Hő- és áramlástan
1. előadás – Az örvényesség evolúciója

Dr. Gergely Kristóf
BME Áramlástan Tanszék
2015 február 9.

Tematika az első 7 hétre

Okt.hét	Téma
1	**Ismétlés**: szubsztanciális derivált, tömegáram, alapegyenletek alkalmazási példákkal. Div(v)=0. Örvényesség. **Örvénytranszport** egyenlet (3D-ben). Egyszerűsített levezetés 2D-ben. Helmholtz-féle analógia. HF1: örvényesség változása konfúzorban. (2p)
2	**Potenciálos** áramlások. Alkalmazási területek. Nyomás meghatározása. Sebességi potenciál, áramfüggvény, komplex potenciál. Párhuzamos áramlás. Forrás-nyelő. Potenciálos örvény. A szuperpozíció elve. Sarok körüli áramlás, torló áramlás. Ellennyomó víztároló. HF2: vízszintes kút maximális hozama. (2p)
3	Dipólus, henger körüli potenciálos áramlás. Fletner rotor. Zsukovszkij transzformáció, **szárny** körüli áramlás, Kutta feltétel, ívelt lap felhajtóereje.
4	**Ismétlés**: a határrétegek tulajdonságai. Határréteg hengeren, szárnyon. **Változó cirkuláció**, nyíróréteg keletkezése. **Alkalmazások**: Keresztáramú ventilátor. Épület körüli áramlás. Tompa testek ellenállása.
5	A határréteg vastagsága. Határréteg egyenlet és annak Re-től független alakja. Blasius-féle profil. A határréteg **stabilitása**, Tollmien-Schlichting hullámok, tranzició. A HRE numerikus megoldása. HF3: Henger körüli határréteg számítása. (3p)
6	A **turbulencia** tulajdonságai. Turbulencia keletkezése nyírórétegben. Keveredési úthossz modell, logaritmikus faltörvény. A határréteg szabályzása szárnyak esetében.
7	Szabadsugár. Légfüggöny. HF4: Légfüggöny méretezése. (3p)

Az advekció leírása

Felhők mozgása hazánk felett: radar, műhold

Folyadéksebesség: $\underline{v}(t,\underline{r}) = u(t,x,y,z)\underline{i} + v(t,x,y,z)\underline{j} + w(t,x,y,z)\underline{k}$

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Egy folyadékrészre: $\frac{dx}{dt} = u,\quad \frac{dy}{dt} = v,\quad \frac{dw}{dt} = w$

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla u \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla v \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla w \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla\underline{v}$$

sebességgradiens

lokális gyorsulás

konvektív gyorsulás

A Navier-Stokes egyenlet

$$\rho = 0, \quad \nu = 0$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} + \nu \Delta \underline{v} \qquad \left[\frac{N}{kg}\right]$$

nyomásból származó erő **térerősség** **nyíróerők**

Kontinuitás

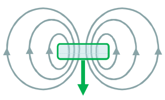
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV + \oint_A \rho \, \underline{v} \cdot d\underline{A} = 0$$ azaz $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0$$

felhalmozódó tömeg **kilépő tömegáram**

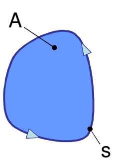
ρ=állandó esetén: $\nabla \cdot \underline{v} = 0$ azaz $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Az áramcső is az áramlási tér határáig tart, vagy önmagába záródik.

Pl. abszolút áramvonalak a tenyerem körül:



Örvények



Cirkuláció:

$$\Gamma = \oint_s \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

arányos a felhajtó erővel

Örvényesség:

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

a szögsebesség kétszerese

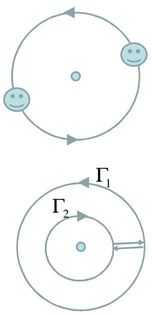
A Thomson-tétel szerint ν=0, ρ=áll, és potenciálos erőtér esetén bármely folyékony zárt görbére:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

Hogyan kerül az örvényesség az áramlásba?

Potenciálos örvény

Lehet-e cirkuláció, ha az örvényesség 0?



$\omega_\perp = 0$

Az örvényesség a középpontban koncentrálódik.

