$) áramlási irányban folyamatosan csökken.

$$p_A + \rho \cdot U_A + \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2 = \rho \cdot \int_A^3 \frac{\partial v}{\partial t}\underline{ds} + p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- a gyorsulás iránya A → 3, tehát az A oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_A - U_3 = g \cdot (z_A - z_3) = 0$
- $v_A = v_3 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik. Hirtelen keresztmetszetváltozás esetén a gyorsulásnak szakadása van, ott az integrálást ketté kell bontani.

  $$\rightarrow \int_A^3 \frac{\partial v}{\partial t}\underline{ds} = a_A \cdot (l_2 - l_A) + a_3 l_3$$

Az A-3 pontok közé felírt Bernoulli-egyenlet a korábban felírt kontinuitási egyenlet segítségével a következő formára egyszerűsödik, melyből „A” pont béli túlnyomás számítható:

$$\boldsymbol{p_A - p_0} = \rho a_A(l_2 - l_A + 4l_3) = 1000 \cdot 1{,}04 \cdot (12 - 8 + 4 \cdot 9) = \mathbf{41600\,Pa}$$

b) feladatrész:

Kezdeti megfontolások:

- A nyitás követően az áramlás egy stacionárius állapotba áll be, ahol a túlnyomás és a potenciálkülönbség nem a csőben lévő lokális gyorsulást fogja fedezni, hanem a csőszájánál és a szűkületnél a konvektív gyorsulást - a tartály béli 0 sebességről felgyorsul a folyadék a 2-es cső béli sebességre, valamint az 2-es cső béli sebességről a 3-es cső béli sebességre
- mivel az áramlás súrlódásmentes, ezért az „A” pont béli túlnyomás ugyanakkora, mint az *l*₂ szakasz bármely más pontjában

Írjuk fel a stacionárius Bernoulli-egyenletet az 1-3 pontok közé:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_1 - U_3 = g \cdot (z_1 - z_3) = g \cdot H$
- $v_1 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_3$ (konti.)

Ebből a kifolyási sebesség számítható:

$$v_3 = \sqrt{2 \cdot \frac{p_1 - p_0 + \rho g H}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(40000 + 10 \cdot 1000 \cdot 1)}{1000}} = \mathbf{10\,\frac{m}{s}}$$

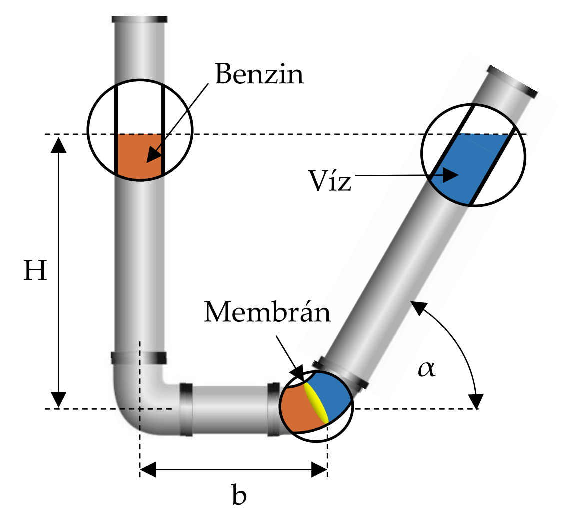
Stacionárius Bernoulli-egyenlet az A-3 pontok között:

$$p_A + \rho \cdot U_A + \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2 = p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_A - U_2 = g \cdot (z_A - z_2) = 0$
- folytonosság: $q_{V,A} = q_{V,3} \rightarrow v_A = v_3 \cdot \frac{A_3}{A_A} = 2{,}5\,\frac{m}{s}$

Ebből az „A” pontban fellépő túlnyomás stacionárius esetben:

$$\boldsymbol{p_A - p_0} = \frac{\rho}{2} \cdot (v_3^2 - v_A^2) = \frac{1000}{2}(10^2 - 2{,}5^2) = \mathbf{46875\ Pa}$$

<table>
<tr><th colspan="3">ELTÉRŐ SŰRŰSÉGŰ ANYAGOK ESETE</th></tr>
<tr><td colspan="2">Egy D = 6 mm átmérőjű, az ábrán látható kialakítású cső alján membrán található, aminek bal oldalán H = 80 cm magasságú benzin, a jobb oldalán azonos magasságú vízoszlop nyugszik. Mindkét csőszár a légkörre nyitott. A membrán elpattanásakor a folyadékoszlopok az egyensúlyi állapotra törekedve mozgásba jönnek.</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Kérdés:</td><td>Határozza meg a membrán elpattintásakor
a) a vízoszlop gyorsulását!
b) a benzinoszlop gyorsulását!</td></tr>
<tr><td>Adatok:</td><td colspan="2">D = 6 mm; H = 80 cm; b = 30 cm; $\alpha = 60°$
$\varrho_b = 750\ kg/m^3$; $\varrho_v = 1000\ kg/m^3$; $p_0 = 10^5\ Pa$; $g = 10\ m/s^2$; $\mu = 0$</td></tr>
</table>

MEGOLDÁS

a) (és b)) feladatrész:

Kezdeti megfontolások:

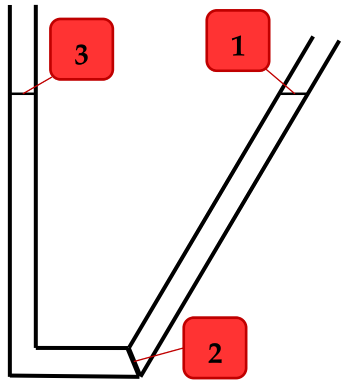
- mielőtt fejjel rohannánk a falnak, gondoljuk végig, hogy lehet-e a vízoszlopnak és a benzinoszlopnak eltérő gyorsulása!

  …

  Nem! A folyadékoszlopok sem egymásba nem csúszhatnak, sem üres tér nem keletkezhet közöttük. A vízoszlop és a benzinoszlop gyorsulása tehát azonos lesz: $a_{víz} = a_{benzin} = a$
- eddigre már szépen kifejlődött mérnöki érzékünk alapján pedig azt is meg tudjuk mondani, hogy a víz fog megindulni a benzin felé, mert az azonos magasságú (H) vízoszlop nagyobb sűrűsége miatt nagyobb nyomással nehezedik a membránra, mint a kisebb sűrűségű benzin. Figyelem: a vízoszlop alján létrejövő túlnyomás csak a vízfelszín magasságától függ, a csőszár állásszöge nem befolyásolja azt.
- a Bernoulli-egyenletet egyszerűsített formájában csak azonos sűrűségű folyadékokra alkalmazható, azért külön írjuk fel a vízben, és külön a benzinben

Instacionárius Bernoulli egyenlet a vízre a jobb felszín (1) és a membrán (2) közé:

$$p_1 + \rho_v \cdot U_1 + \frac{\rho_v}{2} \cdot v_1^2 = \rho_v \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} + p_2 + \rho_v \cdot U_2 + \frac{\rho_v}{2} \cdot v_2^2$$



- a gyorsulás iránya 1 → 2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_1 = p_0 \leftarrow$ szabadfelszín
- $U_1 - U_2 = g \cdot (z_1 - z_2) = g \cdot H$
- $v_1 = v_2 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos, ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik.
  $$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} = a \cdot \frac{H}{\sin\alpha}$$

Ebből a 2 pontban fellépő túlnyomás:

$$p_2 - p_0 = \rho_v \cdot \left(g \cdot H - a \cdot \frac{H}{\sin\alpha}\right) \tag{1}$$

Instacionárius Bernoulli egyenlet a benzinre a membrán (2) és a bal felszín (3) közé:

$$p_2 + \rho_b \cdot U_2 + \frac{\rho_b}{2} \cdot v_2^2 = \rho_b \cdot \int_2^3 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} + p_3 + \rho_b \cdot U_3 + \frac{\rho_v}{2} \cdot v_3^2$$

- a gyorsulás iránya 2 → 3, tehát a 3 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadfelszín
- $U_3 - U_2 = g \cdot (z_3 - z_2) = g \cdot H$
- $v_3 = v_2 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik.
  $$\int_2^3 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} = a \cdot (H + b)$$

Ebből a 2 pontban fellépő túlnyomás:

$$p_2 - p_0 = \rho_b \cdot [g \cdot H + a \cdot (H + b)] \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletetek alapján a folyadékoszlopok gyorsulása számítható:

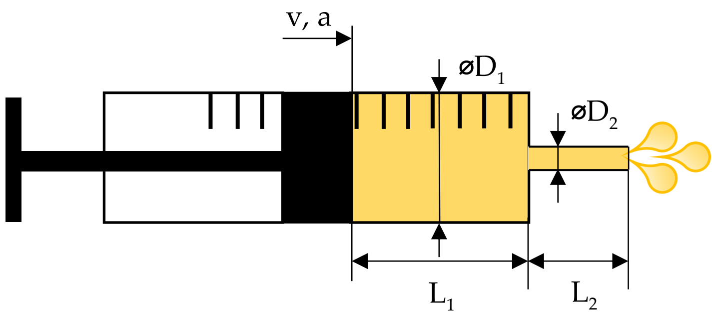
$$\boldsymbol{a} = \frac{(\rho_v - \rho_b) g H}{\rho_b (H + b) + \rho_v \dfrac{H}{\sin\alpha}} = \frac{(1000 - 750) \cdot 10 \cdot 0{,}8}{750 \cdot (0{,}8 + 0{,}3) + 1000 \dfrac{0{,}8}{\sin 60°}} = \mathbf{1,14} \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s^2}}$$

FECSKENDŐ

Egy vízzel töltött fecskendő dugattyúja v sebességgel és a gyorsulással mozog az ábrán jelölt irányba.

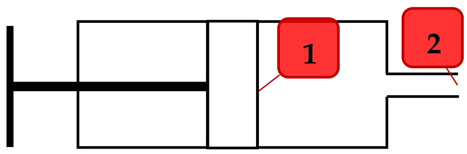
Kérdés: Határozza meg a mozgatáshoz szükséges erőt!

Adatok: v = 0.4 m/s; a = 1 m/s^2; D_1 = 50 mm; L_1 = 200 mm; D_2 = 10 mm; L_2 = 80 mm; ϱ = 1000 kg/m^3



MEGOLDÁS

Írjuk fel az instacioner Bernoulli-egyenletet az alábbi ábrán jelölt 1-2 pontok közé:



$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = \rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

- a gyorsulás iránya 1 → 2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_1 - U_2 = g \cdot (z_1 - z_2) = 0$
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik. Hirtelen keresztmetszetváltozás esetén a gyorsulásnak szakadása van, ott az integrálást ketté kell bontani.

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = a_1 L_1 + a_2 L_2$$

A kontinuitást felhasználva a sebességre és a gyorsulásra:

$$v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \qquad a_2 = a_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

A dugattyú két oldalán fellépő nyomáskülönbség kiadódik:

$$p_1 - p_0 = \rho \cdot \left[a_1 \cdot \left(L_1 + L_2 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right) + \frac{v_1^2}{2} \cdot \left(\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right)\right]$$

$$= 1000 \cdot \left[1 \cdot \left(0{,}2 + 0{,}08 \cdot \left(\frac{50}{10}\right)^2\right) + \frac{0{,}4^2}{2} \cdot \left(\left(\frac{50}{10}\right)^4 - 1\right)\right] = 52120\ Pa$$

Amelyből a kifejtendő erő nagysága számolható:

$$\boldsymbol{F} = A_1 \cdot (p_1 - p_0) = \frac{0{,}05^2\pi}{4} \cdot 52120 = \mathbf{102.3}\ \boldsymbol{N}$$

Impulzustétel

Impulzus-tétel (Newton II. törvénye integrál alakban):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \cdot \underline{v} \cdot dV + \int \underline{v} \cdot \rho \cdot \underline{v} \cdot \underline{dA} = \int \rho \cdot \underline{g} \cdot dV - \int p \cdot \underline{dA} - \underline{R} + \underline{S}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{dA} = dq_V; \rho \cdot dq_V = dq_m \rightarrow \int \underline{v} \cdot \rho \cdot \underline{v} \cdot \underline{dA} = \int \underline{v} \cdot dq_m$$

Megoldás menete:

I) Bernoulli-egyenlet, kontinuitási egyenlet

II) legyen stacionárius az eset vagy tegyük azzá a vonatkoztatási rendszer jó megválasztásával: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

III) Ellenőrzőfelület: a szilárd test legyen benne, (legyen merőleges az átáramlásra)

IV) Hanyagoljuk el a súrlódást: $\underline{S} = 0$

V) Ha $\underline{v}_i$ merőleges A_i-re, akkor $\int_{A_i} \underline{v} \cdot \rho \cdot \underline{v} \cdot \underline{dA} = \underline{I_i} = v_i^2 \cdot \rho_i \cdot \underline{A_i}$ → merőleges a felületre és kifelé mutat a felületből.

Általánosan: $\int_{A_i} \underline{v} \cdot \rho \cdot \underline{v} \cdot \underline{dA} = \underline{I_i} = \underline{v}_i \cdot q_{m,i}$

Így látható, hogy ez az időegység alatt átáramló impulzusmennyiség. (Vegyük figyelembe, hogy a tömegáram akkor pozitív, ha kiáramlás van. tehát ha beáramlik a folyadék, akkor ellentétes lesz a sebesség irányával, ha kiáramlik, akkor pedig megegyezik azzal.)

VI) Hanyagoljuk el $\underline{g}$-t, ha lehet.

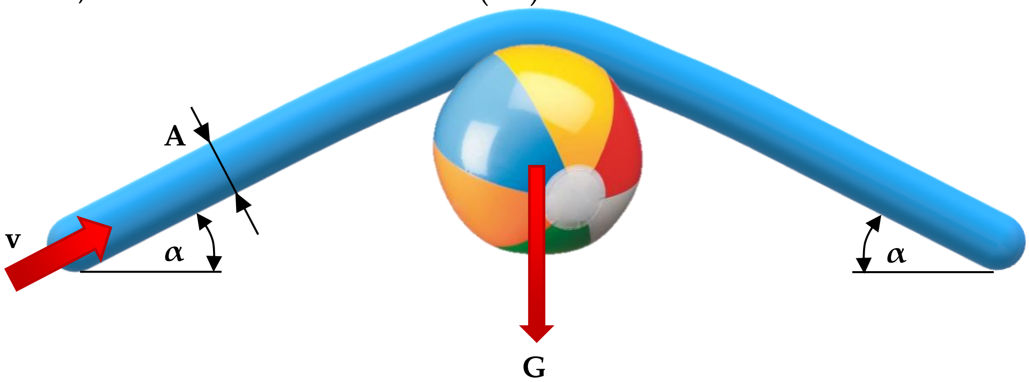
VII) $-\int_{A_i} p \cdot \underline{dA} = \underline{P_i} = -p_i \cdot \underline{A_i}$, mindig merőleges a felületre és befelé mutat. Ha a nyomás mindenhol azonos az ellenőrző felületen, akkor $\sum \underline{P} = 0$.

