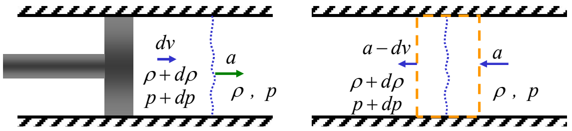
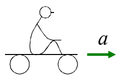
Gázdinamika

Dr. Kristóf Gergely
2015 november 10.

Kis zavarások terjedési sebessége





Kontinuitás:

$$A(a-dv)(\rho+d\rho)=a\,\rho\,A$$

$$a\,d\rho=\rho\,dv$$

Mozgáegyenlet: $\sum \vec{I}=\sum \vec{P}$

$$\underbrace{A\,\rho\,a}_{q_m}\underbrace{\left(a-(a-dv)\right)}_{dv}=A\,dp$$

$$dp=\rho\,a\,dv$$

Allievi-elv

$$a^2=\frac{dp}{d\rho}$$

Ideális gázokban

Állapotegyenlet: $\frac{p}{\rho}=R\,T$

Feltételezzük, hogy mindkét fajhő állandó érétkű.

Belső energi: $u=c_v\,T$ Entalpia: $h=u+\frac{p}{\rho}=c_p\,T$

Specifikus gázállandó: $R=c_p-c_v=\frac{R_u}{M}$; $R_{air}=\frac{8314}{29}=287\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}\right]$

Fajhőviszony: $\gamma=\frac{c_p}{c_v}$ pl. kétatomos gázokra:

$$\gamma=1.4$$

Hangsebesség ideális gázokban

A kompresszió gyorsan megy végbe, nincs elegendő idő és elmozdulás a hőátadáshoz és súrlódáshoz ezért a folyamat izentrópikus:

$$\boxed{\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \text{const.}}$$

$$ln\, p - \gamma\, ln\, \rho = ln(\text{const.})$$

$$\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma R T$$

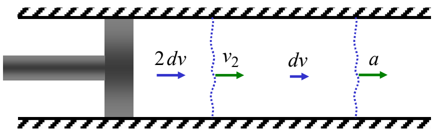
$$\boxed{a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\gamma R T}}$$

Levegőre:

T=0°C: a=331 m/s
T=20°C: a=343 m/s

Nemlineáris hullámterjedés

Mi történik, ha még egy hullámot indítanánk?



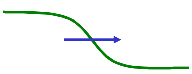
$v_2 > a$ mivel:

- A második hullám dv sebességű közegben terjed.
- A második hullám nagyobb hangsebességgel jellemzett gázban terjed: $p\uparrow \rightarrow T\uparrow \rightarrow a\uparrow$.

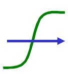
A második hullám idővel utoléri az elsőt.

Lökéshullámok

A kompressziós hullámok meredekednek, **lökéshullám** alakul ki:



Az expanziós hullámok elsimulnak:



- Véges ugrásként modellezzük (p, ρ, T, a és v).
- A lökéshullám gyorsabban terjed mint a gyenge hullámok.
- A szuperszonikus áramlás lökéshullámok révén tud lelassulni.
- Disszipatív folyamat. (Össznyomás csökkenéssel jár.)

Analógia

Sekély vízben megtörő tengeri hullám

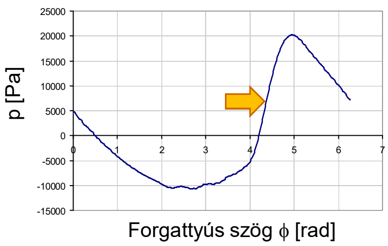
Anaógia

Vízugrás a mosogatóban

Rezonancia egyenes csőben

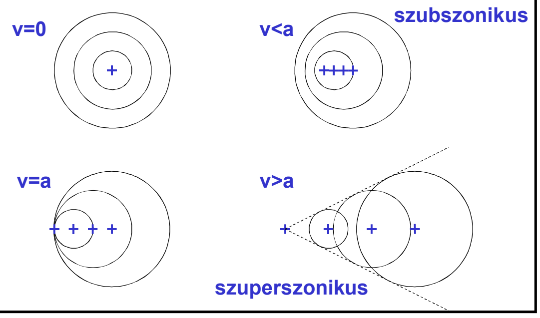
Csőhossz:
6.05 m
Átmérő:
36 mm
Dugattyú löket:
50 cm^3.

