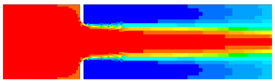
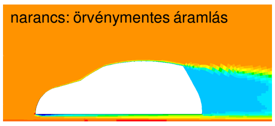
Potenciálos áramlás viszkózus folyadékban

Össznyomás megoszlása 2D CFD modellek alapján:

szárny körül



szűk nyílás esetében



egy autó körül

Őárhuzamos áramlás

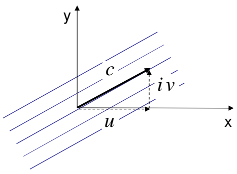
$w = \bar{c}\, z$ $\quad \bar{c}$ tetszőleges komplex szám.

$$\bar{c} = \frac{dw}{dz} = u - i\,v$$

$$w = (u - i\,v)(x + i\,y) = \underbrace{ux - vy}_{\phi} + i\,(\underbrace{-vx + uy}_{\psi})$$

Pl: a ψ=0 áramvonal egy origón áthaladó egyenes:

$$y = \frac{v}{u}\,x$$

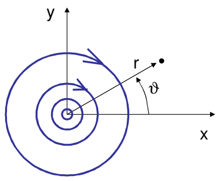


Potenciálos örvény

$w = i\,k \ln z$ $\quad$ k: tetszőleges valós szám.

$$w = i\,k \ln\left(r\,e^{i\vartheta}\right) = \underbrace{-k\vartheta}_{\phi} + i\,\underbrace{k \ln r}_{\psi}$$

Az áramvonalak koncentrikus körök: $\quad \psi = k \ln r = \text{áll.}$



Potenciálos örvény

A sebességmező:

$$\bar{c} = \frac{dw}{dz} = i\frac{k}{z} = i\frac{k}{r\,e^{i\vartheta}} = i\frac{k}{r}e^{-i\vartheta}$$

$$\bar{c} = \frac{k}{r}\,i\left(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)\right)$$

$$c = \frac{k}{r}\left(\sin\vartheta - i\cos\vartheta\right)$$

Tangenciális irányú egységvektor.

A sebesség nagysága: $|c| = \frac{k}{r}$

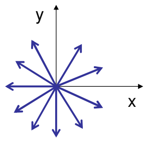
Cirkuláció az origót egyszer megkerülő görbére:

$$\Gamma\left[\frac{m^2}{s}\right] = 2r\pi|c| = 2r\pi\frac{k}{r} = 2\pi k$$ ezért: $\boxed{k = \frac{\Gamma}{2\pi}}$

Forrás

Ez 3D-ben szemlélve vonalforrás.

$\boxed{w = k\ln z}$ k: tetszőleges valós szám.



$$w = k\ln\left(r\,e^{i\vartheta}\right) = \underbrace{k\ln r}_{\phi} + i\underbrace{k\vartheta}_{\psi}$$

$$z = x + iy \longrightarrow \psi = k\,atg\,\frac{y}{x}$$

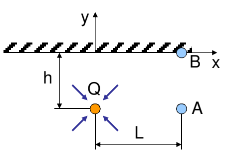
$$\bar{c} = \frac{dw}{dz} = \frac{k}{z} = \frac{k}{r}\left(\cos\vartheta - i\sin\vartheta\right)$$

$$c = \frac{k}{r}\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)$$

Radiális egységvektor.

$$Q\left[\frac{m^2}{s}\right] = \psi_{\vartheta=2\pi} - \psi_{\vartheta=0} = k\,2\pi$$ ezért: $\boxed{k = \frac{Q}{2\pi}}$

2. szorgalmi feladat



a) Adja meg az ábrán látható áramlás komplex potenciálját adott Q, h és L esetén! (A sraffozott felület függőleges áramlás nem lehetséges.)
b) Határozza meg a sebesség nagyságát a B pontban.
c) Határozza meg a térfogatáramot A és B pontok között?
d) Határozza meg a nyomásmegoszlást az x tengely mentén!
e) Milyen feltételből lehetne meghatározni egy vízszintes kút maximális megengedhető térfogatáramát (Q_{max})?

Kérem, hogy a válaszát képletekkel és részfeladatonként 1-2 mondatos indoklással max. 5 oldalas PPT fájlban adja meg a Poseidon rendszerben kiírt feladatra! Helyes megoldással 2 vizsgapont szerezhető.