Ezen feltételek teljesülése esetén az impulzustétel az alábbi alakban írható fel:

$$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$$

LABDÁN ELHAJLÓ VÍZSUGÁR

Az ábrán látható balról érkező víz szabadsugár a Coanda-effektus révén hozzátapad a labda felületéhez és azon 2α szöggel eltérül. Az áramvonalak görbültsége miatt a vízsugár és a labda érintkezésénél a nyomás a környezeti nyomáshoz képest lecsökken, melynek következtében a labdára felfelé ható erő ébred. Megfelelő paraméterek esetén ez az erő a labda súlyát képes kompenzálni. A feladat egyszerűsítése érdekében a súrlódástól és a vízsugárra ható gravitációtól eltekintünk, az áramlást síkáramlásnak (2D) feltételezzük.



Kérdés: Mekkora súlyú labdát tud megtartani a vízsugár?

Adatok: v_1=10m/s; ϱ=1000kg/m^3; A=10cm^2; α=15°

MEGOLDÁS

<u>Kezdeti megfontolások</u>: a következőkben bemutatott alapelveket célszerű minden impulzus-tétellel megoldani kívánt feladatra alkalmazni.

Az impulzustétel általános alakja a következőképpen írható fel:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \cdot \underline{v} \cdot dV}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int \underline{v} \cdot \rho \cdot v \cdot \underline{dA}}_{\mathrm{II}} = \underbrace{\int \rho \cdot \underline{g} \cdot dV}_{\mathrm{II}} - \underbrace{\int p \cdot \underline{dA}}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\underline{R}}_{\mathrm{V}} + \underbrace{\underline{S}}_{\mathrm{V}}$$

, ahol I az eredő mozgásmennyiség lokális megváltozása (instacionárius tag), II az impulzus-áram, III a térerősségből származó erő, IV a nyomásból származó erő, V az áramlásban lévő szilárd testre ható erő, VI pedig a súrlódásból származó erő. A következő megfontolásokkal élve az impulzus-tétel jelentősen egyszerűbb alakra hozható:

1. Stacionárius az áramlás vagy azzá tudjuk tenni pl. együtt mozgó koordináta-rendszerből vizsgálva a feladatot? Ha igen, *I. tag = 0*. Az ügyesen megválasztott koordináta-rendszert tüntessük fel az ábrán.
2. Rajzoljuk be az ábrába az ellenőrző felületet: (1) ha testre ható erőt keresünk, legyen benne a test (*V. tag*), (2) ahol az ellenőrző felületen keresztül átáramlás van, ott a felület legyen merőleges az átáramlásra.

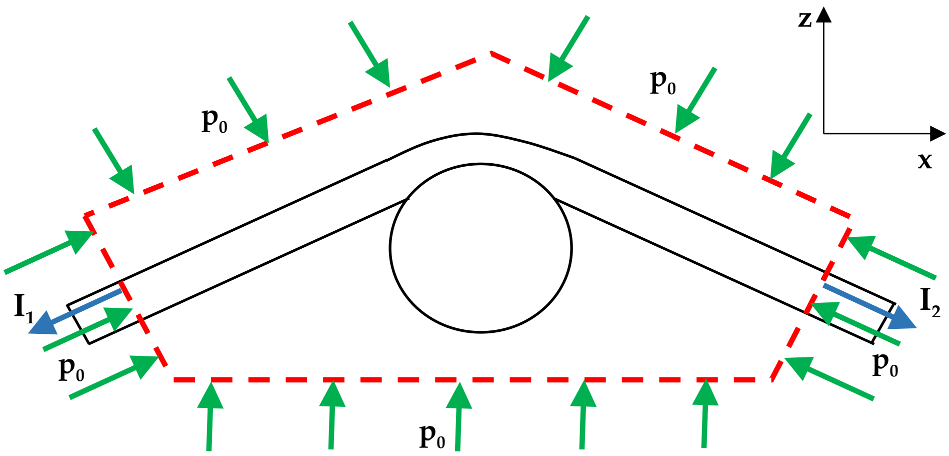
3. Rajzoljuk be az ábrába az impulzusáram-vektorokat (*II. tag*), melyek
   - nagysága: $I = q_m v = \rho v^2 A$
   - iránya: párhuzamos $\underline{v}$-vel
   - irányítottsága: a zárt ellenőrző felületből mindig **kifelé** mutat

4. Rajzoljuk be az ábrába az nyomásból származó erővektorokat (*IV. tag*), melyek
   - nagysága: $P = pA$
   - iránya: merőleges a felületre
   - irányítottsága: a zárt ellenőrző felületbe mindig **befelé** mutat
5. Vizsgáljuk meg, hogy eltekinthetünk-e a súrlódás hatásától (*VI. tag*)
6. Írjuk fel az impulzus-tételből származó komponens-egyenleteket x, y és z irányba.
7. Ne feledjük, hogy a kontinuitás és a Bernoulli-egyenlet továbbra is jó szolgálatot tehetnek a feladat megoldása során.

Az impulzustétel egyszerűsített formája súrlódásmentes, stacioner esetre a térerő elhanyagolásával a következő alakot ölti:

$$\sum \underline{I} = \sum \underline{P} - \underline{R}$$

Az alábbi ábrán pirossal jelöltük az ellenőrző felületet, kékkel az impulzus-áram vektorokat és zölddel a nyomásvektorokat, valamint feltüntettük a feladatmegoldáshoz használt koordináta-rendszert.



Bernoulli egyenlet az 1 belépő és a 2 kilépő keresztmetszet között:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

- $U_1 \cong U_2$
- $p_1 = p_2 = p_0 \leftarrow$ mert szabad áramlás, és az áramvonalak párhuzamos egyenesek az átáramlási keresztmetszetekben

Ebből következően a sugárban a sebesség állandó:
$v_1 = v_2 = v$

Kontinuitási egyenlet, a belépő és kilépő tömegáram azonos, a víz sűrűsége állandónak tekinthető:
$q_{m,1} = q_{m,2} = q_m;\ \rho = const. \rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$

A Bernoulli-egyenletből láttuk, hogy $v_1 = v_2$, hiszen a nyomás és a potenciál azonos, ezért a vízsugár belépő és kilépő keresztmetszete azonos:
$A_1 = A_2 = A$

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, a súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:
$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$

A nyomás az ellenőrző felületen mindenhol légköri (szabadsugár): $\sum \underline{P} = 0$

Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:
$|\underline{I_1}| = q_{m,1} \cdot v_1 = q_m \cdot v$

$I_{1,x} = -q_m \cdot v_{1,x} = -q_m \cdot v \cdot cos\alpha$

$I_{1,y} = 0$

$I_{1,z} = -q_m \cdot v_{1,y} = -q_m \cdot v \cdot sin\alpha$

Az impulzusáram az 2-es keresztmetszetben:
$|\underline{I_2}| = q_{m,2} \cdot v_2 = q_m \cdot v$

$I_{2,x} = q_m \cdot v_{2,x} = q_m \cdot v \cdot cos\alpha$

$I_{2,y} = 0$

$I_{2,z} = q_m \cdot v_{2,y} = -q_m \cdot v \cdot sin\alpha$

Komponens egyenletek:

- x-irány:

$$I_{1,x} + I_{2,x} = -R_x$$

$$R_x = q_m \cdot v \cdot cos\alpha - q_m \cdot v \cdot cos\alpha = 0$$

- y-irány: abban az irányban nincsenek vektorkomponensek
- z-irány:

$$I_{1,z} + I_{2,z} = -R_z$$

$$-R_z = -q_m \cdot v \cdot sin\alpha - q_m \cdot v \cdot sin\alpha = -2 \cdot q_m \cdot v \cdot sin\alpha =$$

$$= -2 \cdot \rho v^2 A \cdot \sin\alpha = -2 \cdot 1000 \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot \sin 15° = -\,51N$$

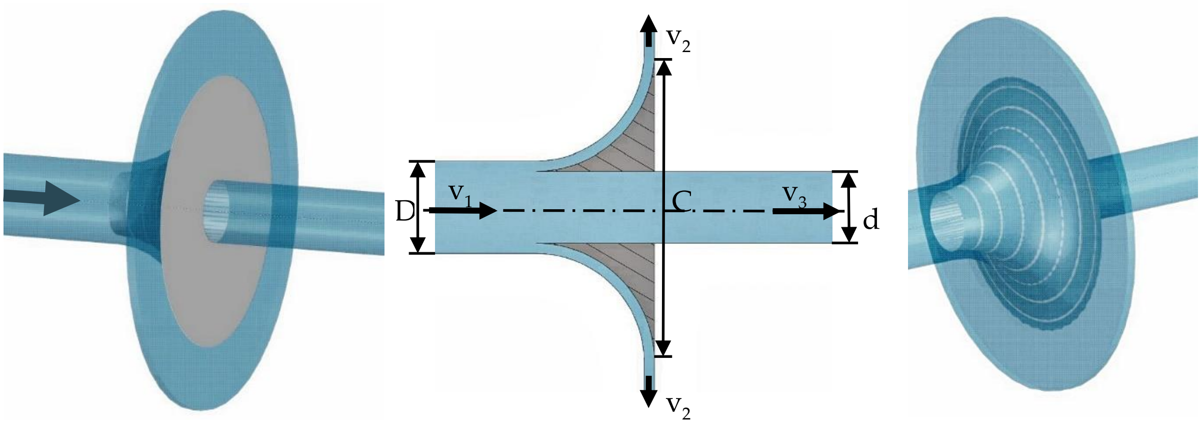
Mivel a labda egyensúlyban van, a rá ható erők eredője 0, tehát $-R_z$ meg fog egyezni a labda súlyával:

$$\underline{\boldsymbol{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-51} \end{bmatrix} \boldsymbol{N}$$

Érdekesség, hogy mivel a labda tetején görbült az áramvonal, itt radiális irányban nyomásgradiens alakul ki, azaz a labda vízsugárral érintkező felszínén légköri alatti nyomáseloszlás lesz. Mivel a labda alján a nyomáseloszlás légköri, a nyomáskülönbség fent tartja a sugárban a labdát!

LIKAS TÁRCSA

A mellékelt ábrán látható vízszintes tengelyű, középen *d=70mm* átmérőjű furattal rendelkező hengeres kúpra *D=90mm* átmérőjű, v_1*=15m/s* sebességű alkohol szabadsugár áramlik. A kúp és a rááramló szabadsugár tengelye azonos. A furatban a folyadék a teljes kereszt-metszetet kitölti. A kúp peremén, melynek átmérője *C=300mm*, a folyadék a belépésre merőlegesen irányban távozik.
A folyadékra a súrlódásból és térerősségből származó erőhatások elhanyagolhatók.



Kérdés: a) Határozza meg a testre ható erőt!
b) Határozza meg a peremen kilépő közeg vastagságát (***b***)!

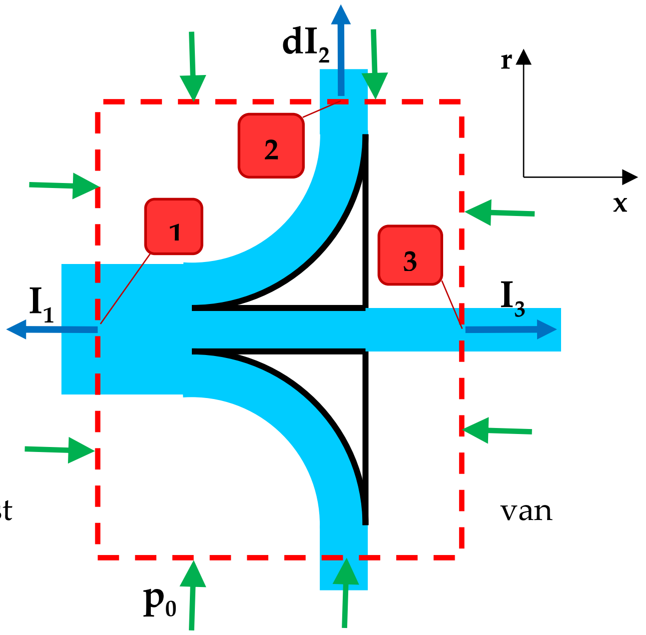
Adatok: d = 70 mm; D = 90 mm; C = 300 mm; v_1 = 15 m/s; ϱ =740 kg/m^3; p_0 =10^5 Pa

MEGOLDÁS

a) feladatrész:

Rajzoljuk be az ábrába a felvett (henger)koordináta-rendszert, az ellenőrző felületet és az impulzusáram- és nyomásvektorokat!

Bernoulli-egyenlet az 1-2 és 1-3 pontok közé:



$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- $U_1 \cong U_2 \leftarrow \underline{g}$ elhanyagolva
- $U_1 = U_3$
- $p_1 = p_2 = p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár

$\rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = v$

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$$\sum \underline{I}_i = \sum \underline{P} - \underline{R}$$

A nyomás az ellenőrző felületen mindenhol légköri: $\sum \underline{P} = 0$

Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:

$|\underline{I}_1| = q_{m,1} \cdot v_1 = q_{m,1} \cdot v$

$I_{1,x} = q_m \cdot v_{1,x} = -q_{m,1} \cdot v$

$I_{1,rad} = 0$

$I_{1,tang} = 0$

Az impulzusáram a 2-es keresztmetszetben:

$\int d\underline{I}_2 = 0$

Az impulzusáram a 3-as keresztmetszetben:

$|\underline{I}_3| = q_{m,3} \cdot v_3 = q_{m,3} \cdot v$

$I_{3,x} = q_m \cdot v_{3,x} = q_{m,3} \cdot v$

$I_{3,rad} = 0$

$I_{3,tang} = 0$

Komponens egyenletek:

- x-irány:

$$I_{1,x} + I_{3,x} = -R_x$$

$$R_x = q_{m,1} \cdot v - q_{m,3} \cdot v = \rho \cdot v^2 \cdot (A_1 - A_3) =$$

$$= 740 \cdot 15^2 \cdot \left(\frac{0{,}09^2\pi}{4} - \frac{0{,}07^2\pi}{4}\right) = 418{,}6\ N$$

- radiális irány: abban az irányban nem történik semmi
- tangenciális irány: abban az irányban nem történik semmi

A tárcsára ható erő tehát:
$R = \mathbf{418,6\ N}$

b) feladatrész
A peremen kilépő közeg vastagságának meghatározásához írjuk fel a kontinuitást!