29 Hz gerjesztésnél:

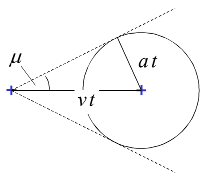


Kis zavarások terjedése szubszonikus és szuperszonikus áramlásban

Egy v sebességű objektum helye 0,-1,-2 és -3 s időpontban, továbbá az ekkor keltett hullámok helye t=0 pillanatban:



Mach-kúp



Mach szám: $M = \frac{v}{a}$

Mach szög: $\mu = arc\,sin\left(\frac{a}{v}\right) = arc\,sin\left(\frac{1}{M}\right)$

Analógia

Cserenkov sugárzás

Alkalmazás

Puskalövés Schlieren felvételen

[http://www.phschool.com/science/science_news/articles/revealing_covert_actions.html]

1. feladat

[An album of fluid motion] Gömbölyű lövedék

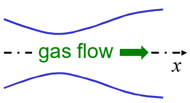
Megoldás

Változó keresztmetszetű cső (1)

Kontinuitás: $\frac{dA}{A}+\frac{dv}{v}+\frac{d\rho}{\rho}=0$

Euler-egyenlet: $v\,dv=-\frac{dp}{\rho}$

Hangsebesség: $a^2=\frac{dp}{d\rho}$



A, v, p és ρ csak x függvényei

$$v^2\frac{dv}{v}=-\frac{dp}{\rho}\underbrace{\frac{d\rho}{dp}a^2}_{1}=-a^2\frac{d\rho}{\rho}$$

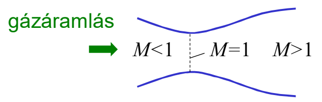
$$M^2\frac{dv}{v}=-\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dA}{A}+\frac{dv}{v}\longrightarrow\left(M^2-1\right)\frac{dv}{v}=\frac{dA}{A}$$

Változó keresztmetszetű cső (2)

$$\left(M^2-1\right)\frac{dv}{v}=\frac{dA}{A}$$

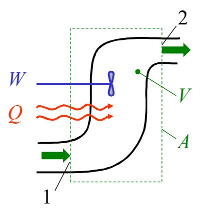
	Gyorsulás	Lassulás
Szubszonikus $M<1$	Szűkülő	Bővülő
Szuperszonikus $M>1$	Bővülő	Szűkülő

Ha $M=1$, akkor $dA=0$: a felületnek szélsőértéke van (minimuma).



Energiaegyenlet (1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (u+\frac{v^2}{2})\rho\, dV+\oint_A (u+\frac{v^2}{2})\rho\,\vec{v}\, d\vec{A}=Q+W-\oint_A p\,\vec{v}\, d\vec{A}$$



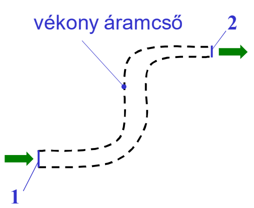
Stacionárius áramlásban:

$$\oint_A (h+\frac{v^2}{2})\rho\,\vec{v}\, d\vec{A}=Q+W$$

A tömegárammal súlyozott torló-entalpiákat az 1 és 2 keresztmetszetben $h_{t,1}$ és $h_{t,2}$ -el jelölve:

$$\left(h_{t,2}-h_{t,1}\right)q_m=Q+W$$

Energiaegyenlet (2)



Az áramcső mozgó falú csőnek tekinthető.

Alkalmazzuk az energiaegyenletet állandósult áramlásra a következő feltételezésekkel:
-az áramcső hőszigetelt (Q=0);
-csúsztatófeszültség nem adódik át az áramcső felületén (W=0).

Ezek alapján a torló entalpia állandó:

$$h_{t,2}=h_{t,1}$$

Izentrópikus áramlás (1)

A termodinamika I. főtétele: $T\,ds = du + p\,d\left(\rho^{-1}\right)$

ideális gázokra: $T\,ds = c_v dT - \dfrac{p}{\rho^2}d\rho = c_v dT - RT\dfrac{d\rho}{\rho}$

izentrópikus áramlásra: $c_v\dfrac{dT}{T} = R\dfrac{d\rho}{\rho}$

$$\frac{R}{c_v} = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \gamma - 1$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma-1} \longleftarrow \frac{dT}{T} = (\gamma-1)\frac{d\rho}{\rho}$$

Izentrópikus áramlás (2)

$$\frac{dT}{T} = (\gamma-1)\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

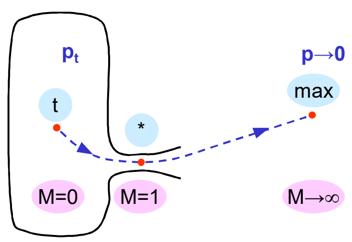
$$\frac{dT}{T} = (\gamma-1)\left[\frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}\right]$$

$$\gamma\frac{dT}{T} = (\gamma-1)\frac{dp}{p}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Izentrópikus áramlás (3)

Referencia állapot



Izentrópikus áramlás (4)

Egy áramcsőre alkalmazva az energiaegyenletet:

$$h_t = h + \frac{v^2}{2} = \text{constant}$$

(A Bernoulli-egyenlettel analóg.)

