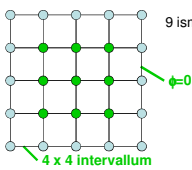


Az áramlási problémák diszkretizálásával kapott algebrai egyenletrendszer megoldása

Dr. Kristóf Gergely
2010.október

Mátrixos alakban

$$\phi_S + \phi_W - 4\phi_P + \phi_E + \phi_N = h^2 Q_P$$


$$A_{i,j} \phi_i = Q_i$$

-4	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	-4	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	-4	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	-4	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	-4	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	-4	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	-4	1	0
0	0	0	0	1	0	1	1	-4	1
0	0	0	0	0	1	0	1	1	-4

Az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$A_{i,j} \phi_i = Q_i$$

Pl. 101 x 101 es háló esetén az ismeretlenek száma N=10⁴, A elemeinek száma pedig 10⁸.

A Poisson-egyenletet minden időlépésnél meg kell oldani...

Ezt a feladatot nem tudjuk elkerülni inkompresszibilis áramlások esetén.

Ψ-ω módszer esetében: $\Delta \psi = -\omega \longrightarrow \psi$

Nyomásalapú megoldók esetében: $\Delta P = \nabla \cdot \underline{f} \longrightarrow P$

Gauss-elimináció

Általános mátrix esetében épp olyan jó, mint bármilyen más módszer, viszont a mátrix kedvező tulajdonságait nem használja ki.

1. lépés Elimináció:

Az első sor A₂₁/A₁₁-szeresét kivonjuk a második sorból, így ott az első elem 0 lesz. Ugyanez minden további sorra.

Minden további oszlopra az N-1-edik oszlopig.

2. lépés Visszahelyettesítés:

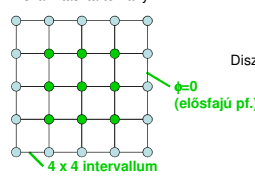
$$\phi_n = \frac{Q_n}{U_{nn}}$$

$$\phi_i = \frac{Q_i - \sum_{k=i+1}^N U_{k,i} \phi_k}{U_{i,i}}$$

A műveletigény N³/3, de ebből a visszahelyettesítés csak N²/2. Hiába ritka A mátrix, az U mátrix már nem ritka. Memóriaigény 101 x 101 es hálón kb. 400 Mb. Továbbá: **Nem is szükséges nagyon pontos megoldás, mert a diszkretizációs hiba jelentős.**

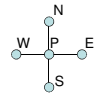
Egyszerű 2D példa

A számítási tartomány:



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = Q$$

Diszkretizáljuk véges differenciák módszerével:



$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y} - \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y} \right) = Q_P$$

Pl: Δx = Δy = h esetén: $\phi_S + \phi_W - 4\phi_P + \phi_E + \phi_N = h^2 Q_P$

Iteratív módszerek

A megoldást lépésenként finomítjuk. φ közelítése az n-edik lépésben φⁿ.

Elhagyva a vektorindexeket: $A \phi^n = Q - \rho^n$ ρⁿ : reziduum

A hiba: $\epsilon^n = \phi - \phi^n$

$A \epsilon^n = A(\phi - \phi^n) = Q - (Q - \rho^n) = \rho^n$ Tehát a hibára az eredetivel azonos mátrixú egyenletrendszer kell megoldani.

Iteratív módszerek: $M \phi^{n+1} = N \phi^n + Q$

Bekonvergált megoldásra: $\phi^{n+1} = \phi^n = \phi$, ezért: $A = M - N$

Mindkét oldalból vonjunk le Mφⁿ-et:

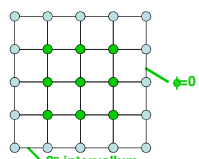
$$M(\phi^{n+1} - \phi^n) = N \phi^n + Q - M \phi^n = Q - A \phi^n = \rho^n$$


korrekció: δ^n $M \delta^n = \rho^n$ Korrekciós egyenlet.

Minél jobban közelíti M az A mátrixot, annál gyorsabban konvergál. M lehet pl. diagonál, triagonál, vagy Δ mátrix. **δ-nak sem kell pontosnak lenni...**

Jacobi-iteráció

$$\phi_S^n + \phi_W^n - 4\phi_P^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^n = h^2 Q_P \quad \text{M diagonál mátrix lesz.}$$

$$\phi_P^{n+1} = \frac{1}{4}(\phi_S^n + \phi_W^n + \phi_E^n + \phi_N^n - h^2 Q_P)$$


Példaprogram: 

- A program...
- Az eredmény jellege...
- Szükséges iterációs szám...