$q_{m,1} = q_{m,2} + q_{m,3} \rightarrow \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 + \rho_3 v_3 A_3$

- $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho = const.$ ← víz összenyomhatatlan
- $v_1 = v_2 = v_3 = v = const.$ ← Bernoulli-egyenletből számolva

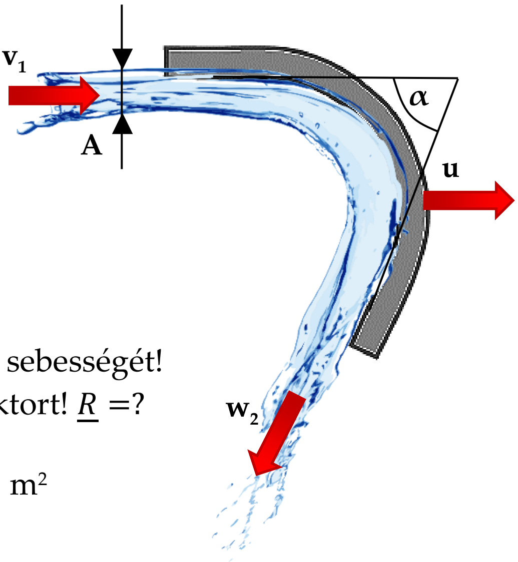
$$\rightarrow A_1 = A_2 + A_3 \rightarrow \frac{D^2\pi}{4} = bC\pi + \frac{d^2\pi}{4}$$

A kilépő sugár vastagsága tehát:

$$b = \frac{D^2 - d^2}{4C} = \frac{90^2 - 70^2}{4 \cdot 300} = \mathbf{2,67mm}$$

MOZGÓ TERELŐLAPRA HATÓ ERŐ

A mellékelt ábrán látható ívelt lapát *u*=13*m/s* sebességgel mozog a vízszintes síkban. A lapátra víz szabadsugár áramlik *v₁=30m/s* sebességgel.
A súrlódásból és a folyadék tömegére térerősségből származó erő elhanyagolható.



Kérdés: a) Határozza meg a kiáramlás abszolút sebességét!
b) Határozza meg a lapátra ható erővektort! $\underline{R}$ =?

Adatok: $\alpha = 60°$; $v_1 = 13$ m/s; u = 13 m/s; A = 0,01 m^2
$\varrho = 1000$ kg/m^3; $p_0 = 10^5$ Pa

MEGOLDÁS

a) feladatrész:

A feladat stacionáriussá tétele érdekében a problémát a lapáttal együtt mozgó koordináta-rendszerből vizsgáljuk.

Bernoulli-egyenlet együtt mozgó koordináta-rendszerben a belépés (1) és kilépés (2) egy pontja között:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 = p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot w_2^2$$

- $p_1 = p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár
- $U_1 = U_2 \leftarrow$ vízszintes

Ebből következően a relatív rendszerben felírt belépő és kilépő sebesség nagysága megegyező, értéke az abszolút sebesség és a szállítósebeség különbsége:

$$w_1 = w_2 = v_1 - u = 17\frac{m}{s}$$

A kilépő abszolút sebesség a kilépő relatív sebesség és a szállító sebességösszege:

$$\underline{v_2} = \underline{w_2} + \underline{u} = \begin{bmatrix} w_{2x} \\ w_{2y} \\ w_{2z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_2 \cdot \cos 60° \\ -w_2 \cdot \sin 60° \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \cdot \cos 60° \\ -17 \cdot \sin 60° \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4{,}5 \\ -14{,}7 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

$$|\underline{v_2}| = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 14{,}7^2} = \mathbf{15{,}4\frac{m}{s}}$$

b) feladatrész

A **kontinuitási** és a **Bernoulli-egyenlet** alapján a korábbi feladatokban bemutatott módon levezethető a belépő és kilépő keresztmetszetek azonossága:

$q_{m,1} = q_{m,2} = q_m$

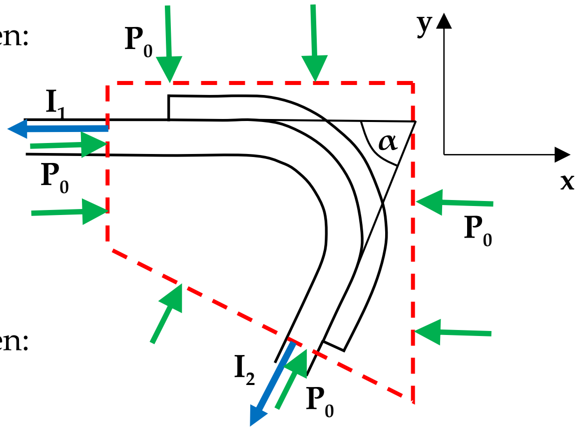
$\rho = const., w_1 = w_2 = w$

$\rightarrow A_1 = A_2 = A$

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$

A nyomás az ellenőrző felületen mindenhol légköri: $\sum \underline{P} = 0$



Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:

$|\underline{I_1}| = q_{m,1} \cdot w_1 = q_m \cdot w$

$I_{1,x} = -q_m \cdot w_{1,x} = -q_m \cdot w$

$I_{1,y} = 0$

$I_{1,z} = 0$

Az impulzusáram az 2-es keresztmetszetben:

$|\underline{I_2}| = q_{m,2} \cdot w_2 = q_m \cdot w$

$I_{2,x} = q_{m,2} \cdot w_{2,x} = -q_m \cdot w \cdot cos\alpha$

$I_{2,y} = q_{m,2} \cdot w_{2,y} = -q_m \cdot w \cdot sin\alpha$

$I_{2,z} = 0$

Komponens egyenletek:

- x-irány:

$$I_{1,x} + I_{2,x} = -R_x$$

$$R_x = q_m \cdot w + q_m \cdot w \cdot cos\alpha = \rho w^2 A \cdot (1 + cos\alpha) =$$

$$= 1000 \cdot 17^2 \cdot 0{,}01 \cdot (1 + 0{,}5) = \mathbf{4335 N}$$

- y-irány:

$$I_{1,y} + I_{2,y} = -R_y$$

$$R_y = 0 + q_m \cdot w \cdot sin\alpha = \rho w^2 A \cdot \sin 60° = 1000 \cdot 17^2 \cdot 0{,}01 \cdot \sin 60° =$$
$\mathbf{2503 N}$

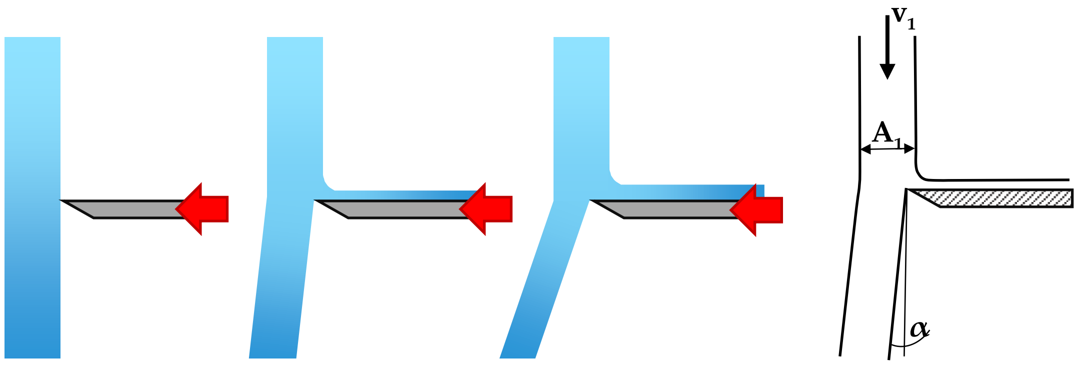
- z-irány: abban az irányban nem történik semmi

A lapátra ható erővektor tehát:

$$\underline{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{4335} \\ \mathbf{2503} \end{bmatrix} \boldsymbol{N}$$

KÉS A VÍZBEN

Amennyiben egy Pelton-turbináról üzemzavar következtében leesik a fékező nyomaték, a járókerék megfut, mely a megnövekedett feszültségek következtében a turbina idő előtti tönkremeneteléhez vezethet. Ennek elkerülésére a lehető leggyorsabban meg kell szüntetnünk a turbina vízrávezetését. A csővezeték hirtelen zárása azonban az Allievi-elmélet értelmében a csövek szétrobbanásához vezethet, így más módszert ajánlatos alkalmazni: a turbina-lapátokra áramló vízsugárba egy vékony lemezélet juttatunk, amely a sugár egy részét a lemezzel párhuzamosan leválasztja. A többi folyadékrész pályája az impulzus-tételből adódóan elhajlik.



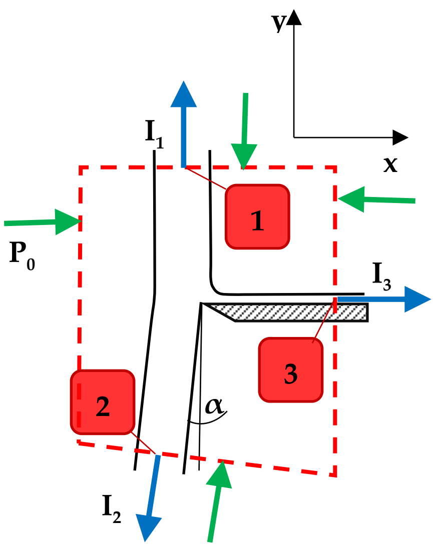
Kérdés: Mekkora részét kell a sugárnak leválasztani ahhoz, hogy a többi folyadékrész pályája 5°-kal eltérüljön?
A feladat megoldása során a nehézségi erőtér és a súrlódás hatásától eltekintünk, valamint síkáramlást feltételezünk!

Adatok: $\alpha = 5°$

MEGOLDÁS

Mivel szabadsugarat vizsgálunk, a **Bernoulli-egyenletből** következően a belépő és kilépő sebességek megegyeznek:

$v_1 = v_2 = v_3 = v$



A **kontinuitásból** pedig meghatározható a keresztmetszetek egymáshoz való viszonya:

$A_1 \cdot v = A_2 \cdot v + A_3 \cdot v$

$A_1 = A_2 + A_3$

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$

A nyomás az ellenőrző felületen mindenhol légköri:

$\sum \underline{P} = 0$

Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_1| = q_{m,1} \cdot v_1 = q_{m,1} \cdot v$
$I_{1,x} = 0$
$I_{1,y} = q_{m,1} \cdot v$
$I_{1,z} = 0$

Az impulzusáram az 2-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_2| = q_{m,2} \cdot v_2 = q_{m,2} \cdot v$
$I_{2,x} = q_{m,2} \cdot v_{2,x} = -q_{m,2} \cdot v \cdot sin\alpha$
$I_{2,y} = q_{m,2} \cdot v_{2,x} = -q_{m,2} \cdot v \cdot cos\alpha$
$I_{2,z} = 0$

Az impulzusáram az 3-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_3| = q_{m,3} \cdot v_3 = q_{m,3} \cdot v$
$I_{2,x} = q_{m,3} \cdot v_{3,x} = q_{m,3} \cdot v$
$I_{2,y} = 0$
$I_{2,z} = 0$

Komponens egyenletek:

- x-irány: a súrlódás elhanyagolása következtében a késre x-irányban nem hat erő

$$I_{1,x} + I_{2,x} + I_{3,x} = 0$$

$$0 = -q_{m,2} \cdot v \cdot sin\alpha + q_{m,3} \cdot v = \rho v^2 A_2 \cdot \sin\alpha - \rho v^2 A_3 =$$

$$= \rho v^2 (A_1 - A_3) \cdot \sin\alpha - \rho v^2 A_3$$

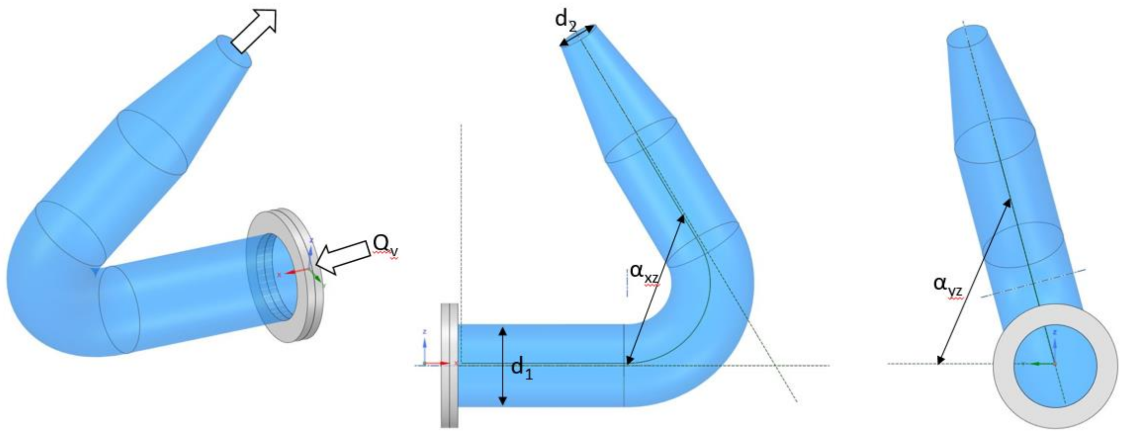
$$(A_1 - A_3) \cdot \sin\alpha = A_3$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{\sin 5°}{1 + \sin 5°} = 0{,}08 = \mathbf{8}\%$$

A sugárnak tehát 8%-át kell leválasztanunk ahhoz, hogy a többi folyadékrész pályája 5°-kal eltérüljön. A jelenlegi feladat szempontjából az y-irányú komponens-egyenlet nem érdekes, a késre ható erő felírásához azonban szükségessé válhat.

