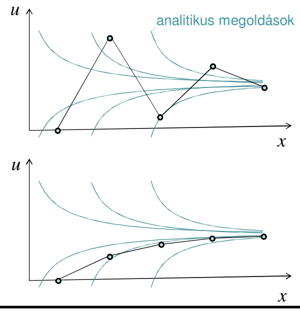
Differenciasémák

Kristóf Gergely

2010. 09. 27.

A viselkedésük nagyon eltér…

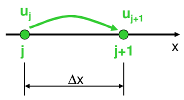
Sok esetben a fizikai folyamatok valamilyen egyensúlyi állapot felé tartanak.



Explicit Euler módszer:

Implicit Euler módszer:

Euler-módszer



A Taylor-polinomból kifejezhetünk egy elsőrendű pontosságú differencia sémát is:

$$u'_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + o(1)$$

(A hibatag itt egy nagyságrenddel nagyobb.)

Az u_j-n áthaladó (analitikus) megoldás Taylor-sora j pontból a j+1 pontba:

$$u_{j+1} = u_j + u'_j \Delta x + o(\Delta x)$$

Ez egy elsőrendű pontosságú integrálási séma.

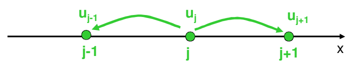
Feltesszük, hogy a differenciálegyenlet az alábbi formában adott:

$$u'_j = f(u_j, x_j)$$

Lépésenként közelíthetjük u-t:

$$u_{j+1} \cong u_j + f(u_j, x_j)\Delta x$$

CDS

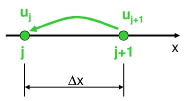


$$u_{j+1} = u_j + u'_j \Delta x + u''_j \frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u_{j-1} = u_j + u'_j(-\Delta x) + u''_j \frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u'_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + o(\Delta x)$$

A Bacward Euler séma



Ha F a j+1 pontban kap értéket, akkor u_{j+1} -re általában egyenletet kell megoldanunk, ezt a módszert implicit diszkretizálásnak nevezzük.

Egy másik lehetséges elsőrendű séma:

$$u_j = u_{j+1} + u'_{j+1}(-\Delta x) + o(\Delta x)$$

a backward Euler módszerből kifejezve:

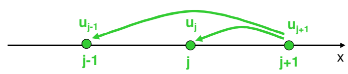
$$u'_{j+1} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + o(1)$$

az Euler-módszerrel azonos differencia-sémát kapunk u'_{j+1}-re.
Feltételezzük a differenciál egyenletet az alábbi általános alakban:

$$F(u'_{j+1}, u_{j+1}, x_{j+1}) = 0$$

$$F\left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}, u_{j+1}, x_{j+1}\right) \cong 0$$

Egy implicit, másodrendű differenciaséma



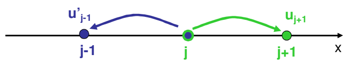
$$u_j = u_{j+1} + u'_{j+1}(-\Delta x) + u''_{j+1}\frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u_{j-1} = u_{j+1} + u'_{j+1}(-2\Delta x) + u''_{j+1} 2\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$$

$$u_j - \frac{u_{j-1}}{4} = \frac{3}{4}u_{j+1} + \underline{u'_{j+1}}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) + o(\Delta x^2)$$

$$u'_{j+1} = \frac{\frac{3}{2}u_{j+1} - 2u_j + \frac{1}{2}u_{j-1}}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

Adams-Basforth séma



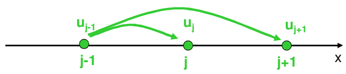
$$u_{j+1}=u_j+u'_j\,\Delta x+u''_j\,\frac{\Delta x^2}{2}+o(\Delta x^2)$$

$$u'_{j-1}=u'_j+u''_j\,(-\Delta x)+o(\Delta x) \qquad / \; +\ldots\times\frac{\Delta x}{2}$$

$$u_{j+1}=u_j+\frac{3}{2}u'_j\,\Delta x-\frac{1}{2}u'_{j-1}\,\Delta x+o(\Delta x^2)$$

Másodrendű pontosságú explicit integrálási séma.
Alkalmas a **NS egyenlet időbeli integrálására**.

