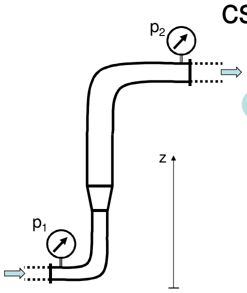
Hidraulika

Kristóf Gergely
BME Áramlástan Tanszék
2014 november

Összenyomhatatlan áramlás csövekben



Bernoulli:

$$\underbrace{p_1 + \rho g z_1}_{P_1} + \frac{\rho}{2} v_1^2 = \underbrace{p_2 + \rho g z_2}_{P_2} + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \Delta p'$$

hidraosztatikus nyomás leválasztása

Össznyomás változás:

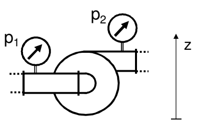
$$\Delta p' = \underbrace{\sum_i \zeta_i \frac{\rho}{2} v_i^2}_{\text{helyi veszt.}} + \underbrace{\sum_j \frac{\rho}{2} v_j^2 \frac{L_j}{d_j} \lambda_j}_{\text{csősúrlódás}}$$

Átlagsebesség bármely metszetben: $v_i = \frac{q_v}{A_i}$ ahol A_i a cső keresztmetszeti területe

Passzív elemek és szivattyú

Számolhatunk méter dimenzióban:

$$\underbrace{\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g}}_{h_{t,1}} = \underbrace{\frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}}_{h_{t,2}} + \underbrace{\Delta h'}_{\Delta h' = \frac{\Delta p'}{\rho g}}$$

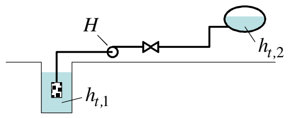


Szivattyúra:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} - H$$

H szállítómagasság: az egységnyi súlyú folyadékon végzet munka. $H = f(q_v)$.

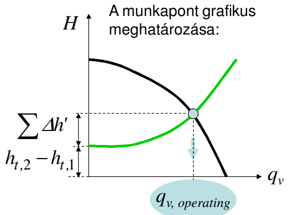
Hidraulikai energiamérleg



A passzív elemek veszteségét a szivattyú pótolja:

$$h_{t,2}-h_{t,1}=H-\sum_i \Delta h'_i$$

A munkapont grafikus meghatározása:



Ebből kifejezhető a szivattyú szállítómagassága:

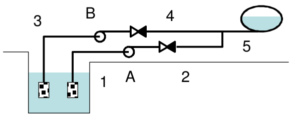
$$H=h_{t,2}-h_{t,1}+\sum_i \Delta h'_i$$

Adott: $H=f(q_v)$.

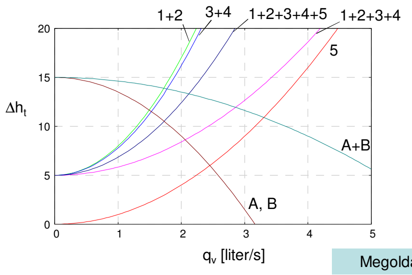
Adott, állandó.

Kifejezhető mint: $q_v^2\cdot\mathrm{const.}$

1. feladat

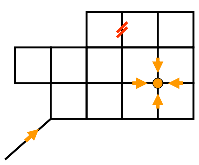


a) Magyarázza el, hogyan kombinálhatók a jelleggörbék!
b) Mekkora az 5. cső vesztesége?
c) Mekkora szállítómagassággal üzemel az A és a B szivattyú?



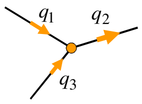
Megoldás

Hurkolt hálózatok

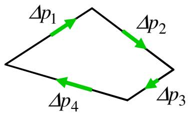


- Előnyös nagy elosztó hálózatok esetében (pl. városi ivóvíz hálózat).
- A víz mindig áramlik a rendszerben.
- A nagy helyi fogyasztást jobban tolerálja.
- A hálózat minimális része esik ki egy cső lezárása esetén.

Kirchoff törvények



I.) Kontinuitás csomópontonként.

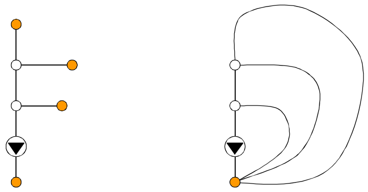


II.) A nyomásesések előjeles összege hurkokra.