A vonatkoztatási állapotjelzők kapcsolata:

$$\begin{array}{ccccc} M=0 & & M=1 & & M=\infty \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ h_t & = & h_* + \dfrac{v_*^2}{2} & = & \dfrac{v_{max}^2}{2} \end{array}$$

$$v_* = a_*$$

Izentrópikus áramlás (5)

T hőmérséklet kifejezhető M Mach-szám függvényeként:

$$h_t = h + \frac{v^2}{2}$$

$$c_p T_t = c_p T + \frac{v^2}{2}$$

$$a^2 = \gamma R T = \gamma c_p \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) T = (\gamma - 1) c_p T$$

$$\frac{a_t^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2}$$

$$\frac{a_t^2}{a^2} = \frac{T_t}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Izentrópikus áramlás (6)

Az izenrópikus egyenlettel felírhatjuk a helyi nyomást és sűrűséget Mach-szám függvényeként:

$$\frac{p_t}{p} = \left(\frac{T_t}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho_t}{\rho} = \left(\frac{T_t}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Kritikus viszonyszámok (M=1 állapotra):

$$\frac{T_*}{T_t} = \frac{2}{\gamma + 1} \qquad \frac{p_*}{p_t} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad \frac{\rho_*}{\rho_t} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

γ=1.4 esetén: **0.83** **0.53** **0.63**

2. feladat

Határozza meg a maximális sebességet izentrópikus áramlásban, ha adottak
γ=1.4, R=287 J/kg-K és T_t=1000 K !

Megoldás

Izentrópikus áramlás (8)

Tömegáram:

$$q_m = \rho v A = \frac{\rho}{\rho_t}\rho_t M \frac{a}{a_t} a_t A$$

$$q_m = M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\left(\frac{1}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\right)}\rho_t a_t A$$

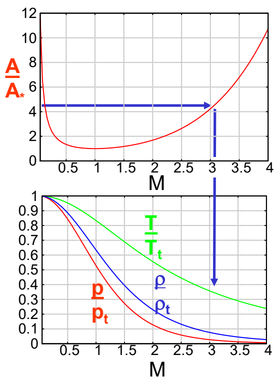
$$\frac{1}{\gamma-1}+\frac{1}{2}=\frac{2+\gamma-1}{2(\gamma-1)}=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$q_m = M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\rho_t a_t A$$

$$\shortparallel$$

$$q_m = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\rho_t a_t A_* \longrightarrow \frac{A}{A_*}=f(M)$$

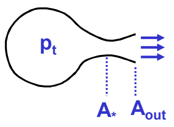
Izentrópikus áramlás (9)



$$\frac{A}{A_*}=\frac{M^{-1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

A fenti függvény inverzével megkaphatjuk Mach-szám értékét adott A/A_* keresztmetszet viszonyhoz.

3. feladat



a) Mi az optimális A_{out}/A_* keresztmetszet viszonya egy felszínközeli repüléshez tervezett rakétahajtóműnek, ha az égőkamra nyomása p_t=10 bar_A és a fajhőviszony γ=1.3. Használja a gáztáblázatokat!

b) Határozza meg a tömegáramot T_t=1300 K, R=462 J/kg-K és A_{out}=20 cm^2 esetén.

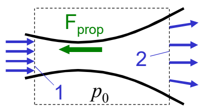
c) Számítsa ki a tolóerőt!

Megoldás

A tolóerő függvény

Az impulzustétel egy stacionárius csatornaáramlásra:

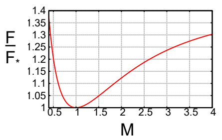
$$F_{prop} = \left(p_2 + \rho_2 v_2^2\right)A_2 - \left(p_1 + \rho_1 v_1^2\right)A_1 + p_0\left(A_1 - A_2\right)$$



$$F = \left(p + \rho v^2\right)A$$

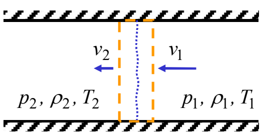
$$\frac{F}{F_*} = \frac{p + \rho v^2}{p_* + \rho_* v_*^2}\frac{A}{A_*} = \frac{p}{p_*}\frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma}\frac{A}{A_*}$$

Csak M függvényei



$$\frac{p}{p_*} = \frac{p_t}{p_*}\frac{p}{p_t} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Big/ \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

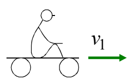
Merőleges lökéshullám (1)



4 ismeretlen van.

Egyet kiküszöbölhetünk:

$$\frac{p_2}{\rho_2} = R T_2$$



Stacionáriussá tehetjük!

Kontinuitás: $v_1 \rho_1 A = v_2 \rho_2 A$

Mozgásegyenlet: $\left(p_1 + \rho_1 v_1^2\right)A = \left(p_2 + \rho_2 v_2^2\right)A$

Energia egyenlet: $\left(c_p T_1 + \frac{v_1^2}{2}\right)\rho_1 v_1 A = \left(c_p T_2 + \frac{v_2^2}{2}\right)\rho_2 v_2 A$

Merőleges lökéshullám (2)

Izentrópikus áramlásnál a Mach-szá volt a kulcs ...