CSŐKÖNYÖKRE HATÓ ERŐ

Levegő áramlik ki az ábrán látható, α_{xz} szögben meghajlított és az x tengely körül α_{yz} szöggel elforgatott csőkönyökből a p_0 nyomású szabadba.



XZ sík YZ sík

Kérdés: a) Határozza meg a (p_1-p_0) nyomáskülönbséget! (A magasságkülönbségből adódó nyomásváltozás elhanyagolható.)
b) Határozza meg a karimakötésre ható **R** erőt! (**R**$_x$**, R**$_y$**, R**$_y$)

Adatok: $v_1 = 20$ m/s; $\varrho_{lev} = 1{,}2$ kg/m^3; $d_1 = 100$ mm; $d_2 = 50$ mm; $\alpha_{xz} = 60°$; $\alpha_{yz} = 60°$

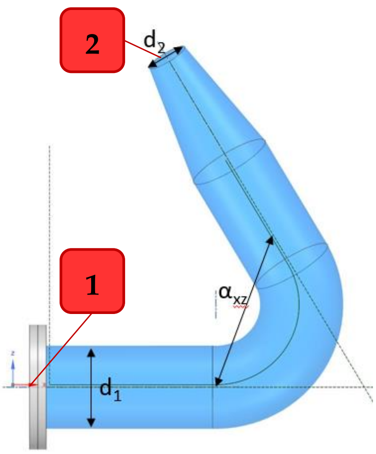
MEGOLDÁS

a) feladatrész

Írjuk fel a Bernoulli-egyenletet a beáramlás (1) és a kiáramlás (2) közé:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

- $U_1 \cong U_2 \leftarrow$ a különbség elhanyagolható
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár
- $v_2 = v_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = 80\,\frac{m}{s} \leftarrow$ kontinuitás, a sűrűség változása elhanyagolhatóan kicsiny



XZ sík

Fentiek alapján a keresett nyomáskülönbség:

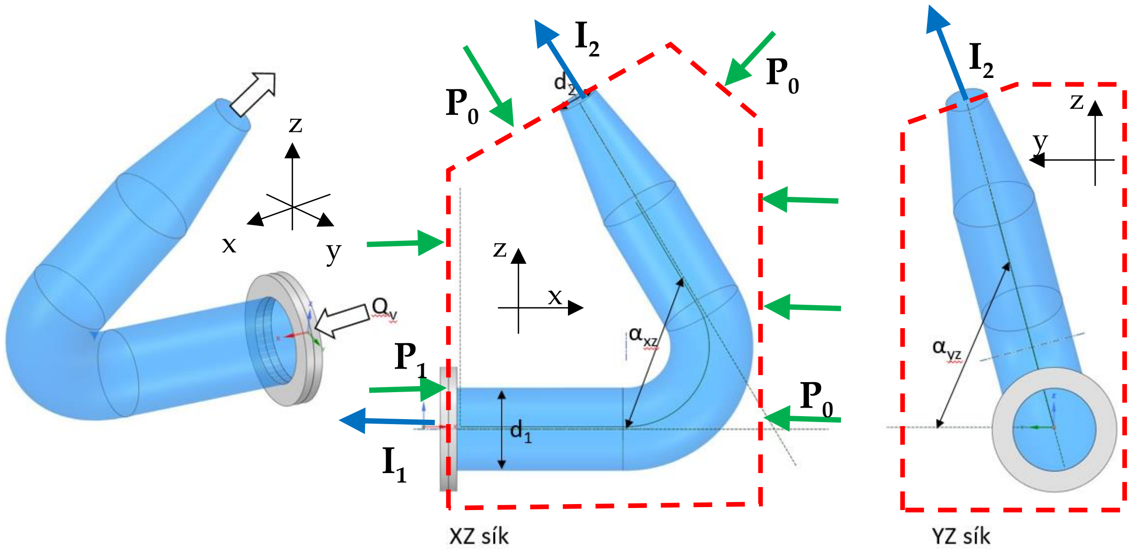
$$p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1{,}2}{2}(80^2 - 20^2) = \boldsymbol{3600Pa}$$

b) feladatrész

Rajzoljuk be az ábrába az ellenőrző felületet valamint az impulzusáram- és nyomás-vektorokat!

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$



A nyomás csak az 1-es felületen nem légköri, ezért csak ott lesz nyomásból származó erő:

$|\sum \underline{P}| = (p_1 - p_0) \cdot A_1$

Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:

$|\underline{I_1}| = q_{m,1} \cdot v_1 = q_m \cdot v_1$

$I_{1,x} = -q_m \cdot v_{1,x} = -q_m \cdot v_1$

$I_{1,y} = 0$

$I_{1,z} = 0$

Az impulzusáram az 2-es keresztmetszetben:

$|\underline{I_2}| = q_{m,2} \cdot v_2 = q_m \cdot v_2$

$I_{2,x} = q_m \cdot v_{2,x} = -q_m \cdot v_2 \cdot cos\alpha_{xz}$

$I_{2,y} = q_m \cdot v_{2,y} = q_m \cdot v_2 \cdot sin\alpha_{xz} \cdot cos\alpha_{yz}$

$I_{2,z} = q_m \cdot v_{2,z} = q_m \cdot v_2 \cdot sin\alpha_{xz} \cdot sin\alpha_{yz}$

A tömegáram: $q_m = A_1 \cdot \rho \cdot v_1 = 0{,}188\,\frac{kg}{s}$

Komponens egyenletek:

- x-irány:

$I_{1,x} + I_{2,x} = |\sum \underline{P}| - R_x$

$R_x = q_m \cdot v_1 + q_m \cdot v_2 \cdot cos\alpha_{xz} + (p_1 - p_0) \cdot A_1 =$

$$0{,}188 \cdot 20 + 0{,}188 \cdot 80 \cdot \cos 60° + 3600 \cdot \frac{0{,}1^2\pi}{4} = 39{,}58\ N$$

- y-irány:

$I_{1,y} + I_{2,y} = -R_y$

$R_y = 0 - q_m \cdot v_2 \cdot sin\alpha_{xz} \cdot cos\alpha_{yz} = -0{,}188 \cdot 80 \cdot \sin 60° \cdot \cos 60° = -6.53\ N$

- z-irány:

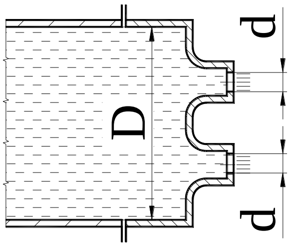
$I_{1,z} + I_{2,z} = -R_z$

$R_z = 0 - q_m \cdot v_2 \cdot sin\alpha_{xz} \cdot sin\alpha_{yz} = -0{,}188 \cdot 80 \cdot \sin 60° \cdot \sin 60° = -11.31\ N$

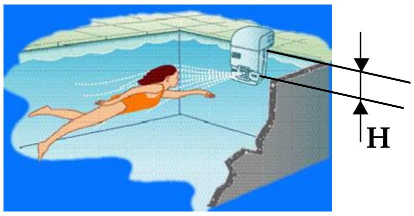
$$\boldsymbol{R} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{39{,}58^2 + 6{,}53^2 + 11{,}31^2} = \mathbf{41{,}7\ N}$$

BADUSPORT

A mellékelt ábrán látható Badu Jet Sport ellenáramoltatót egy medence vízszintje alá *H=0,5m* mélységbe építették be. A ellenáramoltató *D=400mm* átmérőjű tartályfedelébe vízszintes elrendezésben 2 darab *d=40mm* belső átmérőjű fúvókát építettek. A fúvókát együttesen q_v=75m³/h térfogatáramú vizet szállítanak. (A súrlódásból és a folyadék tömegére a térerősségből származó erő valamint az áramlási sebesség a tartályfedélben elhanyagolható.)



Kérdés: a) Határozza meg a túlnyomást a tartályfedél belsejében!
b) Határozza meg a fúvókára ható erővektort!
R = *?*



Adatok: H = 0,5 m; D = 400mm; d = 40 mm; q_v = 75m³/h;
ρ = 1000 kg/m³; p_0 = 10^5 Pa; g = 10 N/kg

MEGOLDÁS

a) feladatrész:

A kilépő sugarak sebessége a térfogatáramból és a geometriából számítható:

$$v_s = \frac{q_v}{2 \cdot d^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{75/3600}{2 \cdot 0{,}04^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = 8{,}29\ m/s$$

A tartályban a sebesség szintén a térfogatáramból és geometriából számolva:

$$v_t = \frac{q_v}{D^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{75/3600}{0{,}4^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = 0{,}166\frac{m}{s}$$

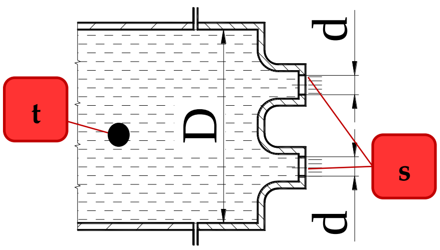
Tehát tényleg elhanyagolhatóan csekély itt a sebesség! Benne van a feladatban!

A nyomásviszonyok meghatározásához írjuk fel a Bernoulli-egyenletet a tartály és a kilépő vízsugarak közé:

$$p_t + \rho \cdot U_t + \frac{\rho}{2} \cdot v_t^2 = p_s + \rho \cdot U_s + \frac{\rho}{2} \cdot v_s^2$$

- $U_t = U_s$

$$\rightarrow p_t - p_s = \frac{\rho}{2} \cdot (v_s^2 - v_t^2) = \frac{1000}{2} \cdot (8{,}29^2 - 0{,}166^2)$$
$$= 34356\ Pa$$



A kilépő sugarak szabadsugarak, tehát a nyomásuk meg fog egyezni a környezet nyomásával, H mélységben a túlnyomással:

$$p_s - p_0 = \rho \cdot g \cdot H = 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 5000\ Pa$$

$$\rightarrow \boldsymbol{p_t - p_0 = 39356\ Pa}$$

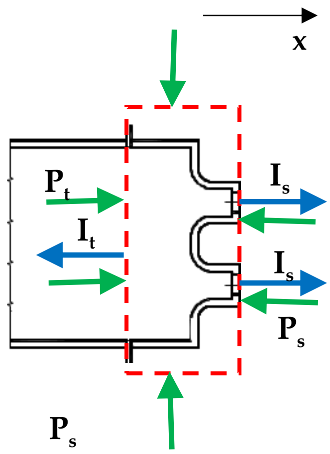
b) feladatrész:

Az impulzustétel stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$

A nyomás a tartály keresztmetszetében nem egyenlő a környezeti nyomással, ezért a nyomásból származó erő:

$|\sum \underline{P}| = (p_t - p_s) \cdot A_t$



Az impulzus-áram az tartály keresztmetszetében:

$|\underline{I_t}| = q_m \cdot v_t$

$I_{t,x} = -q_m \cdot v_{t,x} = -q_m \cdot v_t$

$I_{t,y} = 0$

$I_{t,z} = 0$

Az impulzus-áram a sugarak keresztmetszetében:

$|\underline{I_s}| = 2 \cdot \frac{q_m}{2} \cdot v_s = q_m \cdot v_s$

$I_{s,x} = q_m \cdot v_{s,x} = q_m \cdot v_s$

$I_{s,y} = 0$

$I_{s,z} = 0$

A tömegáram: $q_m = q_V \cdot \rho = 20{,}8 \frac{kg}{s}$

Komponens-egyenletek:

Csak az x iránnyal kell foglalkozni, mert a többi irányban minden 0.

$I_{t,x} + I_{s,x} = |\sum \underline{P}| - R_x$

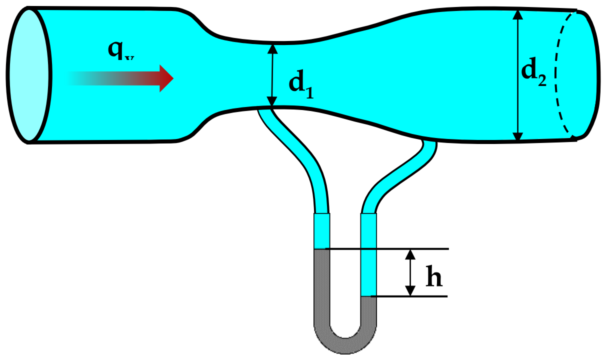
$\boldsymbol{R_x} = (p_t - p_s) \cdot A_t + q_m \cdot (v_t - v_s) = 34356 \cdot \frac{0{,}4^4 \pi}{4} + 20{,}8 \cdot (0{,}166 - 8{,}29) = \mathbf{3975}\ \boldsymbol{N}$

Veszteséges taggal kiegészített Bernoulli-egyenlet

TÉRFOGATÁRAM-MÉRÉS VENTURI CSŐVEL

Térfogatáram mérésére Venturi-csövet tervezünk. A Venturi-cső bővülő szakaszának diffúzorhatásfoka 70%. A nyomáskülönbség mérését higanytöltésű U-csöves manométerrel végezzük.

A szállított térfogatáram várhatóan $q_v = 1200 l/min$ lesz, a szállított közeg víz.

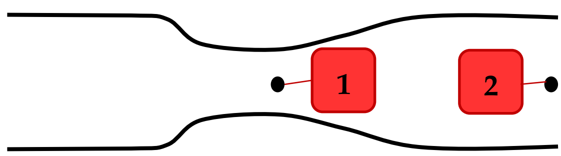


Kérdés: Határozza meg a manométer kitérését! (h = ?)