Hurkolt hálózat fából

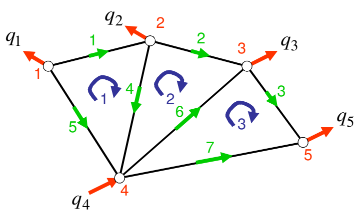
A fa topológia mindig átalakítható hurkolt hálózattá:
A külső környezetnek megfelelő pontok együttesen kielégítik a kontinuitást, és azonos nyomásúak, ezért összevonhatók.

Pl. egy elszívó hálózat szerkezete:



A hurkolt hálózat általánosabb, mint a fa struktúrájú hálózat.

A hálózat elemei



csomópontok: 1..N
ágak: 1..E
hurkok: 1..L

q_i betáplálás, ha q_i>0,és fogyasztás, ha q_i<0.
q_i csak csomópontokban lehet.
q_i -nak ki kell elégíteni:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = 0$$

Csomóponti mátrix

Ismeretleneink: x_j ágáramok. Előjelük:

+: ha az áramlás iránya egyezik az ág irányával;

- : ha ellentétesek.

Csomóponti egyenletek: $$q_i = \sum_{j=1}^{E} a_{ij} x_j \qquad \text{(i: 1..N)}$$

a_{ij} a topológiai mátrix elemei:

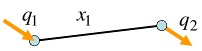
a_{ij} = 1: ha j ág kifelé vezet i pontból;

a_{ij} = -1: ha j ág befelé vezet i pontba;

a_{ij}= 0: ha j ág elkerüli i csomópontot.

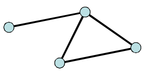
Az egyenletek száma

Csak N-1 független csomóponti egyenlet van, mivel q_i betáplálások előjeles összege 0. Pl:



$$x_1 = q_1$$

Hány csomópontunk van?



$$N = 1 + E - L$$

Összesen E ismeretlenünk van: $$E = \underbrace{N-1}_{\text{Független csomóponti egyenletek száma}} + L$$

Hurokegyenletek száma.

A hurokegyenletek felírásával az egyenletrendszer lezárható.

Hurokegyenletek

Össznyomásveszteség j ágon: $$\Delta p'_j = \frac{\rho}{2} \frac{x_j |x_j|}{A_j^2} \left(\frac{\ell_j}{d_j} \lambda_j + \zeta_j \right)$$

$$\Delta p'_j = k_j \, x_j |x_j|$$

A k-adik hurok hurokegyenlete: $$\sum_{j=1}^{E} b_{kj} \Delta p'_j = 0 \qquad \text{(k: 1..L)}$$

b_{kj} a hurokmátrix elemei:

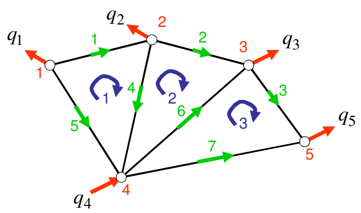
b_{kj} = 1: ha j ág irányítása egyezik k hurokéval;

b_{kj} = -1: ha j ág és k hurok irányítása ellentétes;

b_{kj}= 0: ha j ág nincs benn k hurokban.

2. feladat

a) Írja fel a hurokmátrixot az alábbi hálózatra:



b) Konstans indexekkel írja fel az 1-es hurok hurokegyenletét!

Megoldás

Cross-módszer

Igen egyszerűen implementálható iteratív megoldás hurkolt hálózatokhoz:

1. Vegyük fel az ágáramokat úgy, hogy kielégüljenek a csomóponti egyenletek.
   Pl. ha nincsenek betáplálások, akkor lehet kezdőérték $x_i = 0$.
2. A k hurokban minden j ág x_j áramának korrekciója egy q_k korrekciós hurokárammal úgy, hogy a hurokegyenlet is kielégüljön.
   A csomóponti egyenletek továbbra is kielégülnek.
3. A hurkokat egymást követően korrigáljuk.
   Közben egyre kevésbé rontjuk el a szomszédos hurkok hurokegyenleteit.
4. Sokszor ismételjük az egész hurok sorozatra, amíg a korrekciók elenyészően kicsik lesznek.