... próbáljuk megoldani $M_2(M_1)$ kapcsolatra!

$$\rho_1 v_1 = \ldots \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{p_1}{R T_1} M_1 (\gamma R T_1)^{1/2} = \ldots}$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = \ldots \longrightarrow p_1\left(1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1}\right) = \ldots \longrightarrow p_1\left(1 + \gamma \frac{v_1^2}{a_1^2}\right) = \ldots$$

$$\boxed{p_1\left(1 + \gamma M_1^2\right) = \ldots}$$

$$c_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} = \ldots \longrightarrow T_1\left(1 + \frac{\gamma R v_1^2}{2 c_p a_1^2}\right) = \ldots \longrightarrow \boxed{T_1\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right) = \ldots}$$

Merőleges lökéshullám (3)

(a) $$\frac{p_1}{R T_1} M_1 (\gamma R T_1)^{1/2} = \ldots$$

(b) $$p_1\left(1 + \gamma M_1^2\right) = \ldots$$

(c) $$T_1\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right) = \ldots$$

a*b-1*c0.5

$$\frac{M_1}{1 + \gamma M_1^2}\sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} = \frac{M_2}{1 + \gamma M_2^2}\sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}$$

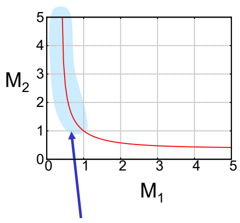
$$M_1^2\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)\left(1 + \gamma M_2^2\right)^2 = M_2^2\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)\left(1 + \gamma M_1^2\right)^2$$

Másodfokú egyenlet $(M_2)^2$-re.

Rendezzük polinómiális alakra:

$$M_2^4(\ldots) + M_2^2(\ldots) + (\ldots) = 0$$

Merőleges lökéshullám (4)



$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \dfrac{2}{\gamma - 1}}{\dfrac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1}$$

Ez az ág egy expanziós lökéshullámhoz tartozik.
Van fizikai tartalma?

Merőleges lökéshullám (5)

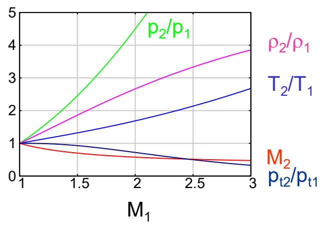
Nyomásviszony: (b) $\longrightarrow$ $$\frac{p_2}{p_1}=\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}=f(M_1)$$

Hőmérséklet viszony: (c) $\longrightarrow$ $$\frac{T_2}{T_1}=\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}=g(M_1)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-1}=h(M_1)$$

Merőleges lökéshullám (6)

$$\frac{p_{t2}}{p_{t1}}=\frac{\frac{p_{t2}}{p_2}}{\frac{p_{t1}}{p_1}}\frac{p_2}{p_1}=\frac{\left(\frac{\cancel{T_{t2}}}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(\frac{\cancel{T_{t1}}}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\frac{p_2}{p_1}$$



Entrópia produkció

Az entrópia változás meghatározható a nyomás és hőmérséklet viszonyok alapján:

$$Tds=dh-\frac{dp}{\rho}=c_p dT-RT\frac{dp}{p}$$

$$\frac{ds}{R}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{dT}{T}-\frac{dp}{p}$$

$$\frac{s_2-s_1}{R}=\frac{\gamma}{\gamma-1}ln\frac{T_2}{T_1}-ln\frac{p_2}{p_1}$$

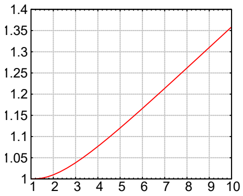
Általánosságban: $$e^{\frac{s_2-s_1}{R}}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\frac{p_1}{p_2}$$ $\longrightarrow$ Lökéshullámra: $$e^{\frac{s_2-s_1}{R}}=\frac{p_{t1}}{p_{t2}}$$

Az expanziós lökéshullám entrópia csökkenéssel járna, ezért nem lehetséges.

Rankine-Hugoniot relációk

Az állapotjelzők arányát az izentrópikus arányhoz viszonyítjuk

$$\frac{\left.\frac{T_2}{T_1}\right|_{shock}}{\left.\frac{T_2}{T_1}\right|_{isent}} = \frac{\left.\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|_{shock}}{\left.\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|_{isent}}$$

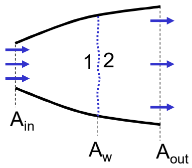


$\frac{p_2}{p_1}$

A gyenge lökéshullámok majdnem izentrópikusak.

... viszont a terjedési sebesség lényegesen nagyobb lehet a-nál.

4. feladat



A fúvóka A_w. keresztmetszetében van egy álló merőleges lökéshullám.