Adatok: q_v = 1200 l/min; d1 = 100 mm; d2 = 200 mm;
$\varrho_{víz}$ = 1000 kg/m^3; ϱ_{Hg} = 13600 kg/m^3; g = 10 N/kg

MEGOLDÁS

Ideális esetben a diffúzoron létrejövő nyomásnövekedés az 1-2 pontok közé, súrlódásmentes közegre felírt Bernoulli-egyenletből határozható meg:



$$(p_2 - p_1)_{id} = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2)$$

Valóságos esetben azonban a súrlódás miatt a diffúzor nem 100%-os hatásfokú, így az általa létrehozott nyomásnövekedés kisebb lesz, mint az ideális.

$$(p_2 - p_1)_{val} = p_2 - p_1 = \eta_d \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \eta_d \frac{\rho}{2} q_v^2 \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right)$$

$$= 0,7 \cdot \frac{1000}{2} \cdot \left(\frac{1200 \cdot 10^{-3}}{60}\right)^2 \left(\frac{16}{0,1^4 \pi^2} - \frac{16}{0,2^4 \pi^2}\right) = 2128 Pa$$

Kontinuitásból:

$$q_v = v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{q_v}{A_1};\ v_2 = \frac{q_v}{A_2}$$

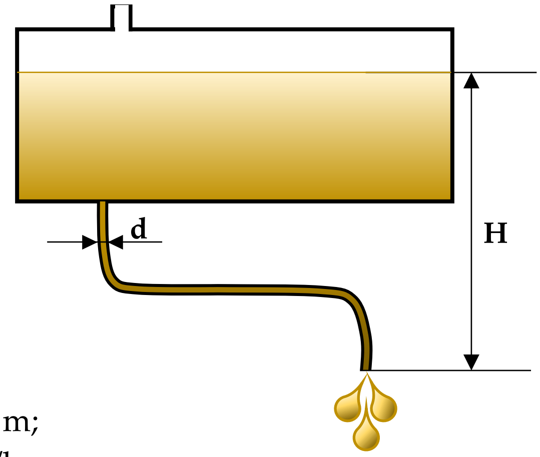
Az U-csöves manométer kitérésénél nem szabad elfeledkeznünk arról, hogy a manométert a berendezéssel összekötő csőben víz van, aminek sűrűségét a higanyéhoz képest nem hanyagolhatjuk el. Írjuk fel a manométer egyensúlyi egyenletét:

$$p_1 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h = p_2 + \rho_{víz} \cdot g \cdot h$$

Ebből számítható a manométer kitérése:

$$h = \frac{(p_2 - p_1)_{val}}{(\rho_{Hg} - \rho_{víz})g} = \frac{2128}{(13600 - 1000) \cdot 10} = \mathbf{17mm}$$

OLAJOZÓ



Egy marógép fejéhez szállítandó olaj előírt mennyisége óránként 2 liter. Ezt egy gravitációs hajtású olajozóval oldjuk meg, aminek jelenleg a kifolyása és tartályában az olaj szintje közötti szintkülönbség *H=0,4m*. A flexibilis cső hossza *l=0,9m*, átmérője d=*6mm*, a görbületek járulékos vesztesége elhanyagolható.

Az olaj kinematikai viszkozitása 10^{-4} m^2/s.

Kérdés: Határozza meg, hogy elegendő olajat szállít-e a berendezés!

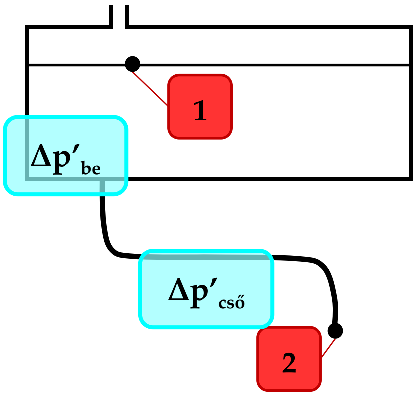
Adatok: $q_{v,előírt} = 2$ l/h; H = 0,4 m; d = 6 mm; l = 0,9 m; $\varrho_{olaj} = 800$ kg/m^3; $\upsilon_{olaj} = 10^{-4}$ m^2/s; g = 10 N/kg

MEGOLDÁS

Írjuk fel a veszteséges Bernoulli-egyenletet a folyadékfelszín (1) és a kiáramlás közé (2).

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \Delta p'$$

- az áramlás iránya 1→2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni a veszteséges tagot, ott az össznyomás kisebb lesz, mint ideális esetben
- $p_1 = p_0$; $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabad folyadékfelszín; szabadsugár
- $U_1 - U_2 = gH$
- $v_1 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_{cső}$ (konti.)



Veszteség keletkezik a csőbe történő beáramlás és a csősúrlódás következtében:

$$\Delta p' = \Delta p'_{be} + \Delta p'_{cső} = \zeta_{be} \frac{\rho}{2} v_2^2 + \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} v_2^2$$

Mind a beömlési, mind a csősúrlódási tényező kiszámításához tudnunk kell, hogy az áramlás lamináris vagy turbulens-e ($Re <> 2300$?). Ehhez azonban ismernünk kellene a csőben kialakuló áramlási sebességet (v_2-t). A következő gondolatmenet alapján járunk el:

1. feltételezzük, hogy a csőben az előírt térfogatáram valósul meg (2 l/h) - kiszámoljuk az előírt térfogatáramhoz tartozó v_2 sebességet és Reynolds-számot, megállapítjuk, hogy az áramlás lamináris vagy turbulens-e
2. Re-szám alapján eldöntjük, hogy milyen képletekkel számoljuk a beömlési és a csősúrlódási veszteséget

3. kiszámítjuk a valóságban létrejött sebességet és térfogatáramot
4. visszaellenőrizzük a valóságban kapott Reynolds-számot (lamináris, turbulens?)

1. Előírt sebesség:

$$v_e = \frac{q_{v,e}}{A} = \frac{4q_{v,e}}{d^2\pi} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{3600 \cdot 0{,}006^2\pi} = 0{,}02\frac{m}{s}$$

Előírt Reynolds-szám:

$$Re_e = \frac{v_e d}{\nu} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}006}{10^{-4}} = 1{,}2$$

2. Mivel $Re < 2300$, az áramlás lamináris, tehát:

$$\zeta_{be} = 1{,}07$$

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{Re} = \frac{64\nu}{vd}$$

3. Az 1-2 pontok közé felírt veszteséges Bernoulli egyenlet a következőképpen alakul:

$$\rho g H = \frac{\rho}{2}v_2^2 + \zeta_{be}\frac{\rho}{2}v_2^2 + \lambda\frac{l}{d}\frac{\rho}{2}v_2^2$$

$$0 = \frac{1}{2}v_2^2 + \zeta_{be}\frac{1}{2}v_2^2 + \frac{64\nu}{v_2 d}\frac{l}{d}\frac{1}{2}v_2^2 - \rho g H = v_2^2\left(\frac{1}{2} + \zeta_{be}\frac{1}{2}\right) + v_2\left(\frac{32\nu l}{d^2}\right) - gH$$

A megoldandó másodfokú egyenlet együtthatói:

$$a = \frac{1}{2} + \zeta_{be}\frac{1}{2} = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 1{,}07 = 1{,}035$$

$$b = \frac{32\nu l}{d^2} = \frac{32 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}9}{0{,}006^2} = 80\frac{m}{s}$$

$$c = -gH = -10 \cdot 0{,}4 = -4\frac{m^2}{s^2}$$

$$v_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot 1{,}035 \cdot 4}}{2 \cdot 1{,}035} = 0{,}05\frac{m}{s}$$

(A másik érték negatív.)

A kilépő térfogatáram:

$$q_v = v_2\frac{d^2\pi}{4} = 0{,}05\frac{0{,}006^2\pi}{4} = \mathbf{5{,}1\frac{l}{h}} > 2\frac{l}{h}$$

Tehát az előírt térfogatáram megvalósul.

4. Visszaellenőrzés, hogy az áramlás valóban lamináris-e:

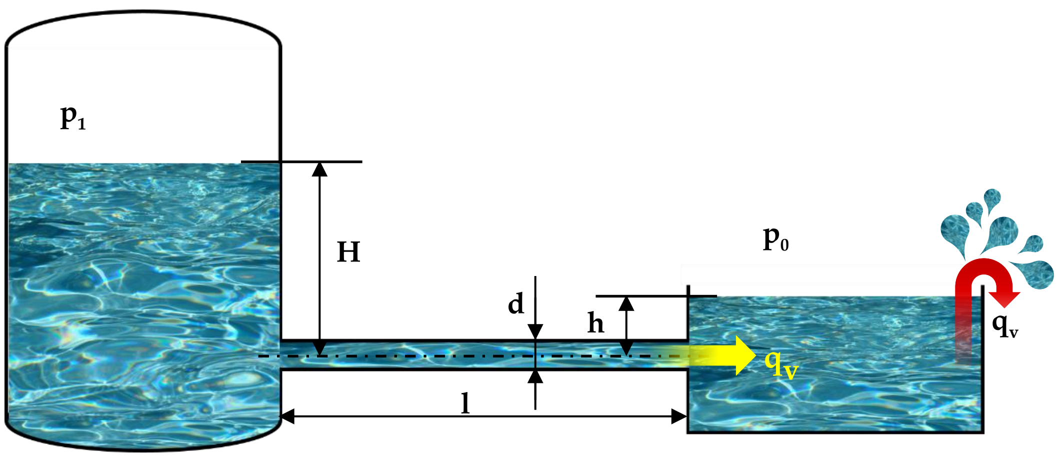
$$Re = \frac{v_2 d}{\nu} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}006}{10^{-4}} = 3 < 2300$$

Tehát az áramlás a megvalósult esetben is lamináris.

TÁPTARTÁLY MÉRETEZÉSE

Egy uszoda medencéjének vízutánpótlását kiegyenlítő tartállyal (hidrofor) biztosítjuk. A táptartályt egyenes csővezeték köti össze a medencével, a csővezeték hidraulikailag simának tekinthető. A medencéből elfolyó q_v vízmennyiség határozza meg, hogy milyen p_1 tápnyomás esetén tartható az állandó vízszint a medencében!

Figyelem: a hidraulikailag sima cső azt jelenti, hogy a fali érdesség nem lóg ki a határréteg lamináris részéből, nem pedig azt, hogy a cső veszteségmentes!



Kérdés: Mekkora p_1 tápnyomás esetén tartható az állandó vízszint a medencében?

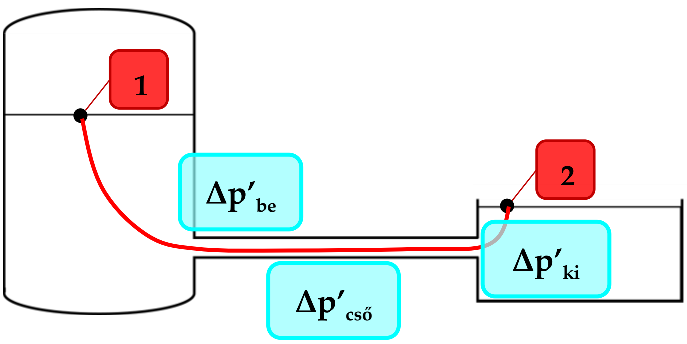
Adatok: q_v = 5 l/s; H = 1,2 m; h = 0,8 m; l = 10 m; d = 50 mm; k = 0 mm; ζ_{be} = 0,07; $\varrho_{víz}$ = 1000 kg/m³; $\upsilon_{víz}$ = 1,3·10⁻⁶ m²/s; g = 10 N/kg

MEGOLDÁS

Írjuk fel a veszteséges Bernoulli-egyenletet az tartályfelszín (1) és a medence felszíne (2) közé:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \Delta p'$$

- az áramlás iránya 1→2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni a veszteséges tagot
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabad folyadékfelszín
- $U_2 - U_1 = g(h - H)$
- $v_1 \approx v_2 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_{cső}$ (konti.)



$$\rightarrow p_1 - p_0 = \rho g(h - H) + \Delta p'$$

Veszteség keletkezik a csőbe történő beáramlás, a csősúrlódás valamint a csőből a medencébe történő kilépés következtében:

$$\Delta p' = \Delta p'_{be} + \Delta p'_{cső} + \Delta p'_{ki} = \zeta_{be} \cdot \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 + \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 + \frac{\rho}{2} v_{cső}^2$$

$$v_{cső} = \frac{4q_v}{d^2\pi} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{0{,}05^2\pi} = 2{,}55 \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{v_{cső} d}{\nu} = \frac{2{,}55 \cdot 0{,}05}{1{,}3 \cdot 10^{-6}} \cong 98000$$

Mivel az áramlás turbulens, és a cső hidraulikailag sima, és $2300 < Re < 100000$, ezért a csősúrlódási tényező a Blasius formulával számítható:

$$\lambda = \frac{0{,}316}{\sqrt[4]{Re}} = \frac{0{,}316}{\sqrt[4]{98000}} = 0{,}018$$

A veszteséges tagokat visszahelyettesítve a Bernoulli-egyenletbe a szükséges tápnyomás:

$$p_1 - p_0 = \rho g(h - H) + \zeta_{be} \cdot \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 + \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 + \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 =$$

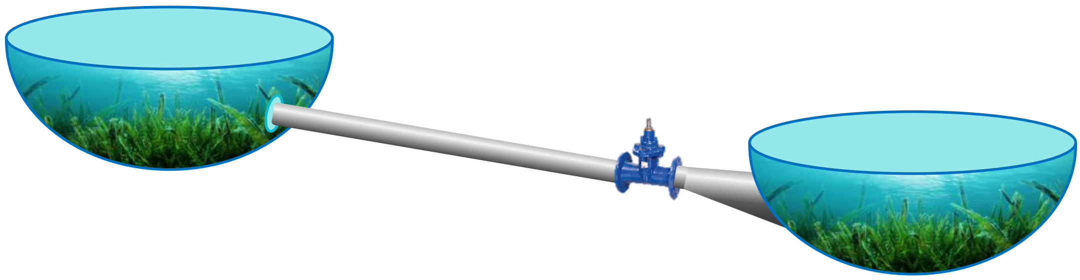
$$= 1000 \cdot 10 \cdot (0{,}8 - 1{,}2) + 0{,}07 \cdot \frac{1000}{2} \cdot 2{,}55^2 + 0{,}018 \frac{10}{0{,}05} \cdot \frac{1000}{2} \cdot 2{,}55^2 + \frac{1000}{2} \cdot 2{,}55^2$$

$$= \boldsymbol{10979 Pa}$$

KÉT TÓ

A Gödöllő Környéki Halgazdaság két tavát csővezeték köti össze. A csővezeték hossza *L=20m*, belső átmérője *D=100mm*, belső fala hidraulikailag simának tekinthető. A csővezeték tartalmaz 1db tolózárat (ζ_t) és a csővégen található egy veszteséges diffúzor (η_D), melynek kilépő keresztmetszete a belépő keresztmetszet kétszerese ($A_{ki}/A_{be} = 2$). A felső tó szintje *H=3m*-el magasabban van, mint az alsó.