Sarok körüli áramlás

$$w = \frac{k}{n} z^n$$

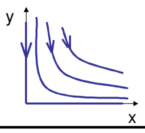
k, n: valós számok, és n>0.

$$w = \frac{k}{n} r^n e^{in\vartheta} = \frac{k}{n} r^n \left(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta\right)$$

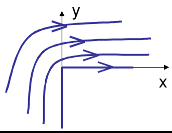
$$\psi = \frac{k}{n} r^n \sin n\vartheta$$

$$\psi = 0, \text{ ahol } \quad \vartheta = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots$$

n=2 :
Ψ=0, ha
0, $\pi/2$

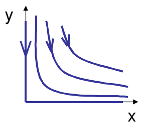


n=2/3 :
Ψ=0, ha
0, $3\pi/2$



Sarok körüli áramlás

a. Milyen alakúak az áramvonalak? y=f(x) ?
b. Hogyan változik a torlóponti áramvonalon (y tengely mentén) mozgó folyadékrész sebessége? v=g(y) ?



$$\psi = \frac{k}{2} r^2 \sin 2\vartheta$$ áramvonalon: Ψ=áll.

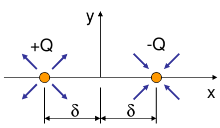
$$\psi = k\, r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$$

$$\psi = k\, x\, y$$

$$y = \frac{\psi}{k} x^{-1}$$ Tehát az áramvonalak hiperbolák.

$$\bar{c} = kz \longrightarrow v = -k\, y$$

Dipólus



$$\delta \to 0, \quad Q \to \infty, \quad Q \cdot \delta = \text{áll.}$$

$$w = \frac{Q}{2\pi}\left[ln(z+\delta) - ln(z-\delta)\right]$$

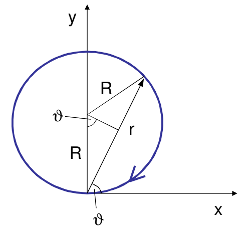
$$\bar{c} = \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{z+\delta} - \frac{1}{z-\delta}\right]$$

$$\bar{c} = \frac{Q}{2\pi} \frac{z-\delta-(z+\delta)}{z^2-\delta^2}$$

$$w = \frac{M}{z} \qquad \bar{c} = -\frac{M}{z^2} \xleftarrow{\delta \to 0,\ Q \to \infty} \bar{c} = -\frac{Q\delta}{\pi} \frac{1}{z^2-\delta^2}$$

M valós állandó: dipólnyomaték.

Dipólus



$$w=\frac{M}{z}=\frac{M}{r\,e^{i\vartheta}}=\frac{M}{r}\left(\cos\vartheta-i\sin\vartheta\right)$$

$$\psi=-\frac{M}{r}\sin\vartheta=\text{const.}$$

$$r=-\frac{M}{\psi}\sin\vartheta$$

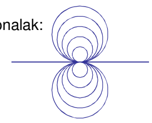
Egy x tengelyt érintő kör egyenlete:

$$r=2R\sin\vartheta$$

tehát az áramvonalak R sugarú körök:

$$2R=-\frac{M}{\psi}\longrightarrow R=-\frac{M}{2\psi}$$

Az áramvonalak:



Henger körüli áramlás

$$\boxed{w=c_\infty z+\frac{M}{z}}$$

c_∞ valós szám

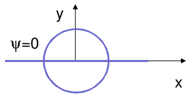
$$w=c_\infty r\,e^{i\vartheta}+\frac{M}{r}e^{-i\vartheta}=c_\infty r\left(\cos\vartheta+i\sin\vartheta\right)+\frac{M}{r}\left(\cos\vartheta-i\sin\vartheta\right)$$

$$\psi=\left(c_\infty r-\frac{M}{r}\right)\sin\vartheta$$

Milyen alakú a ψ=0 áramvonal?

ha a zárójeles tényező 0: $c_\infty R-\dfrac{M}{R}=0$

ha sinϑ=0, akkor ϑ = 0, π...



$$\boxed{w=c_\infty\left(z+\frac{R^2}{z}\right)}\longleftarrow\frac{M}{c_\infty}=R^2$$

Henger körüli áramlás