2^p intervallum
Összesen: $(2^p-1)^2$ ismeretlen

Multigríd módszer

Vegyünk például egy egyszerű egydimenziós feladatot:

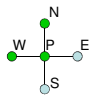
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = Q$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}(\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}) = Q_i$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}(\phi_{i-1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i+1}^n) = Q_i - \rho_i^n$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}(\epsilon_{i-1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i+1}^n) = \rho_i^n$$

Gauss-Seidel iteráció



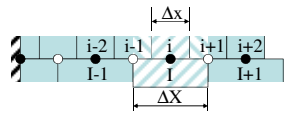
$$\phi_S^n + \phi_W^{n+1} - 4\phi_P^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^{n+1} = h^2 Q_P \quad \text{M } \Delta \text{ mátrix lesz.}$$

ezeket már ismerjük a számítási sorrend miatt (lexikografikus séma)

$$\phi_P^{n+1} = \frac{1}{4}(\phi_S^n + \phi_W^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^{n+1} - h^2 Q_P)$$

- Fele annyi iterációt igényel
- Nem kell új tömb a változóknak
- A hiba aszimmetrikus.

Elhagyjuk az iterációs indexet: $\frac{1}{\Delta x^2}(\epsilon_{i-1} - 2\epsilon_i + \epsilon_{i+1}) = \rho_i$



$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{2}\epsilon_{i-2} - \epsilon_{i-1} + \frac{1}{2}\epsilon_i + \epsilon_{i-1} - 2\epsilon_i + \epsilon_{i+1} + \frac{1}{2}\epsilon_i - \epsilon_{i+1} + \frac{1}{2}\epsilon_{i+2} \right) =$$

ezek kiesnek

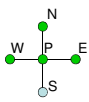
$$= \frac{1}{2}\rho_{i-1} + \rho_i + \frac{1}{2}\rho_{i+1}$$

$$\frac{1}{4\Delta x^2}(\epsilon_{i-2} - 2\epsilon_i + \epsilon_{i+2}) = \frac{1}{4}(\rho_{i-1} + 2\rho_i + \rho_{i+1})$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}(\epsilon_{i-1} - 2\epsilon_i + \epsilon_{i+1}) = \rho_i$$

restrikciós séma (2D és 3D esetekben közelítő jellegű, ezért ϵ -t jelölhetnénk δ -val is.)

Vonalrelaxáció



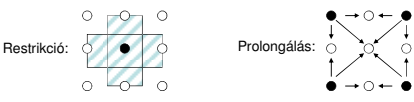
$$\phi_S^n + \phi_W^{n+1} - 4\phi_P^{n+1} + \phi_E^{n+1} + \phi_N^{n+1} = h^2 Q_P$$

ezt már ismerjük ezeket egyszerre határozzuk meg Thomas algoritmus segítségével.

Ugyancsak tridiagonál megoldóra épül az ADI (más néven operator splitting) módszer, ami ennél sokkal hatékonyabb megoldást tesz lehetővé.

Probléma:
Az eddigi módszerek csak simitának, ezért a peremek hatása nagyon lassan terjed be a finom hálókön. → Durvabb rácsokat is használni kell.
A korrekciós egyenletet kell durvabb rácsra levinni, mert ezt pontatlanul (nagyobb relatív hibával) is megoldhatjuk.

Általánosítás 2D esetre:



1. ρ_i restrikciója $\rightarrow \rho_i$
2. ϵ_i számítása $\frac{1}{4}$ annyi ismeretlen meghatározása (és $\frac{1}{4}$ annyi iteráció). Az időigény szinte elhanyagolható.
3. ϵ_i prolongálása a finom rácsra (ϵ_i), majd egy simítás a finom rácscon.

Miért ne mennénk le még durvább rácsokra?

1. Reziduumok kiszámítása a legfinomabb rácscon
2. Reziduumok restrikciója minden durvabb rácsra
3. Egyenletrendszer megoldása a legdurvabb rácscon
4. Minden finomabb rácsra:
 - Korrekció prolongálása
 - Utósimítás

A megoldás műveletigénye

Szükséges iterációk száma 2D-ben:

p	Nsor	N	Jacobi	G-S	Vonalrelax	Multigrid
3	7	49	40	20	10	11
4	15	225	160	80	40	15
5	31	961	640	320	160	37
6	63	3969	2560	1280	640	43
7	127	16129	10240	5120	2560	44

Műveletigény / N:

p	Nsor	N	Jacobi	G-S	Vonalrelax	Multigrid
3	7	49	200	100	50	220
4	15	225	800	400	200	300
5	31	961	3200	1600	800	740
6	63	3969	12800	6400	3200	860
7	127	16129	51200	25600	12800	880

finom háló