Figyelem: a hidraulikailag sima cső azt jelenti, hogy a fali érdesség nem lóg ki a határréteg lamináris részéből, nem pedig azt, hogy a cső veszteségmentes!



Kérdés: a) Határozza meg a csövön átáramló térfogatáramot!
b) Határozza meg, hogy milyen tolózár veszteségtényező esetén lesz a térfogatáram az első lépésben meghatározott fele!

Adatok: H = 3 m; $L_{cső}$ = 20 m; $d_{cső}$ = 100 mm; k = 0 mm; ζ_t = 1,5; ζ_{be} = 0,07; η_D = 0,8; A_{ki}/A_{be} = 2; $\varrho_{víz}$ = 1000 kg/m³; $\upsilon_{víz}$ = 10^{-6} m²/s; g = 10 N/kg

MEGOLDÁS

a) feladatrész

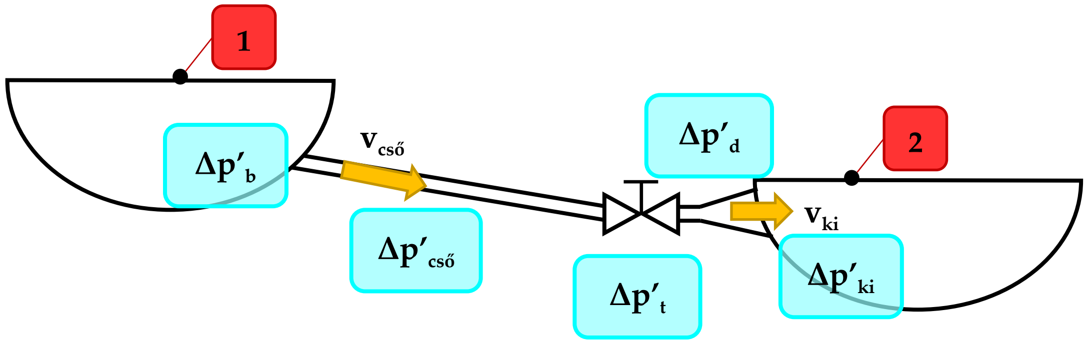
Írjuk fel a veszteséges Bernoulli-egyenletet a két tó felszíne közé (1-2):

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \Delta p'$$

- az áramlás iránya 1→2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni a veszteséges tagot
- $p_1 = p_2 = p_0 \leftarrow$ szabad felszín
- $U_1 - U_2 = gH$
- $v_1 \approx v_2 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_{cső}$ (konti.)

$$\rightarrow \rho \cdot g \cdot H = \Delta p'$$

Veszteség keletkezik a csőbe történő beáramlás, a csősúrlódás, a tolózár, a diffúzor valamint a csőből az alsó tóba történő kilépés következtében:



$$\Delta p' = \Delta p'_{be} + \Delta p'_{cső} + \Delta p'_{tolózár} + \Delta p'_{diff} + \Delta p'_{ki}$$
$$= \zeta_{be}\frac{\rho}{2}v_{cső}^2 + \lambda\frac{L_{cső}}{D_{cső}}\frac{\rho}{2}v_{cső}^2 + \zeta_t\frac{\rho}{2}v_{cső}^2 + (1-\eta_{diff})\frac{\rho}{2}(v_{cső}^2 - v_{ki}^2) + \frac{\rho}{2}v_{ki}^2$$

- $v_{ki} = \frac{v_{cső}}{2} \leftarrow \frac{A_{ki}}{A_{be}} = 2$ (konti.)

A veszteséges tagokat visszahelyettesítve a Bernoulli-egyenletbe kifejezhető a folyadék csőbéli sebessége:

$$gH = \zeta_{be}\frac{\rho}{2}v_{cső}^2 + \lambda\frac{L_{cső}}{D_{cső}}\frac{1}{2}v_{cső}^2 + \zeta_t\frac{1}{2}v_{cső}^2 + (1-\eta_{diff})\frac{1}{2}\left(v_{cső}^2 - \frac{v_{cső}^2}{4}\right) + \frac{v_{cső}^2}{8}$$

$$2gH = v_{cső}^2\left(\lambda\frac{L_{cső}}{D_{cső}} + \zeta_t + (1-\eta_{diff})\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0{,}07\right)$$

$$v_{cső} = \sqrt{\frac{2gH}{\lambda\frac{L_{cső}}{D_{cső}} + \zeta_t + (1-\eta_{diff})\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0{,}07}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 3}{\lambda\frac{20}{0{,}1} + 1{,}5 + (1-0{,}8)\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0{,}07}}$$
$$= \sqrt{\frac{60}{200\lambda + 1{,}97}}$$

Mivel λ értéke függ a Reynolds-számtól, az pedig a sebességtől, és az egyenletrendszert nem tudjuk zárt alakban megoldani, ezért **iterációs eljárásra lesz szükségünk**. Legyen a csősúrlódás tényező kiinduló értéke 0,02! (Ez tetszőleges, de ez van a Moody diagram közepén!)

$$\lambda' = 0{,}02;\ v'_{cső} = \sqrt{\frac{60}{200\cdot 0{,}02 + 1{,}97}} = 3{,}17\frac{m}{s};\ Re' = \frac{v_{cső}D_{cső}}{\nu} = \frac{3{,}17\cdot 0{,}1}{10^{-6}} = 317000$$

$$\lambda''(Moody - diag.) = 0{,}015;\ v''_{cső} = 3{,}47\frac{m}{s};\ Re'' = 347000 \rightarrow \epsilon = 8{,}8\%$$

$$\lambda''' = 0{,}014;\ v'''_{cső} = 3{,}55\frac{m}{s};\ Re'' = 355000 \rightarrow \epsilon = 2\%$$

$$\lambda^{IV} = 0{,}0135;\ v^{IV}_{cső} = 3{,}58\ \frac{m}{s};\ Re^{IV} = 352000 \rightarrow \epsilon = 1\%$$

A csőben kialakuló térfogatáram tehát:

$$\boldsymbol{q_v} = v^{IV}_{cső}\cdot\frac{D^2_{cső}\pi}{4} = \mathbf{28{,}1\frac{l}{s}}$$

b) feladatrész: a tolózár zárásával (azaz veszteségtényezőjének növelésével) a térfogatáram csökkenthető. Az beállítandó térfogatáram, ezáltal pedig a csőben kialakuló sebesség az eredetinek a fele.

$$q_{v,b} = \frac{q_v}{2} = \frac{28{,}7}{2} = 14{,}25\frac{l}{s}\ \rightarrow\ v_{cső,b} = \frac{q_{v,b}}{A} = 1{,}82\frac{m}{s}$$

Írjuk fel az a) feladatrészben is felírt veszteséges Bernoulli-egyenletet, ezúttal az új sebességgel:

$$2gH = v^2_{cső,b}\left(\lambda_b\frac{L_{cső}}{D_{cső}} + \zeta_{t.b} + \left(1-\eta_{diff}\right)\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0{,}07\right)$$

A tolózár veszteségtényezője kifejezhető:

$$\zeta_{t.b} = \frac{2gH}{v^2_{cső,b}} - \left(\lambda_b\frac{L_{cső}}{D_{cső}} + \left(1-\eta_{diff}\right)\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

A csősúrlódási tényező a Reynolds-szám alapján a Moody-diagramról olvasható le:

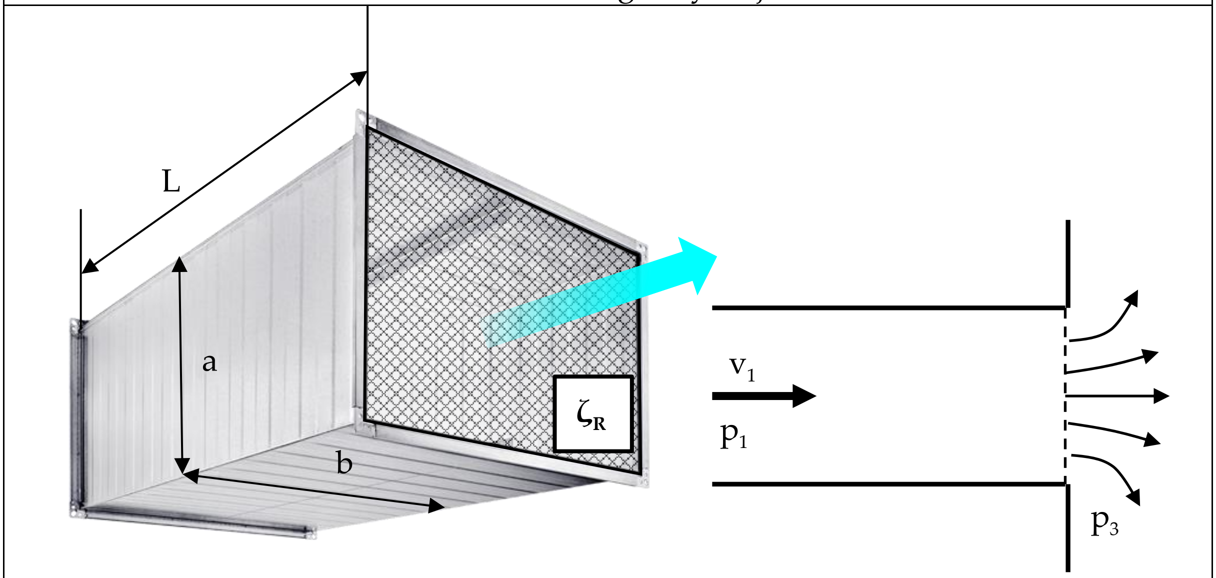
$$Re_b = \frac{v_{cső,b}D_{cső}}{\nu} = \frac{1{,}82\cdot 0{,}1}{10^{-6}} = 182000\ \rightarrow\ \lambda_b\ = 0{,}015$$

A tolózár beállítandó veszteségtényezője ahhoz, hogy a térfogatáram a felére csökkenjen:

$$\boldsymbol{\zeta_{t.b}} = \frac{2gH}{v^2_{cső,b}} - \left(\lambda_b\frac{L_{cső}}{D_{cső}} + \left(1-\eta_{diff}\right)\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0{,}07\right)$$
$$= \frac{2\cdot 10\cdot 3}{1{,}82^2} - \left(0{,}015\frac{20}{0{,}1} + (1-0{,}8)\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0{,}07\right) = \mathbf{14{,}71}$$

LÉGCSATORNA RÁCCSAL

Az ábrán látható téglalap keresztmetszetű, *0,5 mm* fali érdességű *12 m* hosszúságú csatornán keresztül levegőt szállítunk egy p_3 nyomású helyiségbe. A csatorna kilépő keresztmetszetében található rács veszteség-tényezője $\zeta_R = 0{,}6$.



Kérdés:	Határozza meg a $p_1 - p_3$ statikus nyomáskülönbséget!
Adatok:	L = 12 m; a = 0,3 m; b = 0,5 mm; k = 0,5 mm; ζ_R = 0,6; v_1 = 8 m/s; ϱ_{lev} = 1,2 kg/m^3; υ_{lev} = 15·10^{-6} m^2/s

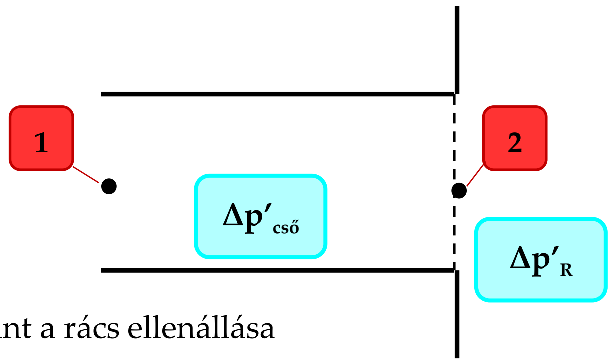
MEGOLDÁS

Írjuk fel a veszteséges Bernoulli-egyenletet az 1-2 pontok között:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \Delta p'$$

- $p_2 = p_3 \leftarrow$ szabadsugár
- $U_2 - U_2 = 0$
- $v_1 = v_2 = v \leftarrow A_1 = A_2;\ \rho_1 = \rho_2$

$$\rightarrow p_1 - p_3 = \Delta p'$$



Veszteség keletkezik a csősúrlódás, valamint a rács ellenállása következtében:

$$\Delta p' = \Delta p'_{cső} + \Delta p'_{rács} = \lambda \frac{L}{d_e} \frac{\rho}{2} v^2 + \zeta_R \frac{\rho}{2} v^2$$

A veszteséges tagokat visszahelyettesítve a Bernoulli-egyenletbe kifejezhető a keresett nyomáskülönbség:

$$p_1 - p_3 = \lambda \frac{L}{d_e} \frac{\rho}{2} v^2 + \zeta \frac{\rho}{2} v^2$$

A csősúrlódási tényező meghatározáshoz **szükséges a *Reynolds-szám* és a *d/k* viszony** meghatározása. Mivel a csövünk nem kör keresztmetszetű, ám a feladatmegoldáshoz használt Moody-diagram csak kör keresztmetszetű csövekre érvényes, ezért bevezetjük a hidraulikailag egyenértékű csőátmérő fogalmát. A hidaulikailag egyenértékű átmérő megmutatja, hogy mekkora átmérőjű, kör keresztmetszetű csőnek lenne azonos fali csúsztatófeszültség mellett ugyanakkora nyomásesése azonos hosszon, mint az adott, jelen esetben téglalap keresztmetszetű csőnek. Ez a következőképpen számolható:

$$d_e = \frac{4A}{K} = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5}{2(0{,}3 + 0{,}5)} = 0{,}375m$$