Hurokkorrekció (1)

Hurokegyenletek: $$\sum_{j=1}^{E} b_{kj} \Delta p'_j = 0$$

A korrigált ágáramok kielégítik a hurokegyenletet. k hurokra:

$$\sum_{j=1}^{E} b_{kj} k_j \left(x_j + b_{kj} q_k\right)\left|x_j + b_{kj} q_k\right| = 0$$

q_k számításakor közelítésekkel élünk:

1. x_j előjele nem változik meg a korrekció hatására:

$$\sum_{j=1}^{E} b_{kj} k_j \, sg(x_j)\left(x_j + b_{kj} q_k\right)^2 = 0$$

2. Ha q_k már kicsi, a másodrendű tag elhanyagolható:

$$\sum_{j=1}^{E} b_{kj} k_j \, sg(x_j)\left(x_j^2 + 2 x_j b_{kj} q_k\right) = 0$$

Hurokkorrekció (2)

$$\sum_{j=1}^{E} b_{kj} k_j \, sg(x_j)\left(x_j^2 + 2x_j b_{kj} q_k\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{E}\left(b_{kj} k_j x_j |x_j| + 2 b_{kj}^2 k_j |x_j| q_k\right) = 0$$

q_k értéke állandó a k hurokban, ezért:

$$\sum_{j=1}^{loop\,k} b_{kj} k_j x_j |x_j| + q_k \sum_{j=1}^{loop\,k} 2 b_{kj}^2 k_j |x_j| = 0$$

$$q_k = -\frac{\sum_{j=1}^{loop\,k} b_{kj} k_j x_j |x_j|}{\sum_{j=1}^{loop\,k} 2 b_{kj}^2 k_j |x_j|}$$

Aztán korrigáljuk az ágáramokat:

$$x_j^{n+1} = x_j^n + b_{kj} q_k$$

Newton-Raphson módszer direkt megoldással

Sajnos az iteratív megoldás nem mindig konvergál. Ilyen esetekben célszerű direkt megoldást alkalmazni a hurokkorrekciók számítására.

Ilyenkor a j-edik ágáramot az összes hurok figyelembevételével korrigáljuk:

$$x_j^{n+1} = x_j^n + \sum_{m=1}^{L} b_{mj} q_m$$

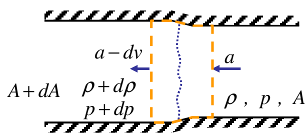
Ennek figyelembevételével a k-adik hurokegyenlet:

$$\sum_{j=1}^{E}\left(b_{kj} k_j x_j^n |x_j^n| + 2 b_{kj} k_j |x_j^n| \underline{\sum_{m=1}^{L} b_{mj} q_m} \right) = 0$$

Ez egy L (k:1..L) lineáris egyenletből álló rendszer az ismeretlen q_m (m:1..L) hurokkorrekció értékekre, melyeket direkt megoldási módszerrel (pl. Gauss-Jordan módszerrel megoldhatunk).

Hullámterjedés folyadék vezetékekben (1)

A dp, nyomásugrás hatására a cső keresztmetszete dA–val nő.



Kontinuitás:

$$(a - dv)(\rho + d\rho)(A + dA) = a\,\rho\,A \qquad a\,\rho\,dA + a\,d\rho\,A - dv\,\rho\,A = 0$$

Impulzustétel:

$$A\,\rho\,a\left(a - (a - dv)\right) = (A + dA)(p + dp) - Ap - \underbrace{p_{wall}\,dA}_{R}$$

ahol R a falra ható axiális erő.

