

## Hő- és áramlástan

### 1. előadás – Az örvényesség evolúciója

Dr. Gergely Kristóf  
BME Áramlástan Tanszék  
2015 február 9.

## Tematika

Okt.hét	Téma
8	Ismétlés: szubsztanciális derivált, tömegáram, alapegyenletek alkalmazási példákkal. $\text{Div}(v)=0$ . Örvényesség. <b>Örvénytranszport</b> egyenlet (3D-ben). Egyszerűsített levezetés 2D-ben. Helmholtz-féle analógia. <b>HF1: örvényesség változása konfúzorban. (5p)</b>
9	<b>Potenciális áramlások.</b> Alkalmazási területek. Nyomás meghatározása. Sebességi potenciál, áramfüggvény, komplex potenciál.
10	Párhuzamos áramlás. Forrás-nyelő. Potenciális örvény. A szuperpozíció elve. Sarok körüli áramlás, torló áramlás. Dipólus, henger körüli potenciális áramlás. <b>HF2: vízszintes kút maximális hozama. (5p)</b>
11	Fletner rotor, Zsukovszkij transzformáció, szárny körüli áramlás, Kutta feltétel, ívelt lap felhajtóereje. Ismétlés: a határrétegek tulajdonságai. Határréteg hengeren, szárnyon. Változó cirkuláció, nyíróréteg keletkezése. Alkalmazások: Keresztáramú ventilátor. Épület körüli áramlás. Tompa testek ellenállása. Ellennyomó víztároló.
12	<b>Határrétegek.</b> A határréteg vastagsága. Határréteg egyenlet és annak Re-től független alakja. Blasius-féle profil.
13	A HRE numerikus megoldása. <b>HF3: Henger körüli határréteg számítása. (5p)</b> Turbulencia keletkezése: nyírórétegben. A határréteg stabilitása, Tollmien-Schlichting hullámok, tranzíció. Keверedési úthossz modell, logaritmusos falörvény. A határrétegben zajló hő- és anyagátadási folyamatok modellezése.
15	<b>Műszaki alkalmazások.</b> Szárnyakra ható erő. A határréteg szabályozása szárnyak esetében. Tompa testek ellenállása. Szabadsugár. Légfüggöny.

## Az advekció leírása

Felhők mozgása hazánk felett: [radar](#), [műhold](#)

Folyadéksebesség:  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = u(t, x, y, z)\mathbf{i} + v(t, x, y, z)\mathbf{j} + w(t, x, y, z)\mathbf{k}$

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Egy folyadékrészre:  $\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dw}{dt} = w$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{sebességgradiens} \\ &\text{lokális gyorsulás} \\ &\text{konvektív gyorsulás} \end{aligned}$$

## A Navier-Stokes egyenlet

$\rho = \text{állandó}, \nu = \text{állandó}$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad \left[ \frac{N}{kg} \right]$$

nyomásból származó erő
térerősség
nyíróerők

---

---

---

---

---

---

---

---

## Kontinuitás

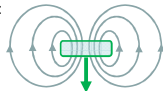
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_A \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad \text{azaz} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

felhalmozódó tömeg
kilépő tömegáram

$\rho = \text{állandó}$  esetén:  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  azaz  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Az áramcső is az áramlási tér határáig tart, vagy önmagába záródik.

Pl. abszolút áramvonalak a tenyeresem körül:




---

---

---

---

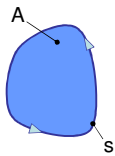
---

---

---

---

## Örvények



Cirkuláció:

$$\Gamma = \oint_s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

arányos a felhajtó erővel

Örvényesség:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

a szögsebesség kétszerese

A Thomson-tétel szerint  $\mathbf{v}=0$ ,  $\rho=\text{áll}$ , és potenciális erőter esetén bármely folyékony zárt görbére:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$



Hogyan kerül az örvényesség az áramlásba?

---

---

---

---

---

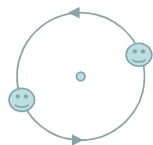
---

---

---

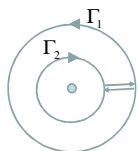
## Potenciálos örvény

Lehet-e cirkuláció, ha az örvényesség 0?



$$\omega_z = 0$$

Az örvényesség a középpontban koncentráliódik.



$$\Gamma_1 = -\Gamma_2$$

$$2r\pi v = \text{áll.}$$

$$v = \frac{\text{áll.}}{r}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Az örvényesség evolúciója

Örvénytranszport egyenlet:  $\nabla \times (\text{Navier - Stokes})$

Először vezessük le 2D-ben! Ekkor  $\omega$  skalár:  $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial g_y}{\partial x} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial g_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + *** = 0 + 0 + \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$*** = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

Nézzük csak a konvektív gyorsulás rotációját 3D-ben!