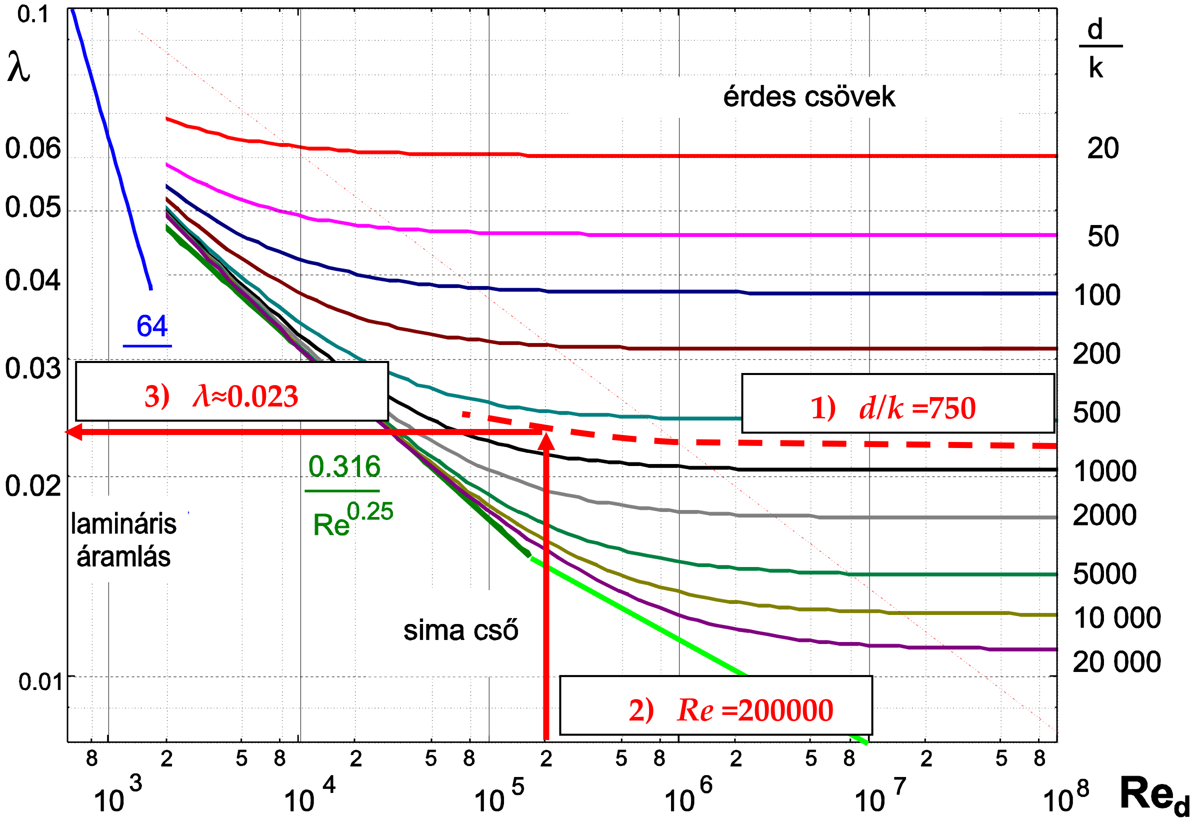
Az egyenértékű átmérő alapján számítható a Reynolds-szám és a relatív érdesség (d/k):

$$Re = \frac{v d_e}{\nu} = \frac{8 \cdot 0{,}375}{15 \cdot 10^{-6}} = 200000$$

$$\frac{d_e}{k} = \frac{0{,}375}{0{,}5 \cdot 10^{-3}} = 750$$

Ezekből az adatokból a csősúrlódási tényező a Moody-diagram segítségével a következő módon határozható meg:

1) az adott ***d/k*** értékhez tartozó vonal megkeresése jobb oldali ordinátán, ha nincs a diagramon „szemmel behúzzuk”
2) az adott ***Re*** felvetítése a ***d/k*** vonalunkra
3) az ehhez a ponthoz tartozó csősúrlódási tényező leolvasása a bal oldali ordinátáról



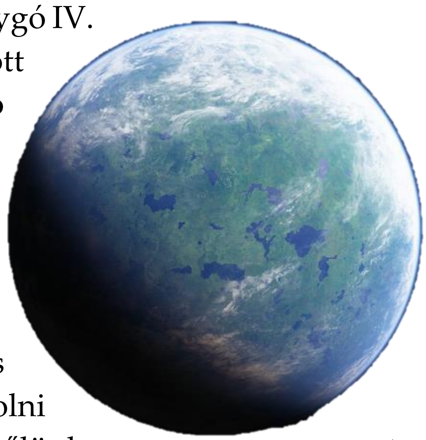
Tehát a csősúrlódási tényező, és abból a keresett nyomáskülönbség:

$\lambda = 0{,}023$

$$p_1 - p_3 = \lambda \frac{L}{d_e}\frac{\rho}{2}v^2 + \zeta\frac{\rho}{2}v^2 = 0{,}023 \cdot \frac{12}{0{,}375} \cdot \frac{1{,}2}{2} \cdot 8^2 + 0{,}6 \cdot \frac{1{,}2}{2} \cdot 8^2 = \mathbf{51\,Pa}$$

Gázdinamika

A YAVINI CSATA



Épp jól megérdemelt pihenésünket töltjük a Yavin bolygó IV. holdján, amikor délutáni szundikálásunkat a csukott szemhéjunkon átszűrődő, hirtelen felvillanó lézernyaláb fénye zavarja meg. Az épp ránk törni készülő pánikroham elkerülése végett hangosan számolni kezdünk, egyet másodpercenként. 15-nél már épp megnyugodnánk, amikor hatalmas robaj rázza meg körülöttünk a levegőt. Ösztöneink azt súgják, hogy nem messze tőlünk egy intergalaktikus csata készül kirobbanni. Pánikszerűen újra számolni kezdünk, mégpedig azt, hogy milyen messze van tőlünk a csata. Az útikalauz szerint a Yavin IV légkörét a földi levegőhöz nagymértékben hasonlatos gáz tölti ki, melynek specifikus gázállandója 287 J/(kgK), adiabatikus kitevője pedig 1,4. Asztometeorológia feljegyzéseink szerint a Yavin IV-en uralkodó hőmérséklet ebben a pillanatban 15°C.

Kérdés: Határozzuk meg, hogy milyen messze van tőlünk a csata!

Adatok: $R = 287$ J/(kgK); $\kappa = 1{,}4$; $T = 15°C$; $\Delta t = 15s$

MEGOLDÁS

A fény nagy terjedési sebessége (300.000 km/s) miatt feltételezhetjük, hogy a felvillanás $t \approx 0s$ alatt éri el a pihenésünk helyszínét, így a csata tőlünk való távolsága a hang terjedési sebessége (a-val jelölve) alapján számítható:

$$a = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot (273 + 15)} = 340\,\frac{m}{s}$$

A hang által 15s alatt megtett út megadja a csata távolságát:

$$s = a \cdot t = 340 \cdot 15 = 5100m$$

Azaz:

$s \cong \frac{t}{3} \cdot 1000$; ha a villanás és a robbanás (vagy villámlás és mennydörgés) között eltelt időt elosztjuk 3-mal, megkapjuk a csata (vihar) körülbelüli távolságát kilométerben.

X-WING

Egy T-65B Xwing Starfighter repülőgép szeli csukott szárnyakkal, *u=200 m/s* sebességgel a *t=0°C* hőmérsékletű felhőket. A repülőgép szárnyának felső pontján a sebesség *20%*-kal magasabb a haladási sebességnél.

Kérdés: a) Határozzuk meg a repülőgép Mach számát, a torlóponti hőmérsékletet, valamint Mach-számot a felső pontban!
b) Becsüljük meg a repülőgép súlyát, ha vízszintes EVEM-et (egyenes vonalú egyenletes mozgást) végez, és a szárny felülete 18m^2!

Adatok: u = 200 m/s; u_{SZF} = 1,2·u; t = 0°C; A_{SZ} = 18m^2;
R = 287 J/(kgK); κ = 1,4; p_0 = 1 bar; c_p = 1004 J/(kg/K);

MEGOLDÁS

Kezdeti (általános) megfontolások: amennyiben az áramló közeg összenyomható, - pl. ha a szobahőméréskleten a levegő sebessége nagyobb, mint ~100m/s – a Bernoulli-egyenlet nem használható, helyette az energia-egyenletet alkalmazzuk. Az energia-egyenlet stacionárius, hőszigetelt és súrlódásmentes áramlást feltételezve, valamint a térerő és a helyzeti energia figyelmen kívül hagyásával a következő alakot ölti:

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{v^2}{2}+c_v\right)\rho dV=-\int \underline{v}pd\underline{A}$$

, azaz a gáz mozgási és belső energiájának megváltozása a nyomásból származó erők munkájának következménye. Matematikai és hőtani ismereteket felhasználva a fenti egyenlet a következő, mérnöki számításokban egyszerűbben használható alakra hozható:

$$\int grad\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)\rho\underline{v}dV=0$$

Az egyenlet akkor teljesül, ha $\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)$ vagy az egész vizsgált térrészben, vagy egy áramvonal mentén állandó. Az energia-egyenlet tehát azt fejezi ki, hogy a gáz mozgási energiájának és entalpiájának összege egy áramvonalon állandó, amennyiben az áramlás stacioner, súrlódásmentes és hőszigetelt (azaz izentrópikus). Tovább gondolva, ha az áramlás sebessége nő, akkor hőmérséklete csökken, és fordítva.

Amennyiben $\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)$-t osztjuk cp-vel, definiálhatjuk az össz-, statikus és dinamikus hőmérésékleteket (**Kelvin fokban**!):

$$T_{össz} = T_{st} + T_{din} = T + \frac{v^2}{2c_p} = áll.$$

a) feladatrész

Kezdeti megfontolások:

- az áramlás a géphez rögzített koordinátarendszerből tekintve stacionárius
- a levegő sebessége nagyobb, mint ~100m/s, az energia-egyenlet alkalmazandó

A repülőgép **Mach-száma** a hang terjedési sebességének ismeretében számolható:

$$Ma = \frac{v}{a} = \frac{200}{331} = \mathbf{0,6}$$

$$a = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 273} = 331\frac{m}{s}$$

- $T = t + 273 = 273K$

A **torlóponti hőmérséklet** kiszámításához írjuk fel az energia-egyenletet egy messzi-messzi pont (M) és a torlópont (T) között.

$$T_M + \frac{v_M^2}{2c_p} = T_T + \frac{v_T^2}{2c_p}$$

- $v_T = 0 \leftarrow$ torlópont
- $T_T = t + 273 = 273K$

A torlóponti hőmérséklet kiszámítható:

$$T_T = T_M + \frac{v_M^2}{2c_p} = 273 + \frac{200^2}{2 \cdot 1004} = \mathbf{293K}$$

Figyeljük meg, hogy a torlópontban a hőmérséklet magasabb, mint a messzi-messzi pontban, melyet alátámaszt korábbi állításunk, miszerint a lassuló áramlás hőmérséklete nő.

A **szárny feletti „SZF" pontban kialakuló Mach-szám** kiszámítása az „SZF" pontbéli hangsebesség ismeretében számítható. A hangsebesség számításához írjuk fel az energia-egyenletet M-SZF között:

$$T_M + \frac{v_M^2}{2c_p} = T_{SZF} + \frac{v_{SZF}^2}{2c_p} = T_{SZF} + \frac{(1{,}2v_M)^2}{2c_p}$$

$$T_{SZF} = T_M + \frac{v_M^2}{2c_p} - \frac{(1{,}2v_M)^2}{2c_p} = 273 + \frac{200^2}{2 \cdot 1004} - \frac{(1{,}2 \cdot 200)^2}{2 \cdot 1004} = 264K$$

Az „SZF" pontban kialakuló Mach-szám:

$$Ma_{SZF} = \frac{v_{SZF}}{a_{SZF}} = \frac{1{,}2 \cdot v_M}{\sqrt{\kappa RT_{SZF}}} = \frac{1{,}2 \cdot 200}{\sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 264}} = \mathbf{0,74}$$

b) feladatrész

Kezdeti megfontolások:

- amennyiben a repülő EVEM-t végez, a rá ható erők eredője zérus → a szárnyon keletkező felhajtóerő megegyezik a repülőgép súlyával
- a szárnyon keletkező felhajtóerő számításánál feltételezzük, hogy a szárny egésze felett kialakuló áramlási sebesség 20%-kal magasabb, mint a repülőgép haladási sebessége, a szárny alatt (SZA) viszont megegyezik azzal → ezáltal a szárny alatti nyomás és hőmérséklet is megegyezik a messzi-messzi pontbéli értékekkel
  $p_{SZA} = p_M = p_0 = 1bar$
  $T_{SZA} = t_M = t = 0°C$

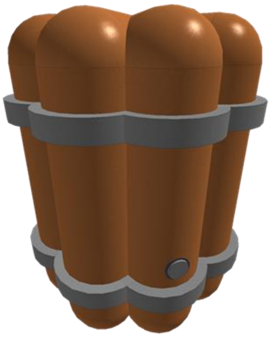
Izentrópikus állapotváltozás esetén a szárny feletti nyomás a következőképpen számítható:

$$p_{SZF} = p_{SZA} \left(\frac{T_{SZF}}{T_{SZA}}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 10^5 \cdot \left(\frac{264}{273}\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 89165Pa$$

A szárnyra ható felhajtóerő a szárny alsó és felső oldala között kialakuló nyomáskülönbség és a szárny felületének szorzataként számítható:
$F_f = (p_{SZA} - p_{SZF}) \cdot A_{SZ} = (10^5 - 89165) \cdot 18 = 195kN$

A repülőgép súlya megegyezik a szárnyra ható felhajtóerővel:
$G = F_f = \mathbf{195kN}$

TIBANNA SZIVÁRGÁS



TIE-vadászunkat hipehajtóművel szereljük fel. A hajtómű hűtőanyaga a Bespin bolygó légkörében bányászott, rendkívül robbanékony tibanna gáz, amelyet egy nagyméretű, túlnyomásos tartályban próbálunk a gázfinomítóból kicsempészni. Elővigyázatlanságunk következményeképp a tartályon egy 1cm^2-es egyszerű, lekerekített kiömlőnyílás = lyuk keletkezik, melyen keresztül az értékes gáz a szabadba áramlik. A gáz tartálybéli hőmérséklete 30°C.

Kérdés: Határozzuk meg, hogy mekkora a kiáramló gáz tömegárama, ha az ellennyomás és a tartálynyomás hányadosa:

a) $\frac{p_e}{p_t} = 0{,}99$

b) $\frac{p_e}{p_t} = 0{,}6$

c) $\frac{p_e}{p_t} = 0{,}4$

Adatok: $A = 1\,cm^2$; $p_e = p_0 = 10^5$ Pa; $t_t = 30°C$; $R_g = 287$ J(kg/K); $\kappa = 1{,}4$

MEGOLDÁS

a) feladatrész

Amennyiben $\frac{p_e}{p_t} > 0{,}95$, a nyomásváltozásból adódó sűrűségváltozás kicsi, az áramlás inkompresszibilisnek tekinthető → használható a **Bernoulli egyenlet**. A kiáramló gáz sűrűsége és hőmérséklete közelítőleg azonos a tartálybéli állapottal.