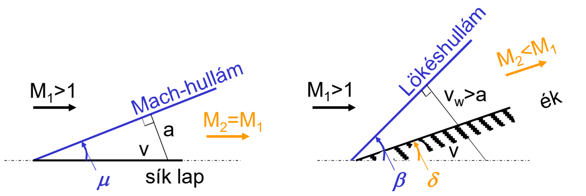
$\gamma = 1.4$	$M_{in} = 2$
$p_{in} = 100\,kPa_A$	$T_{in} = 270\,K$
$A_w / A_{in} = 2$	$A_{out} / A_{in} = 3$

a) Határozza meg a kilépő Mach-számot (M_{out})!

b) Mekkora az ellennyomás (p_{out})?

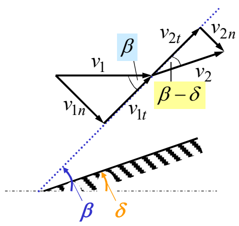
Megoldás

Ferde lökéshullám (1)



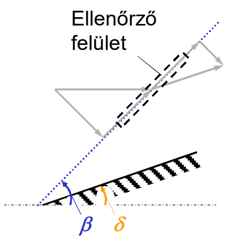
- Az áramlás iránya δ szöggel eltérül.
- Nyugvó közegben a lökéshullám gyorabban terjed a hangnál, ezért : $\beta>\mu$
- $M_2 > 1$ is lehetséges ferde lökéshullám esetén.

Ferde lökéshullám (2)



$$v_{1n} = v_1 \sin\beta$$
$$v_{1t} = v_1 \cos\beta$$
$$v_{2n} = v_2 \sin(\beta-\delta)$$
$$v_{2t} = v_2 \cos(\beta-\delta)$$

Oblique shockwaves (3)



$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}$$
$$\rho_1 v_{1n}(v_{1n} - v_{2n}) = p_2 - p_1$$
$$\rho_1 v_{1n}(v_{1t} - v_{2t}) = 0 \longrightarrow v_{1t} = v_{2t}$$
$$h_1 + \frac{1}{2}\left(v_{1n}^2 + \cancel{v_{1t}^2}\right) = h_2 + \frac{1}{2}\left(v_{2n}^2 + \cancel{v_{2t}^2}\right)$$

Ugyanazok az összefüggések, mint merőleges lökéshullámra!

$$\begin{cases} \rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n} \\ p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 v_{2n}^2 \\ h_1 + \dfrac{v_{1n}^2}{2} = h_2 + \dfrac{v_{2n}^2}{2} \end{cases}$$

Ferde lökéshullám (4)

Képezzük a Mach-számok normális irányú komponensét:

$$M_{1n} = M_1 \sin\beta \qquad M_{2n} = M_2 \sin(\beta-\delta)$$

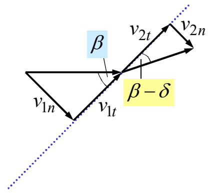
A statikus állapotjelzők arányait a merőleges lökéshullám táblázata alapján meghatározhatjuk:

$$M_{2n}^2 = \frac{M_{1n}^2 + \dfrac{2}{\gamma-1}}{\dfrac{2\gamma}{\gamma-1} M_{1n}^2 - 1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = f(M_{1n}) \qquad \frac{T_2}{T_1} = g(M_{1n}) \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = h(M_{1n})$$

Még nem tudjuk a vetítéshez szükséges β szöget.

Ferde lökéshullám (5)



$$tg\,\beta=\frac{v_{1n}}{v_{1t}} \qquad tg\left(\beta-\delta\right)=\frac{v_{2n}}{v_{2t}}$$

$$v_{1t}=v_{2t}$$

merőleges l.h. sűrűségviszonya:

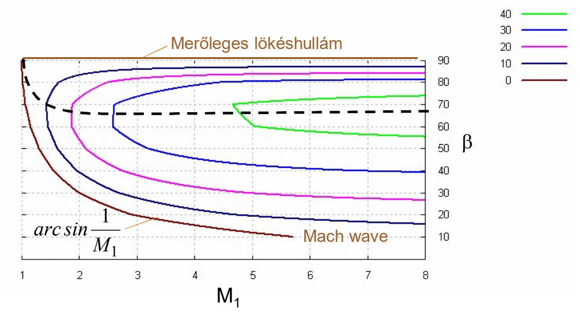
$$\frac{tg\,\beta}{tg\left(\beta-\delta\right)}=\frac{v_{1n}\,\cancel{v_{2t}}}{v_{2n}\,\cancel{v_{1t}}}=\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(\gamma+1)\,M_1^2\,sin^2\,\beta}{(\gamma-1)\,\underbrace{M_1^2\,sin^2\,\beta}_{M_{1n}^2}+2}$$

Felrajzolhatjuk β szöget M_1 és δ függvényében!

