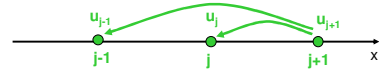


## Differenciasémák

Kristóf Gergely  
2008. 11. 18.

### Egy implicit, másodrendű differenciaséma



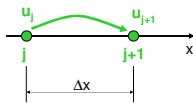
$$u_j = u_{j+1} + u'_{j+1}(-\Delta x) + u''_{j+1} \frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u_{j-1} = u_{j+1} + u'_{j+1}(-2\Delta x) + u''_{j+1} 2\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$$

$$u_j - \frac{u_{j-1}}{4} = \frac{3}{4}u_{j+1} + u'_{j+1} \left(-\frac{\Delta x}{2}\right) + o(\Delta x^2)$$

$$u'_{j+1} = \frac{\frac{3}{2}u_{j+1} - 2u_j + \frac{1}{2}u_{j-1}}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

### Euler-módszer



Az  $u_j$ -n áthaladó (analitikus) megoldás Taylor-sora  $j$  pontból a  $j+1$  pontba:

$$u_{j+1} = u_j + u'_j \Delta x + o(\Delta x)$$

Ez egy elsőrendű pontosságú integrálási séma.

Differenciaséma, szintén elsőrendű pontossággal:

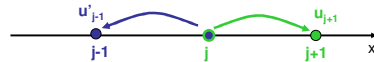
$$u'_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + o(1)$$

Egy másik elsőrendű integrálási séma:

$$u_j = u_{j+1} + u'_{j+1}(-\Delta x) + o(\Delta x)$$

Általában  $u'_{j+1}$ , az  $u_{j+1}$  és  $x_{j+1}$  függvényében adott, így a fenti egyenletből egy bonyolultabb képlettel fejezhető ki  $u_{j+1}$ . Ezt **implicit** sémának nevezzük.

### Adams-Basforth séma



$$u_{j+1} = u_j + u'_j \Delta x + u''_j \frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u'_{j-1} = u'_j + u''_j(-\Delta x) + o(\Delta x) \quad \Bigg/ \quad + \dots \times \frac{\Delta x}{2}$$

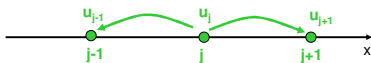
$$u_{j+1} = u_j + \frac{3}{2}u'_j \Delta x - \frac{1}{2}u'_{j-1} \Delta x + o(\Delta x^2)$$

Másodrendű pontosságú explicit integrálási séma.  
Alkalmos a **NS egyenlet időbeli integrálására**.

A térbeli deriváltakról általában:

Nem egyenközű és nem koordináta irányú rácsokra nagyon komplikált sémák adódnak. A transzportegyenletekben végül is csak **div**, **grad** és **Laplace** operátorok kellenek.

### CDS



$$u_{j+1} = u_j + u'_j \Delta x + u''_j \frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u_{j-1} = u_j + u'_j(-\Delta x) + u''_j \frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u'_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + o(\Delta x)$$

### Véges térfogatok módszere

Az általános transzportegyenlet differenciál alakja:

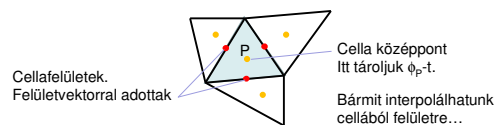
$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \vec{v}) = \nabla \cdot \vec{S}_A + \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_v$$

Amelyben  $\Phi$  valamilyen megmaradó jellemző tömegkoncentrációja. (Pl. kg/kg).

A hely szerinti differenciálást mindig  $\text{div}(\dots)$ ,  $\text{grad}(\dots)$ , vagy  $\text{div}(\text{grad}(\dots))$  alakban kell elvégezni, csak ezekre kell tehát közelítő sémákat találni.

Véges térfogatok módszere esetében a fenti operátorokat felületi és térfogati integrálókra valamint a hálón végzett interpolációkra vezetjük vissza.

A numerikus háló egy részlete az  $i$ -edik cella körül:



## A divergencia közelítő alakja

Véges térfogatú módszere esetében a divergencia operátort felületi integrálásra visszavezetve közelítjük, ezért a Gauss-tételből kell kiindulni:

$$\int_V \nabla \cdot \underline{u} dV = \oint_A \underline{u} \cdot d\underline{A}$$

Az  $\underline{u}$  vektor Descartes koordinátáit  $u_i$ -val jelölve az alábbi módon definiálhatjuk a divergencia operátor diszkrét alakját P pontban:

$$\tilde{\nabla} \cdot \underline{u}_i = \frac{\sum_k \int_{A_k} u_{\perp} dA}{V_P}$$

ahol  $A_k$  a cella oldalfalainak indexe.

A felületi integrál a felületvektor és a felületre interpolált  $\underline{u}$  skaláris szorzata azaz:  $\sum_{i=1}^3 u_i dA_i$

## A gradiens közelítő alakja

Egy skaláris mennyiség gradiensét a Gauss-tételből levezetett alábbi integrál átalakító tételből határozhatjuk meg:

$$\int_V \nabla \phi dV = \oint_A \phi \cdot d\underline{A}$$

A gradiens operátor  $i$  komponensét tehát az alábbi alakban számolhatjuk:

$$\tilde{\nabla}_i \phi = \frac{\sum_k \int_{A_k} \phi dA_i}{V_P}$$

$A_i$  a felületvektor  $i$  komponensét jelöli Descartes koordináta-rendszerben.

## A Laplace-operátor közelítő alakja

Egy skaláris mennyiségre vonatkozó Laplace operátor felírható a gradiens divergenciájaként:

$$\Delta \phi = \nabla \cdot \nabla \phi$$

Diszkrét közelítés elvégzéséhez a belső gradiensét a cella felületére interpolálnunk kell. Jelöljük ezt  $\langle \rangle$  zárójellekkel:

$$\tilde{\Delta} \phi = \tilde{\nabla} \cdot \langle \tilde{\nabla}_i \phi \rangle$$

Gyakorlatilag a nyomás kivételével (pl. hőmérséklet vagy transzportált passzív skalárok esetében) a gradiens felületre merőleges komponensét egyszerűbben is közelíthetjük a két szomszédos cellában tárolt  $\phi$  értékek alapján. Ilyen esetben a Laplace operátor közelítő alakja a P pontban és a szomszédos cellákban tárolt  $\phi$  értékek lineáris kombinációja lesz:

$$\tilde{\Delta} \phi = A_P \phi_P + \sum A_i \phi_i$$

Az  $A$  együtthatók értékét a fent leírt módon határozhatjuk meg.