$p_{wall} \approx p$ amit az Alievi-féle lökés alapján: $\rho\,a\,dv = dp$

Hullámterjedés folyadék vezetékekben (2)

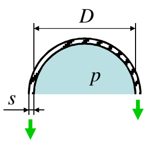
$$a\,\rho\,dA + a\,d\rho\,A - dv\,\rho\,A = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{dv}{a} = \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\rho\,a\,dv = dp \quad\rightarrow\quad \frac{dv}{a} = \frac{dp}{\rho\,a^2}$$

$$\frac{dp}{\rho\,a^2} = \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho}$$

$$a^2 = \frac{1}{\frac{\rho}{A}\frac{dA}{dp} + \frac{d\rho}{dp}}$$

Hullámterjedés folyadék vezetékekben (3)



Hook-törvény: $\sigma = E_w \varepsilon$

$$\frac{dp\,D}{2s} = E_w \frac{dD}{D} = \frac{E_w}{2}\frac{dA}{A}$$

$$\frac{\rho}{A}\frac{dA}{dp} = \frac{\rho}{E_w}\frac{D}{s}$$

$$\sigma = E_\ell \varepsilon$$

$$-dp = -E_\ell \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{E_\ell}$$

$$a^2 = \frac{1}{\frac{\rho}{A}\frac{dA}{dp} + \frac{d\rho}{dp}} = \frac{1}{\frac{\rho}{E_w}\frac{D}{s} + \frac{\rho}{E_\ell}} = \frac{E_r}{\rho}$$

ahol E_r a redukált modulus:

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1}{E_\ell} + \frac{1}{E_w}\frac{D}{s}$$

Itt vigyázni kell: a buborékos gáztartalom igen jelentősen csökkentheti E_ℓ értékét.

3. feladat

A) Hasonlítsa össze a végtelen víztérre és az alábbi paraméterekkel adott vízzel telt acélcsőre jellemző hullámsebességet:

Átmérő: 500 mm,
Falvastagság: 10 mm,
$E_{víz}$: 2.0 x 10^9 Pa,
$E_{acél}$: 2.1 x 10^{11} Pa.

B) Milyen s/D arány esetében lesz a hangsebesség csökkenése 5% a vízre jellemző hangsebességhez képest?

Megoldás

Instacionárius áramlás folyadék vezetékekben

A kontinuitási egyenlet állandó keresztmetszetű csőre:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\, v)=0$$

Mozgásegyenlet 1D, kompreszibilis áramlásra:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+f$$

f a falsúrlódásból eredő erőt jelöli, mely a hidraulikai veszteség alapján:

$$f=\frac{1}{\rho}\frac{\Delta p'}{\Delta x}$$

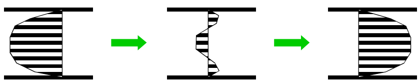
a csősúrlódás okozta veszteség Darcy-Weisbach formula alapján:

$$\Delta p'=-\frac{\rho}{2}v|v|\frac{\Delta x}{D}\lambda$$, melyből: $$f=-\frac{\lambda}{2D}v|v|$$

Csősúrlódási tényező instacionárius áramlásra

Szinuszosan ingadozó sebesség esetén λ kifejezhető Re és St = f D / v alapján.

Amikor a nyomásgradiens előjelet vált, akkor a sebességprofil:



Az instacionárius áramlásra vonatkozó λ értékek általában nagyobban a stacionárius értékeknél a határréteg periodikus frissülése miatt.
Lamináris áramlás esetére analitikus megoldás is van.

Turbulens áramlás esetén λ értékét zárt csőben végzett rezonancia kísérletekkel határozhatjuk meg. Saját méréseink szerint, λ értéke **0.02-0.04** intervallumba esett (Re:10^4-10^5 és St:0.005-0.02 tartományban).

Alapegyenletek p(t,x) és v(t,x) meghatározására

$$a^2=\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s=\mathrm{const.}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\underbrace{\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\cancel{\partial \rho}}}_{1}\frac{\cancel{\partial \rho}}{\partial t}+\frac{v}{a^2}\frac{\partial p}{\cancel{\partial \rho}}\frac{\cancel{\partial \rho}}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\, a^2\frac{\partial v}{\partial x}=0\\&\rho\, a\frac{\partial v}{\partial t}+\rho\, a\, v\frac{\partial v}{\partial x}=-a\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\, a\, f\end{aligned}\right\}\ \text{[Pa/s]}$$

Akusztikai közelítés

$$\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\, a^2\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\rho\, a\frac{\partial v}{\partial t}+\rho\, a\, v\frac{\partial v}{\partial x}=-a\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\, a\, f$$

1) Feltesszük: $\rho \cong \rho_0$ és $a \cong a_0$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\cancel{v\frac{\partial p}{\partial x}}+a_0\frac{\partial \rho_0 a_0 v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \rho_0 a_0 v}{\partial t}+\cancel{v\frac{\partial \rho_0 a_0 v}{\partial x}}=-a_0\frac{\partial p}{\partial x}+\rho_0\, a_0\, f$$

2) továbbá: $v << a_0$

Mivel $\rho_0 a_0 v$ azonos amplitúdójú mint p .