$\Gamma_1 = -\Gamma_2$

$2r\pi\, v = \text{áll.}$

$v = \dfrac{\text{áll.}}{r}$

Az örvényesség evolúciója

Örvénytranszpot egyenlet: $\nabla \times (\text{Navier} - \text{Stokes})$

Először vezessük le 2D-ben!   Ekkor ω skalár: $\omega = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial g_y}{\partial x} + \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial g_x}{\partial y} + \nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} + {*}{*}{*} = 0 + 0 + \nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

$${*}{*}{*} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0=} - \frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0=}$$

Nézzük csak a konvektív gyorsulás rotációját 3D-ben!

$$\boxed{\underline{\omega} = \nabla \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_y - v'_z \\ u'_z - w'_x \\ v'_x - u'_y \end{pmatrix}}$$

$$\nabla \times (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}) = \nabla \times \left[\begin{pmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} w''_{xy} - v''_{xz} & w''_{yy} - v''_{yz} & w''_{zy} - v''_{zz} \\ u''_{xz} - w''_{xx} & u''_{yz} - w''_{yx} & u''_{zz} - w''_{zx} \\ v''_{xx} - u''_{xy} & v''_{yx} - u''_{yy} & v''_{zx} - u''_{zy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} w'_x u'_y - v'_x u'_z + w'_y v'_y - v'_y v'_z + w'_z w'_y - v'_z w'_z \\ u'_x u'_z - w'_x u'_x + u'_y v'_z - w'_y v'_x + u'_z w'_z - w'_z w'_x \\ v'_x u'_x - u'_x u'_y + v'_y v'_x - u'_y v'_y + v'_z w'_x - u'_z w'_y \end{pmatrix}$$

$$\underline{\omega}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w'_y-v'_z\\ u'_z-w'_x\\ v'_x-u'_y\end{pmatrix}$$

$$\nabla\times\left(\underline{v}\cdot\nabla\underline{v}\right)=$$

$$\begin{pmatrix}\alpha'_x & \alpha'_y & \alpha'_z\\ \beta'_x & \beta'_y & \beta'_z\\ \gamma'_x & \gamma'_y & \gamma'_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\left(u'_x+v'_y+w'_z\right)+\begin{pmatrix}w'_x u'_y-v'_x u'_z-u'_x w'_y+u'_x v'_z\\ u'_y v'_z-w'_y v'_x-v'_y u'_z+v'_y w'_x\\ v'_z w'_x-u'_z w'_y-w'_z v'_x+w'_z u'_y\end{pmatrix}$$

$$\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{v}=\begin{pmatrix}u'_x w'_y-u'_x v'_z+\cancel{w'_y u'_z}-u'_y w'_x+u'_z v'_x-\cancel{u'_z u'_y}\\ v'_x w'_y-\cancel{v'_x v'_z}+v'_y u'_z-v'_y w'_x+\cancel{v'_z v'_x}-v'_z u'_y\\ \cancel{w'_x w'_y}-w'_x v'_z+w'_y u'_z-\cancel{w'_y w'_x}+w'_z v'_x-w'_z u'_y\end{pmatrix}$$

$$\nabla\times\left(\underline{v}\cdot\nabla\underline{v}\right)=\underline{v}\cdot\nabla\underline{\omega}+\underline{\omega}\nabla\cdot\underline{v}-\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{v}$$

3D-ben egy új tag keletkezik!

Örvénytranszport-egyenlet

(ρ és ν állandó)

Képezzük a Navier-Stokes egyenlet rotációját!

$$\frac{d\underline{v}}{dt}=\frac{\partial\underline{v}}{\partial t}+\underline{v}\cdot\nabla\underline{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\underline{g}+\nu\Delta\underline{v} \qquad \nabla\times\ldots$$

$$\underbrace{\frac{d\underline{\omega}}{dt}=\frac{\partial\underline{\omega}}{\partial t}+\underline{v}\cdot\nabla\underline{\omega}}_{\text{advekció}}=0\quad\underbrace{+\nabla\times\underline{g}}_{\text{0, ha }\underline{g}\text{ potenciálos}}\underbrace{+\nu\Delta\underline{\omega}}_{\text{örvény-diffúzió}}\underbrace{-\underline{\omega}\nabla\cdot\underline{v}}_{\text{0, ha }\rho\text{ állandó}}\underbrace{+\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{v}}_{\text{örvény-nyúlás}}$$

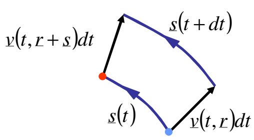
$$\frac{d\underline{\omega}}{dt}=\nu\Delta\underline{\omega}+\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{v}$$

Mit jelent az örvény-nyúlás?