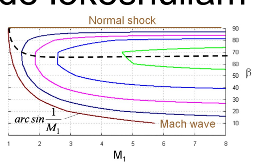
Ferde lökéshullám (6)

$$\delta=\beta-arc\,tg\left(tg\,\beta\,\frac{(\gamma-1)\,M_{1n}^2+2}{(\gamma+1)\,M_{1n}^2}\right)$$

δ szintvonalai:

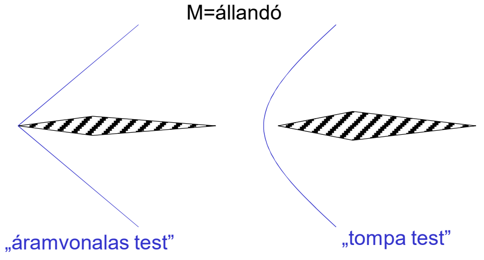


Ferde lökéshullám (7)



- M_{min} minimális Mach-szám fölött két β szög létezik adott δ értékhez ($\beta_{erős} > \beta_{gyenge}$). Külső áramlás esetén csak a gyengébb hullám figyelhető meg, szélcsatornában viszont az erős hullám is előállítható.
- M_{min} értéke δ-tól függ. M_{min} alatt nem jön létre ferde lökéshullám. Lekapcsolt orrhullám alakul ki.
- Definiálhatunk egy δ_{max} maximális szöget is mely felett nem jön létre ferde lökéshullám az ék előtt adott Mach-szám esetén.

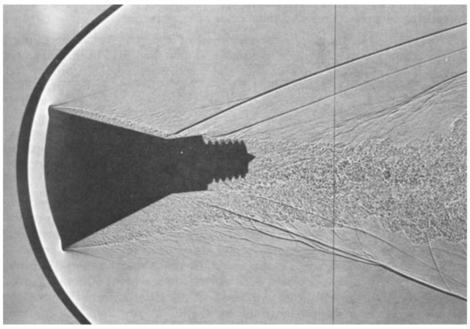
Ferde lökéshullám (8)



Növelve a szárny vastagságát a lökéshullám leválik, az áramlás merőleges lökéshullámon keresztül éri el a szárnyat, ezért nagyobb nyomás alakul ki a belépő él közelében.

NASA visszatérő egység

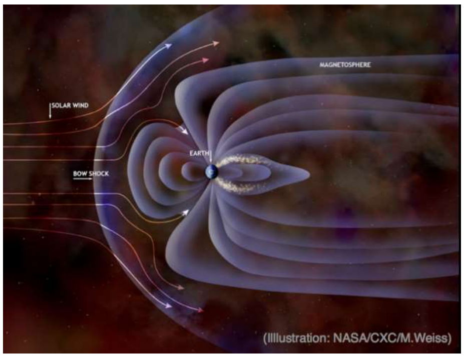
Mercury Project 1959



Kozmikus lökéshullám

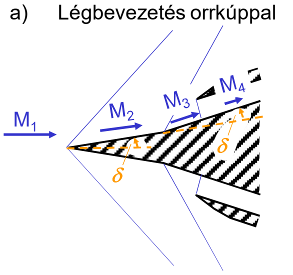
A Hubble image

A Föld orrhulláma napszélben



5. feladat

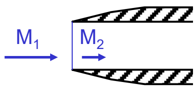
a) Légbevezetés orrkúppal



$M_1 = 3 \quad \delta = 8°$

$M_2 = ? \quad M_3 = ? \quad M_4 = ? \quad \frac{p_{t4}}{p_{t1}} = ?$

b) Orrkúp nélkül

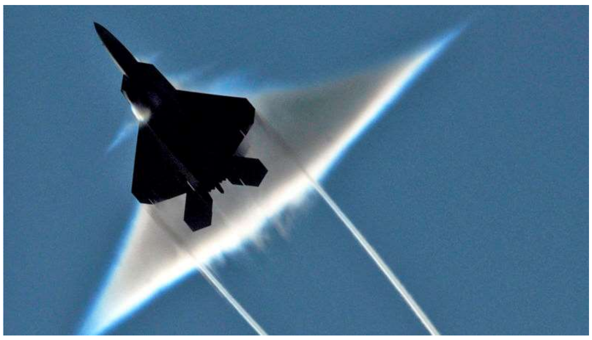


$M_1 = 3$

$M_2 = ? \quad \frac{p_{t2}}{p_{t1}} = ?$

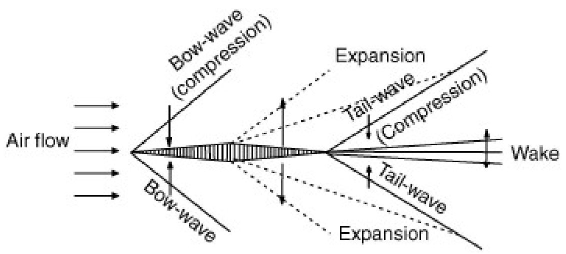
Megoldás

Milyen hullám lehet ez?