$$\nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = \nabla \times \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} w_{xy} - v_{xz} & w_{yy} - v_{yz} & w_{zy} - v_{zz} \\ u_{xz} - w_{xx} & u_{yz} - w_{yx} & u_{zz} - w_{zx} \\ v_{xx} - u_{xy} & v_{yx} - u_{yy} & v_{zx} - u_{zy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} w_x u_y - v_x u_z + w_y v_y - v_y v_z + w_z w_y - v_z w_z \\ u_x u_z - w_x u_x + u_y v_z - w_y v_x + u_z w_z - w_z w_x \\ v_x u_x - u_x u_y + v_y v_x - u_y v_y + v_z w_x - u_z w_y \end{pmatrix}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

$$\nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) =$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} (u_x + v_y + w_z) + \begin{pmatrix} w_x u_y - v_x u_z - u_x w_y + u_x v_z \\ u_y v_z - w_y v_x - v_y u_z + v_y w_x \\ v_z w_x - u_z w_y - w_z v_x + w_z u_y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_x w_y - u_x v_z + w_x u_z - u_x w_y + u_x v_x - u_x u_y \\ v_x w_y - v_x v_z + v_x u_z - v_x w_x + v_x v_x - v_x u_y \\ w_x w_y - w_x v_z + w_x u_z - w_x w_x + w_x v_x - w_x u_y \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

↓  
3D-ben egy új tag keletkezik!

---

---

---

---

---

---

---

---

### Örvénytranszport-egyenlet

(ρ és V állandó)

Képezzük a Navier-Stokes egyenlet rotációját!

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad \nabla \times \dots$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = 0 + \nabla \times \mathbf{g} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

advekción
0, ha g
örvény-
0, ha ρ
örvény-

potenciális
diffúzió
állandó
örvény-

nyúlás

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v}$$


---

---

---

---

---

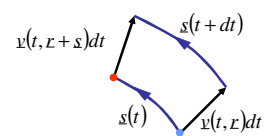
---

---

---

### Mit jelent az örvény-nyúlás?

Egy elemi folyadékszakas evolúciója:

$$d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(t+dt) - \boldsymbol{s}(t) = [\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{s}) - \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})] dt$$


$$\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{s} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$$

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \boldsymbol{s} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$$

Az örvénytranszport-egyenlet sűrűdásmentes folyadékra:

§ szakasz tetszőlegesen választható!

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$$

Sűrűdásmentes áramlásban az örvényesség vektor úgy változik, mint egy elemi folyadékszakas. (Helmholtz)

---

---

---

---

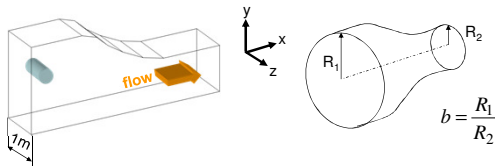
---

---

---

---

# 1. szorgalmi feladat



Hasonlítsa össze az örvényesség változását szűkülő csőben síkáramlás és forgásszimmetrikus konfúzor esetében a Helmholtz-analógia segítségével:

- A. Az örvényesség mely komponensei lehetnek nem zérus értékek? Használjon henger koordinátákat  $(x, r, \theta)$  a forgásszimmetrikus esetben!
- B. Milyen arányban változik az adott irányú folyadékszakas hossza?
- C. Hogyan változik az örvényesség, ha az örvénydiffúzió elhanyagolható?

Kérem, hogy a választát képletekkel és komponensenként legfeljebb 1-2 mondatos indoklással 1-2 oldalas PPT fájlban adja meg a Poseidon rendszerben kiírt feladatra! Helyes megoldással 5 vizsgapont szerezhető.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

# Mit jelent az örvénydiffúzió?

A 2D örvénytranszport-egyenlet  $\rho$ =állandó,  $\nu$ =állandó esetén:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

kinematikai viszkozitás

Analóg a hővezetési egyenlettel:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = a \Delta T \quad a = \frac{\lambda}{\rho c} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

hőmérsékletvezetési-tényező

A kinematikai viszkozitás örvénydiffúziós együtthatónak tekinthető.

---

---

---

---

---

---

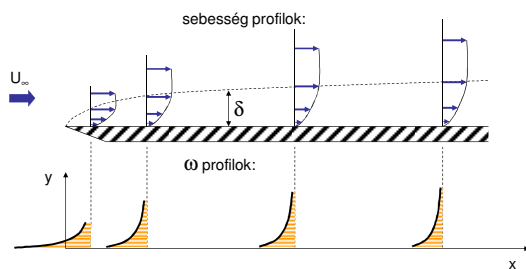
---

---

---

---

# Sík lap feletti határréteg



Az örvényesség a fal felületén keletkezik a folyadék tapadása miatt és a határrétegben vezetés révén kerül be az áramlási térbe.

---

---

---

---

---

---

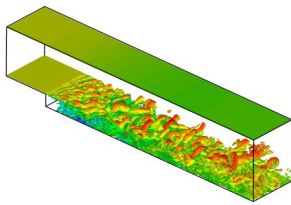
---

---

---

---

## A határréteg leválás szerepe



[http://www.computationalfluidynamics.com.au/cfd-turbulence-part5-scale-resolving-simulations\\_srs/](http://www.computationalfluidynamics.com.au/cfd-turbulence-part5-scale-resolving-simulations_srs/)

---

---

---

---

---

---

---

---

## Összefoglalás

Az örvénytranszport-egyenlet  $\rho$ -áll,  $v$ -áll esetében:

$$\frac{d\omega}{dt} = \nabla \times g + \nu \Delta \omega + \omega \cdot \nabla v$$

Az örvényesség keletkezése:

- Fali tapadás
- Nem konzervatív erőter (pl. Coriolis-erő)

Örvények átrendeződése:

- Advekción
- Örvényülés
- Örvény diffúzió

---

---

---

---

---

---

---

---