Riemann-invariánsok

Vízkalapács egyenletek

$$\frac{\partial p}{\partial t}+a_0\frac{\partial \rho_0 a_0 v}{\partial x}=0 \qquad \text{(C)}$$

$$\frac{\partial \rho_0 a_0 v}{\partial t}+a_0\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_0\, a_0\, f=-\underbrace{\frac{\lambda}{2D}\rho_0\, a_0}_{\zeta} v|v| \qquad \text{(M)}$$

(C+M) $$\frac{\partial}{\partial t}(p+\rho_0 a_0 v)+a_0\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho_0 a_0 v)=-\zeta\, v|v|$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}+a_0\frac{\partial \alpha}{\partial x}=-\zeta\, v|v|$$ ahol $\alpha = p+\rho_0 a_0 v$

(C-M) $$\frac{\partial}{\partial t}(p-\rho_0 a_0 v)-a_0\frac{\partial}{\partial x}(p-\rho_0 a_0 v)=\zeta\, v|v|$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t}-a_0\frac{\partial \beta}{\partial x}=\zeta\, v|v|$$ ahol $\beta = p-\rho_0 a_0 v$

A karakterisztikák iránya

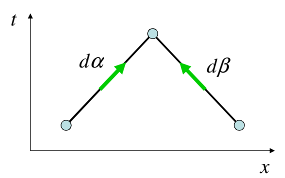
irány mentén deriválva

α és β

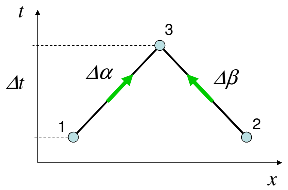
$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}+a_0\frac{\partial \alpha}{\partial x}=-\zeta\, v|v| \qquad \frac{\partial \beta}{\partial t}-a_0\frac{\partial \beta}{\partial x}=\zeta\, v|v|$$

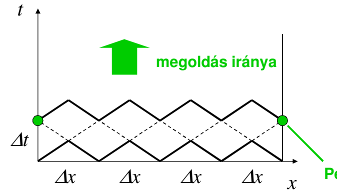
Egyik irányban: $\frac{dx}{dt}=a_0$, Másik irányban: $\frac{dx}{dt}=-a_0$,

$d\alpha=-\zeta\, v|v|\, dt$ $\qquad$ $d\beta=\zeta\, v|v|\, dt$



A karakterisztikák módszere





Peremfeltételek szükségesek.

Számoljuk ki p_3 és v_3, értékét p_1,v_1 és p_2,v_2 alapján!

$$\alpha_1 = p_1 + \rho_0 a_0 v_1$$

$$\beta_2 = p_2 - \rho_0 a_0 v_2$$

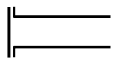
$$\alpha_3 = \alpha_1 - \zeta\, v_1 |v_1| \Delta t$$

$$\beta_3 = \beta_2 + \zeta\, v_2 |v_2| \Delta t$$

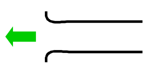
$$p_3 = \frac{\alpha_3 + \beta_3}{2}$$

$$v_3 = \frac{\alpha_3 - \beta_3}{2\,\rho_0 a_0}$$

Peremfeltételek

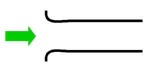


Zárt vég: $v = \dfrac{\alpha - \beta}{2\,\rho_0 a_0} = 0 \rightarrow \alpha = \beta$



Kiáramlás: $p_0 = \dfrac{\alpha + \beta}{2} \rightarrow \alpha = 2\,p_0 - \beta$

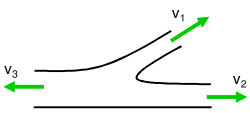
p_0



Beáramlás: $p + \dfrac{\rho_0}{2} v^2 = p_0$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{\alpha - \beta}{2\,\rho_0 a_0}\right)^2 = p_0$$

Elágazás



Az össznyomás veszteségek elhanyagolása esetén:

$$v_1 A_1 + v_2 A_2 + v_3 A_3 = 0$$

$$p_1 = p_2$$

$$p_2 = p_3$$

6 db. ismeretlenünk van, ezért a fenti 3 algebrai egyenlet a csatlakozó csövekből ismert 3 Riemann-invariáns összefüggésével együtt lezárja az egyenletrendszert. p és v értékei alapján kiszámíthatók a kifelé haladó karakterisztikák Riemann-invariánssai.