Hullámkép egy F22 vadászrepülőgép körül

Szuperszónikus áramlás szárny körül



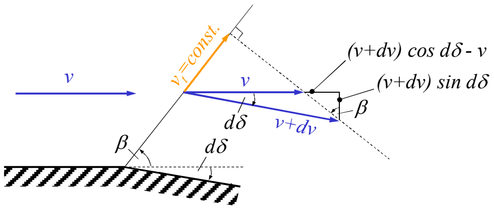
Expanziós hullámok kondenzációval

Prandtl-Meyer expanzió (1)

Az áramlásirány változása szuperszonikus áramlásban közvetlenül összekapcsolható a gyorsulással és lassulással.

Izentrópikus esetekre szorítkozunk, ezért csak expanzió és gyenge lökéshullámok elemzésére alkalmas a módszer.

Prandtl-Meyer expanzió (2)



$$tg\,\beta = \frac{(v+dv)\cos d\delta - v}{(v+dv)\sin d\delta}$$

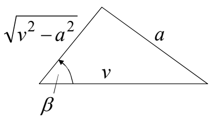
Prandtl-Meyer expanzió (3)

$$tg\,\beta = \frac{(v+dv)\cos d\delta - v}{(v+dv)\sin d\delta}$$

If $d\delta \rightarrow 0$, then $\cos d\delta \rightarrow 1$, and $\sin d\delta \rightarrow d\delta$.

$$tg\,\beta = \frac{dv}{v\,d\delta}$$

β a **Mach- szög**:



$$tg\,\beta = \frac{a}{\sqrt{v^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} = \frac{dv}{v\,d\delta} \longrightarrow d\delta = \frac{dv}{v}\sqrt{M^2-1}$$

Prandtl-Meyer expanzió (4)

dv/v a Mach-számmal kifejezhető:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} + \frac{1}{2}\frac{dT}{T}$$

$$\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 \quad \text{amelyben} \quad T_t = \text{const.}$$

$$-\frac{T_t}{T^2}dT = (\gamma-1)M\,dM$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma-1)M^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{1+\cancel{\frac{\gamma-1}{2}M^2} - \cancel{\frac{\gamma-1}{2}M^2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M} = \frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M}$$

Prandtl-Meyer expanzió (5)

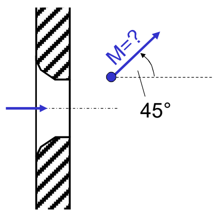
$$d\delta = \frac{dv}{v}\sqrt{M^2-1} \qquad \frac{dv}{v} = \frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M}$$

$$d\delta = \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M} \longrightarrow \delta = \int_1^M \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M}$$

Ez az integrál a Prandtl-Meyer expanziós függvény:

$$\delta = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,atg\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)}\right) - atg\left(\sqrt{M^2-1}\right)$$

6. feladat



Egy lekerekített nyíláson keresztül levegő áramlik ki nagy sebességgel. Egy adott pontban az áramlás iránya a nyílás tengelyével 45°-os szöget zár be.

A) Mekkora a Mach-szám az adott pontban?
B) Mekkora a maxiámális eltérítési szög elhanyagolhatóan kicsi ellennyomás esetén?

Megoldás

Hodográf (1)

Alkalmazási problémák:
1) M vektor hossza → ∞ növekvő δ szög esetén
2) a vektor hossza nem a sebességgel arányos.

Ezért bevezetjük $M^*=v/a^*$ dimenziótlan sebességet a $M=v/a$ Mach-szám helyett:

$$M^{*2} = \frac{v^2}{a^{*2}} = \frac{v^2}{a^2}\frac{a^2}{a^{*2}} = M^2\frac{T}{T^*} = M^2\frac{T}{T_t}\frac{T_t}{T^*}$$

$$M^{*2} = M^2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1}\frac{\gamma+1}{2}$$

$$M^{*2} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \quad \text{és} \quad M^2 = \frac{2M^{*2}}{\gamma+1-(\gamma-1)M^{*2}}$$

Hodográf (2)

$$d\delta = \frac{dv}{v}\sqrt{M^2 - 1} \qquad M^2 = \frac{2M^{*2}}{\gamma + 1 - (\gamma - 1)M^{*2}}$$

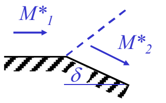
$$d\delta = \frac{dM^*}{M^*}\sqrt{\frac{M^{*2} - 1}{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}M^{*2}}}$$

$d\delta$ integrálja egy epiciklois képletére vezet.

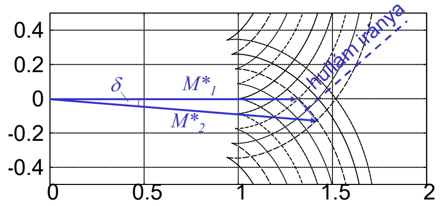
Hodográf (3)

δ és M_1 adottak.
- Mi lesz M_2 nagysága és iránya?
- Milyen irányú a hullám?