Írjuk fel a Bernoulli-egyenletet a tartály egy tetszőleges pontja és a kiáramlási pont közé:

$$p_t = p_e + \frac{\rho_t}{2} v_{ki}^2$$

A nyomásviszony és a tartálybéli hőmérséklet ismeretében számítható a kiáramlás sebessége:

$$v_{ki} = \sqrt{\frac{2}{\rho_t}(p_t - p_e)} = \sqrt{\frac{2}{p_t} R T_t \cdot p_t \left(1 - \frac{p_e}{p_t}\right)} = \sqrt{2 R T_t \left(1 - \frac{p_e}{p_t}\right)}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 287 \cdot 303 (1 - 0{,}99)} = 41{,}7 \frac{m}{s}$$

A tartálybéli sűrűség számítása az ideális gáztörvényből:

$$\rho_t = \frac{p_t}{R T_t} = \frac{p_e}{0{,}99 R T_t} = \frac{10^5}{0{,}99 \cdot 287 \cdot 303} = 1{,}16 \frac{kg}{m^3}$$

A kiáramló térfogatáram:

$$q_m = \rho_t v_{ki} A = 1{,}16 \cdot 41{,}7 \cdot 10^{-4} = \mathbf{4{,}8 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{s}}$$

b) feladatrész

Amennyiben $0{,}95 > \frac{p_e}{p_t} > 0{,}53$, a kiáramlás **izentrópikus**. A kiáramlás sebessége hangsebesség alatti, a kiáramló közeg sűrűsége, és hőmérséklete az izentrópikus állapotváltozást leíró összefüggésekből számolható. A gáz a kilépésnél környezeti nyomásra expandál. A Bernoulli-egyenlet nem érvényes, helyette az **energia-egyenletet** használjuk:

Írjuk fel az energia-egyenletet a tartály egy tetszőleges pontja és a kiáramlási pont közé:

$$T_t = T_{ki} + \frac{v_{ki}^2}{2 c_p}$$

A nyomásviszony és a tartálybéli hőmérséklet ismeretében számítható a kiáramlás sebessége:

$$v_{ki} = \sqrt{2c_p(T_t - T_{ki})} = \sqrt{2\frac{\kappa R}{\kappa - 1}T_t\left(1 - \frac{T_{ki}}{T_t}\right)} = \sqrt{2\frac{\kappa R}{\kappa - 1}T_t\left(1 - \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}$$

$$= \sqrt{2\frac{1{,}4 \cdot 287}{1{,}4 - 1}303\left(1 - 0{,}6^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}}\right)} = 287\frac{m}{s}$$

- $c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1}$
- $\frac{T_{ki}}{T_t} = \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$

A kiáramló gáz sűrűsége az inzetrópikus állapotváltozásból számítható:

$$\rho_{ki} = \rho_t\left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_t}{RT_t}\left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_e}{0{,}6RT_t}\left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{10^5}{0{,}6 \cdot 287 \cdot 303}0{,}6^{\frac{1}{1{,}4}} = 1{,}33\frac{kg}{m^3}$$

A kiáramló térfogatáram:

$$q_m = \rho_{ki}v_{ki}A = 1{,}33 \cdot 287 \cdot 10^{-4} = \mathbf{38 \cdot 10^{-3}\frac{kg}{s}}$$

c) feladatrész

Amennyiben $\frac{p_e}{p_t} < 0{,}53$, tehát a nyomásviszony az ún. kritikus nyomásviszonynál kisebb, a kiáramló gáz sebessége eléri a hangsebességet. A kiáramlási keresztmetszetben expanziós hullámon keresztül csökken a nyomás a környezeti nyomásra. Az expanziós hullám veszteséget okoz, emiatt az energiaegyenlet és az adiabatikus közelítés nem használható! Amennyiben a nyomás viszony kisebb, mint a kritikus nyomásviszony, akkor a legszűkebb keresztmetszetben az áramlási sebesség meg fog egyezni a lokális hangsebességgel (és így egyszerű lekerekített kiömlőnyílás esetén nem is tudjuk tovább gyorsítani az áramlást a nyomásviszony csökknetésébvel) kiáramló gáz hőmérséklete és sűrűsége a kritikus állapotra vonatkozó egyenletekből számítható. A legszűkebb keresztmetszetre érvényes dolgokat * kitevővel jelöljük:

$$\frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{p}{p_t}\right)_{krit} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \approx 0{,}53$$

$$\frac{T^*}{T_t} = \left(\frac{T}{T_t}\right)_{krit} = \frac{2}{\kappa + 1} \approx 0{,}83$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)_{krit} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \approx 0{,}63$$

A kiáramlás sebessége a helyi hangsebességgel megegyező, a kritikus hőmérséklet ismeretében számítható:

$$v_{ki} = a^* = \sqrt{\kappa R T^*} = \sqrt{\kappa R T_t \frac{2}{\kappa + 1}} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 303 \cdot \frac{2}{1{,}4 + 1}} = 319 \frac{m}{s}$$

A kiáramlás sűrűsége a kritikus állapotra vonatkozóan:

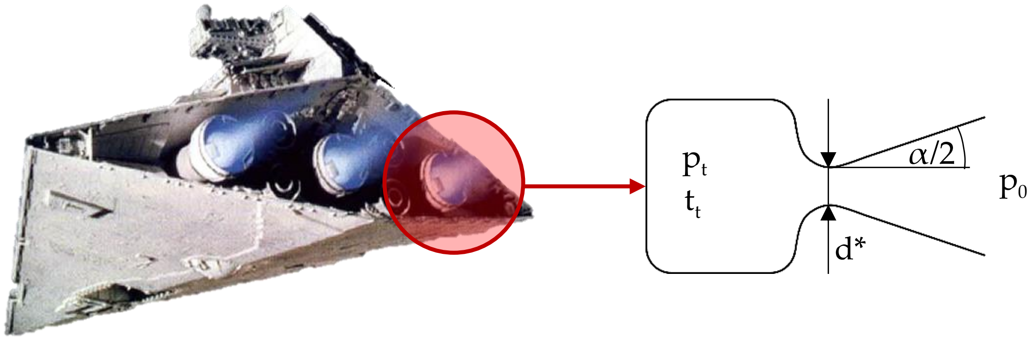
$$\rho_{ki} = \rho^* = \rho_t \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = \frac{p_e}{0{,}4 R T_t} \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = \frac{10^5}{0{,}4 \cdot 287 \cdot 303} \left(\frac{2}{1{,}4 + 1}\right)^{\frac{1}{1{,}4 - 1}} = 1{,}82 \frac{kg}{m^3}$$

A kiáramló térfogatáram:

$$q_m = \rho_{ki} v_{ki} A = 1{,}82 \cdot 319 \cdot 10^{-4} = \mathbf{58 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{s}}$$

BIRODALMI CSILLAGROMBOLÓ

A Galaktikus Birodalom megbízta a mérnökirodánkat a 2-es osztályú birodalmi csillagromboló hajtóművének kifejlesztésével. A Vader Nagy Úr által kudarc esetén alkalmazott fegyelmezési eszközöktől tartunk, ezért nagyon gondosan járunk el és kisminta kísérletet is végzünk. A kísérlet során egy tartályból gázt expandáltatunk izentrópikusan egy Laval-csövön keresztül a szabadba. A Laval-cső legkisebb keresztmetszete 5cm átmérőjű, a nyílásszöge 5°.



Kérdés: Határozzuk meg a Laval-cső kilépő átmérőjét és a hosszát!

Adatok: p_t=4bar; t_t = 27°C; R = 287 J(kg/K); p_0 = 10^5 Pa; κ=1,4; d^* = 5 cm, α = 5°

MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások: Egy jól megtervezett Laval-fúvókában az állapotváltozás végig izentrópikus és a kiáramlási sebesség kritikusnál kisebb nyomásviszony esetén meghaladja a lokális hangsebességet, a legszűkebb keresztmetszetben pedig meg fog egyezni a lokális hangsebességgel.

Számoljuk ki a tartály és az ellenyomás viszonyát:

$$\frac{p_e}{p_t} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

További megfontolások:

- mivel a nyomásviszony a kritikus ~0,53 érték alatt van, azért az áramlás a Laval-fúvóka legkisebb keresztmetszetében eléri a hangsebességet, majd pedig a növekvő keresztmetszetű csőtoldatban tovább gyorsul
- amennyiben a Laval-csövet megfelelően méreteztük, az állapotváltozás izentrópikusnak tekinthető, valamint az áramlás a kilépő keresztmetszetben környezeti nyomásra expandál
- a megoldásnál felhasználjuk, hogy a kontinuitás továbbra is érvényben van: a Laval-cső legkisebb keresztmetszetének geometriája ismert, az ott jellemző állapotjelzők számíthatók → a tömegáram számítható

A tömegáram számítása a legkisebb keresztmetszetben:

$q_m^* = \rho^* \cdot v^* \cdot A^*$

- $\rho^* = \rho_t \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \frac{p_t}{R \cdot T_t} \cdot \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \frac{4 \cdot 10^5}{287 \cdot 300} \cdot \left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{\frac{1}{1{,}4-1}} = 2{,}95\,\frac{kg}{m^3}$
- $v^* = a^* = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T^*} = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_t \frac{2}{\kappa+1}} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 300 \cdot \frac{2}{1{,}4+1}} = 317\,\frac{m}{s}$
- $A^* = \frac{d^{*2} \cdot \pi}{4} = \frac{0{,}05^2 \cdot \pi}{4} = 1{,}96 \cdot 10^{-3} m^2$

A legkisebb keresztmetszeten átáramló tömegáram tehát:

$q_m^* = \rho^* \cdot v^* \cdot A^* = 2{,}95 \cdot 317 \cdot 1{,}96 \cdot 10^{-3} = 1{,}83\,\frac{kg}{s}$

Írjuk fel a Laval-fúvókából kiáramló tömegáramot, mely a kontinuitás miatt megegyezik q_m^*-gal:

$q_{m,ki} = \rho_{ki} \cdot v_{ki} \cdot A_{ki} = q_m^*$

- $\rho_{ki} = \rho_t \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_t}{RT_t} \cdot \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{4 \cdot 10^5}{287 \cdot 300} \cdot 0{,}25^{\frac{1}{1{,}4}} = 1{,}73\,\frac{kg}{m^3}$ ← izentrópikus
- $v_{ki} = \sqrt{2c_p(T_t - T_{ki})} = \sqrt{2\frac{\kappa R}{\kappa-1} T_t \left(1 - \frac{T_{ki}}{T_t}\right)} = \sqrt{2\frac{\kappa R}{\kappa-1} T_t \left(1 - \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)} =$
  $\sqrt{2 \cdot \frac{1{,}4 \cdot 287}{1{,}4-1} \cdot 300 \cdot \left(1 - 0{,}25^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}}\right)} = 444\,\frac{m}{s}$ ← tartály egy tetszőleges pontja és kiáramlás közé felírt energia-egyenletből
- $A_{ki} = \frac{d_{ki}^2 \pi}{4}$

Az egyenlet átrendezésével a kilépő keresztmetszet átmérője számítható:

$d_{ki} = \sqrt{\frac{q_m^*}{\rho_{ki} \cdot v_{ki}} \cdot \frac{4}{\pi}} = \sqrt{\frac{1{,}83}{1{,}73 \cdot 444} \cdot \frac{4}{\pi}} = 55mm$

Ismerve a kritikus és a kilépő keresztmetszet átmérőjét valamint a Laval-fúvóka nyílásszögét, a keresett hossz a következőképpen számítható:

$L_{Laval} = \frac{d_{ki} - d^*}{2 \cdot \tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{55 - 50}{2 \cdot \tan\frac{5°}{2}} = \boldsymbol{59mm}$

Egy T14-es hiperhajtómű *V=10m³* térfogatú hűtőtartályban *40 kg* oxigéngáz van. A tartály hőmérséklete *t=22°C*. A Naboo bolygóról való menekülés közben a tartály falán kis nyílás (*A=1cm²*) keletkezett, amin keresztül a gáz áramlik a környezetbe.

Kérdés: a) Határozza meg a tartálynyomást!
b) Határozza meg a kiáramlási sebességet!
c) Határozza meg a kiáramlás tömegáramát!

Adatok: $V=10m^3$; $m = 40$ kg; $A = 1cm^2$; $p_0 = 10^5$ Pa; $t_t = 22°C$; $R = 260$ J/(kg/K); $\kappa=1{,}4$

MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások:

- mivel a tartály térfogata állandó és a benne lévő gáz tömegváltozását elhanyagoljuk, isochor állapotváltozással számolunk (ϱ=áll)

a) feladatrész

A tartálynyomás kiszámítása az ideális gáztörvény segítségével:

$$p_t = \rho_t R T_t = \frac{m}{V} R T_t = \frac{40}{10} \cdot 260 \cdot 295 = \mathbf{307000 Pa}$$

- $\rho_t = \frac{m}{V} = \frac{40}{10} = 4\frac{kg}{m^3}$

b) feladatrész

A kiáramlás meghatározásához ismernünk kell a nyomásviszonyt:

$$\frac{p_0}{p_t} = \frac{100000}{307000} = 0{,}326 < 0{,}53$$

A nyomásviszony a kritikus nyomásviszony alatt van, tehát a kiáramlás eléri a hangsebességet, de tovább már nem gyorsítható:

$$v_{ki} = a = \sqrt{\kappa R T^*} = \sqrt{\kappa R \cdot \frac{2}{\kappa+1} T_t} = \sqrt{1{,}4 \cdot 260 \cdot 0{,}83 \cdot 295} = \mathbf{299 \frac{m}{s}}$$

- $T^* = \frac{2}{\kappa+1} T_t$

c) feladatrész

A kiáramlás tömegárama a kiáramlási sebesség és sűrűség ismeretében számítható:

$$q_m = \rho_{ki} v_{ki} A_{ki} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \cdot \rho_t v_{ki} A_{ki} = 0{,}63 \cdot 4 \cdot 299 \cdot 10^{-4} = \mathbf{0{,}076} \, \frac{\boldsymbol{kg}}{\boldsymbol{s}}$$

- $\rho_{ki} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \cdot \rho_t$