4. feladat

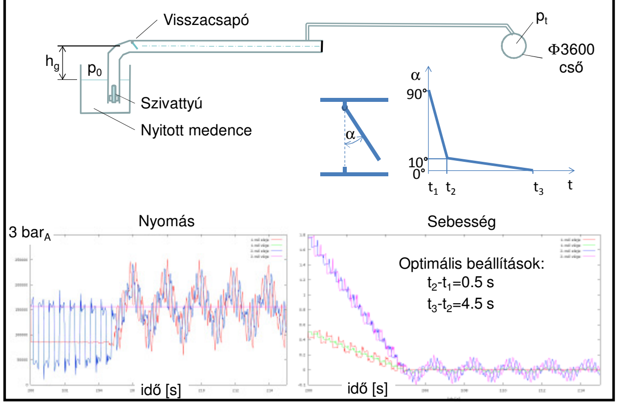
Hirtelen kinyitjuk egy depresszió alatt álló cső végét.
Mi lesz a nyomás és a sebesség a cső végén közvetlenül a nyitás után?
Kérem, használja a karakterisztikák módszerét felírva α, β jellemzőket!
A cső kezdeti állapotát definiálja v=0, p=const. feltételekkel!

A lezárt cső nyomása:	50 kPa,
Külső nyomás:	100 kPa,
Légsűrűség:	1.2 kg/m^3 ,
Hangsebesség:	334 m/s.

Megoldás

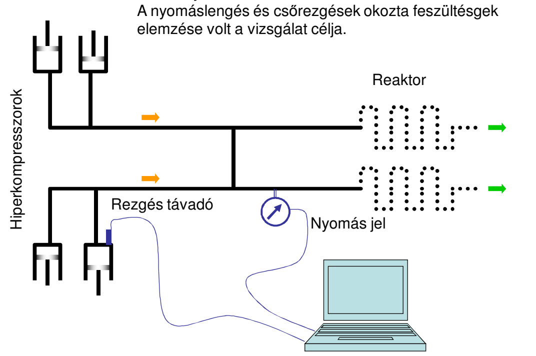
Alkalmazási példák

1. példa: csappantyú zárás okozta vízütés

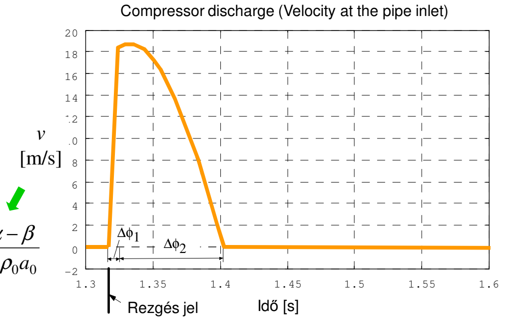


2. példa etilén hiperkompresszor

Üzemi nyomás ~ 2700 bar.
A nyomáslengés és csőrezgések okozta feszültésgek elemzése volt a vizsgálat célja.



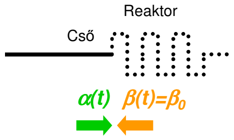
Peremfeltételek: a kompresszor



$$v=\frac{\alpha-\beta}{2\rho_0 a_0}$$

A lineáris ($\Delta\phi_1$) és a színuszos ($\Delta\phi_2$) szakaszok fázisszöge geometriai megfontolások alapján becsülhető. A kezdő fázist a rezgés jel alapján határoztuk meg.

Peremfeltételek: a reaktor



A polimerizáció miatt intenzív disszipáció lép fel.
Visszaverődés nincs ezért állandó β érték feltételezhető.

Szimulációs eredmények a mért nyomással összevetve