A geometriai sík:

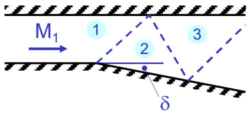


A hodográf sík:



7. feladat

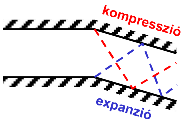
Kérem, oldja meg grafikus módszerrel az alábbi kettős visszaverődési feladatot! M_1=1.28, δ=5°.



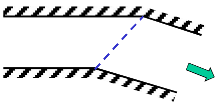
Határozza meg M_2 és M_3 vektorokat és a hullám irányát!

Megoldás

Csatorna áramlás eltérítése



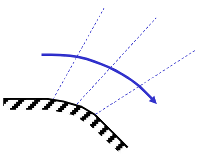
Nyomáslengés, amely hidraulikai veszteségeket okoz.



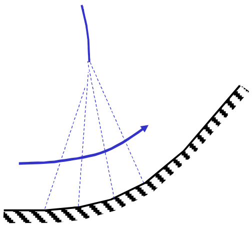
Nincs visszavert hullám.
(Csak egy hullám alakul ki.)

Görbült felület feletti hullámok (1)

Expanzió



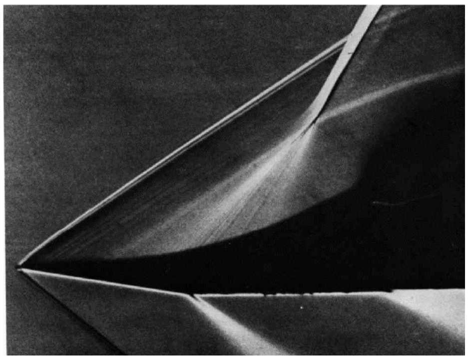
Kompresszió



Csak a fal közelében izentrópikus az áramlás (a határréteget kivéve).

Görbült felület feletti hullámok (2)

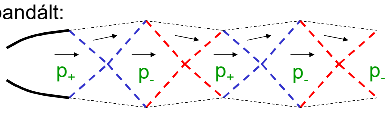
M=1.96



[An Album of Fluid Motion, 227]

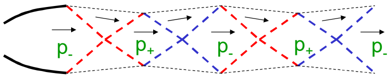
Szuperszónikus szabadsugár

Alulexpandált:



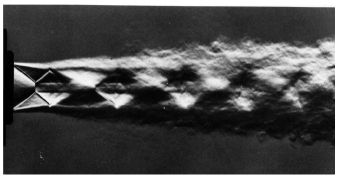
Shock diamonds

Túlexpandált:



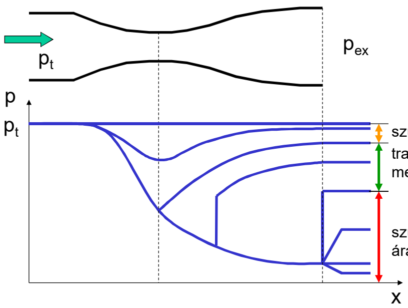
Virgin Galactic Spaceship 2 January 2014

M=1.8



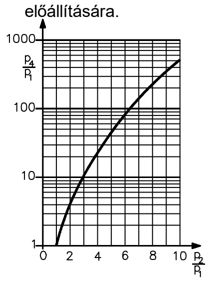
[An Album of Fluid Motion, 168]

Laval fúvóka



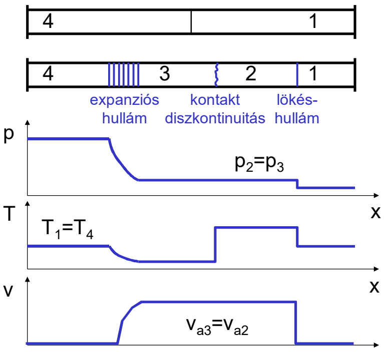
Lökéshullám-cső

Egyszerű módszer erős lökéshullámok és hiperszónikus áramlás előállítására.



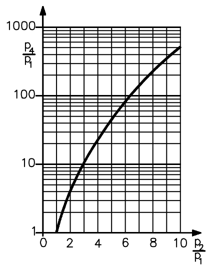
Az expanziós hullámnak mindig kissé nagyobb a nyomásviszonya.

Riemann probléma



Sebességek abszolút rendszerben

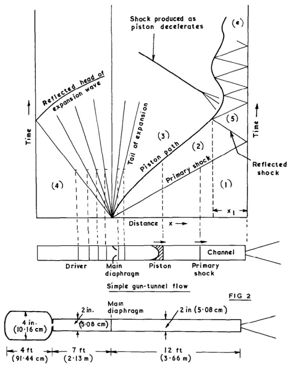
8. feladat



Mi lesz a Mach-szám abszolút rendszerben a kontakt diszkontinuitás jobb és bal oldalán, egy száraz levegővel működő lökéshullám-csőben ha a kezdeti hőmérséklet 300 K és a kezdeti nyomásviszony 100?

Megoldás

NPL 2” gun tunnel



[L.Davies: On the Equilibrium Piston Technique in Gun Tunnels, 1968]