Egy elemi folyadékszakasz evolúciója:

$$d\underline{s}=\underline{s}(t+dt)-\underline{s}(t)=\left[\underline{v}(t,\underline{r}+\underline{s})-\underline{v}(t,\underline{r})\right]dt$$

$$\underline{v}(t,\underline{r}+\underline{s})=\underline{v}(t,\underline{r})+\underline{s}\cdot\nabla\underline{v}$$



$$\frac{d\underline{s}}{dt}=\underline{s}\cdot\nabla\underline{v}$$

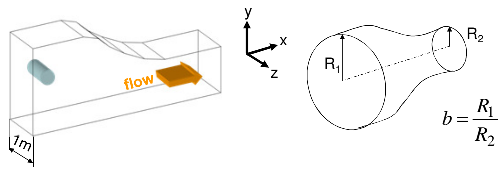
Az örvénytranszport-egyenlet súrlódásmentes folyadékra:

$\underline{s}$ szakasz tetszőlegesen választható!

$$\frac{d\underline{\omega}}{dt}=\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{v}$$

Súrlódásmentes áramlásban az örvényesség vektor úgy változik, mint egy elemi folyadékszakasz. (Helmholtz)

1. szorgalmi feladat



Hasonlítsa össze az örvényesség változását szűkülő csőben síkáramlás és forgásszimmetrikus konfúzor esetében a Helmholtz-analógia segítségével:

A. Az örvényesség mely komponensei lehetnek nem zérus értékűek? Használjon henger koordinátákat (x,r,φ) a forgásszimmetrikus esetben!
B. Milyen arányban változik az adott irányú folyadékszakasz hossza?
C. Hogyan változik az örvényesség, ha az örvénydiffúzió elhanyagolható?

Kérem, hogy a válaszát képletekkel és komponensenként legfeljebb 1-2 mondatos indoklással 1-2 oldalas PPT fájlban adja meg a Poseidon rendszerben kiírt feladatra! Helyes megoldással 2 vizsgapont szerezhető.

Mit jelent az örvénydiffúzió?

A 2D örvénytranszport-egyenlet ρ=álandó, ν=állandó esetén:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + v \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

kinematikai viszkozitás

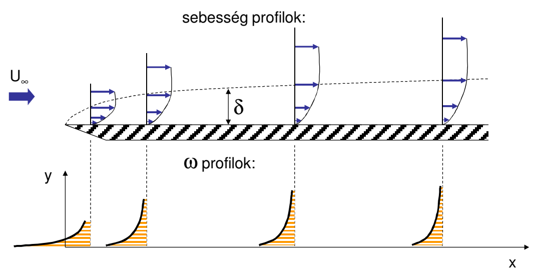
Analóg a hővezetési egyenlettel:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T = a \Delta T \qquad a = \frac{\lambda}{\rho c} \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

hőmérsékletvezetési-tényező

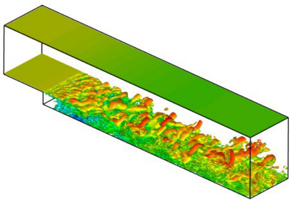
A kinematikai viszkozitás örvénydiffúziós együtthatónak tekinthető.

Sík lap feletti határréteg



Az örvényesség a fal felületén keletkezik a folyadék tapadása miatt és a határrétegben vezetés révén kerül be az áramlási térbe.

A határréteg leválás szerepe



http://www.computationalfluiddynamics.com.au/cfd-turbulence-part5-scale-resolving-simulations_srs/

Összefoglalás

Az örvénytranszport-egyenlet ρ=áll, ν=áll esetében:

$$\frac{d\omega}{dt}=\nabla\times\underline{g}+\nu\,\Delta\omega+\omega\cdot\nabla\underline{v}$$

Az örvényesség keletkezése:
- Fali tapadás
- Nem konzervatív erőtér
  (pl. Coriolis-erő)

Örvények átrendeződése:
- Advekció
- Örvénnyúlás
- Örvény diffúzió