Egy kétlépéses, másodrendű, explicit Runge-Kutta típusú séma



1st step: Az Euler módszert alkalmazva eljutunk a j-edik pontba:

$$u_j=u_{j-1}+u'_{j-1}\,\Delta x+o(\Delta x)$$

Értéket adunk a deriváltnak a j-edik pontban:

$$d=f\big(u_j+o(\Delta x),x_j\big)=f\big(u_j,x_j\big)+o(\Delta x)=u'_j+o(\Delta x)$$

2nd step: Alkalmazzuk a CDS sémát a j-edik pont körül:

$$u_{j+1}=u_{j-1}+d\,2\Delta x+o(\Delta x^2)=u_{j-1}+u'_j\,2\Delta x+o(\Delta x^2)$$

Véges térfogatok módszere

Az általános transzportegyenlet differenciál alakja:

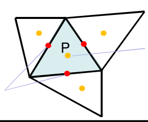
$$\frac{\partial\rho\phi}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\phi\vec{v})=\nabla\cdot\vec{S}_A+\nabla\cdot(\Gamma\nabla\phi)+S_v$$

Amelyben Φ valamilyen megmaradó jellemző tömegkoncentrációja. (Pl. kg/kg).

A hely szerinti differenciálást mindig div(…), grad(…), vagy div(grad(…)) alakban kell elvégezni, csak ezekre kell tehát közelítő sémákat találni.
Véges térfogatok módszere esetében a fenti operátorokat felületi és térfogati integrálokra valamint a hálón végzett interpolációkra vezetjük vissza.

A numerikus háló egy részlete az i-edik cella körül:

Cellafelületek.
Felületvektorral adottak



Cella középpont
Itt tároljuk ϕ_P-t.

Bármit interpolálhatunk cellából felületre…

A divergencia közelítő alakja

Véges térfogatos módszere esetében a divergencia operátort felületi integrálásra Visszavezetve közelítjük, ezért a Gauss-tételből kell kiindulni:

$$\int_V \nabla\cdot\underline{u}\,dV=\oint_A \underline{u}\cdot d\underline{A}$$

Az $\underline{u}$ vektor Descartes koordinátáit u_i-val jelölve az alábbi módon definiálhatjuk a divergencia operátor diszkrét alakját P pontban:

$$\tilde{\nabla}\cdot u_i=\frac{\sum_k\int_{A_k}u_\perp dA}{V_P}$$

ahol A_k a cella oldalfalainak indexe.
A felületi integrál a felületvektor és a felületre interpolált $\underline{u}$ skaláris szorzata azaz: $\sum_{i=1}^{3}u_i dA_i$

A gradiens közelítő alakja

Egy skaláris mennyiség gradiensét a Gauss-tételből levezetett alábbi integrál átalakító tételből határozhatjuk meg:

$$\int_V \nabla\phi\,dV=\oint_A \phi\cdot d\underline{A}$$

A gradiens operátor i komponensét tehát az alábbi alakban számolhatjuk:

$$\tilde{\nabla}\big|_i\phi=\frac{\sum_k\int_{A_k}\phi dA_i}{V_P}$$

A_i a felületvektor i komponensét jelöli Descartes koordináta-rendszerben.

A Laplace-operátor közelítő alakja

Egy skaláris mennyiségre vonatkozó Laplace operátor felírható a gradiens divergenciájaként:

$$\Delta\phi=\nabla\cdot\nabla\phi$$

Diszkrét közelítés elvégzéséhez a belső gradienset a cella felületére Interpolálnunk kell. Jelöljük ezt < > zárójelekkel:

$$\tilde{\Delta}\phi=\tilde{\nabla}\cdot\left\langle\tilde{\nabla}\big|_i\phi\right\rangle$$

Gyakorlatilag a nyomás kivételével (pl. hőmérséklet vagy transzportált passzív skalárok esetében) a gradiens felületre merőleges komponensét egyszerűbben is közelíthetjük a két szomszédos cellában tárolt ϕ értékek alapján.
Ilyen esetben a Laplace operátor közelítő alakja a P pontban és a szomszédos cellákban tárolt Φ értékek lineáris kombinációja lesz:

$$\tilde{\Delta}\phi=A_P\,\phi_P+\sum A_\ell\,\phi_\ell$$

Az A együtthatók csak a háló méreteitől függenek.