Inkompresszibilis áramlások számítása

Kristóf Gergely

2014. szeptember 15.

A nyomás-sebesség kapcsolat problémája

A diszkretizációval kapott algebrai egyenletrendszer megoldására iterációs módszert fogunk alkalmazni.
Szegregált iteráció: minden mezőváltozóra különálló egyenletrendszert oldunk meg, amelyben a többi mezőváltozót állandónak tekintjük.

Kontinuitás:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Navier-Stokes egyenlet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \vec{v}) = -\frac{\partial p / \rho_0}{\partial x} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla u) + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \vec{v}) = -\frac{\partial p / \rho_0}{\partial y} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla v) + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (w \vec{v}) = -\frac{\partial p / \rho_0}{\partial z} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla w) + g_z$$

Ez az egyenletrendszer nem alkalmas szegregált iterációra. Pl. u-ra:

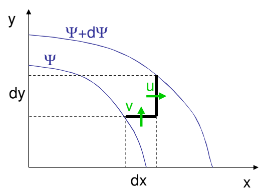
$$u^{n+1} \leftarrow \quad \frac{u^{n+1} - u^{n}}{\Delta t} + \tilde{\nabla} \cdot \left(u^{n} \vec{v}^{\,n} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \tilde{\nabla}\Big|_x \, p^{n} + \tilde{\nabla} \cdot \left(\mathbf{v} \tilde{\nabla} u^{n} \right) + g_x \quad ??$$

Miből számoljuk ki p^{n+1}-et és hogyan fog teljesülni a kontinuitás?

Szokásos megközelítések

- Ψ-ω módszer
  Az mozgásgyenletből **kiküszöböljük a nyomásmezőt.**
  A kontinuitást egy potenciál függvény bevezetésével oldjuk meg.
- Nyomáskorrekciós módszerek
  A kontinuitási egyenlet helyett **új alapegyenletet vezetünk be a nyomásra.**
- Mesterséges kompresszibilitás módszerek
  Gyengén összenyomható áramlások esetén az áramlási jellemzők nem függenek jelentősen a kompresszibilitás értékétől, ezért egy mesterségesen csökkentett rugalmassági modulus bevezetésével alkalmazhatók a **kompresszibilis megoldók.**

Az áramfüggvény (Ψ)



Jelentése 2D-ben: térfogatáram 1 m széles tartományban.

Egy Ψ=állandó vonalon átáramlás nincs, tehát a **Ψ szintvonalai áramvonalak.**

Két, egymáshoz közeli áramvonalra az alábbi összefüggés érvényes:

$$d\psi = u\,dy - v\,dx$$

Ugyanakkor Ψ teljes differenciálja:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

Ebből megkapjuk Ψ definícióját 2D áramlás esetére:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad \textit{és} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

Puszta létével kielégíti a kontinuitási egyenletet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

3D áramlások esetében

3D-ben Ψ-t vektorként definiáljuk: $\underline{v} = \nabla \times \underline{\psi}$

Vektorpotenciál.

Síkáramlás esetén visszakapjuk az eredeti definíciót:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial \psi_y}{\partial z}} \\ \cancel{\frac{\partial \psi_x}{\partial z}} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ \cancel{\frac{\partial \psi_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial \psi_x}{\partial y}} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

azaz síkáramlás esetén:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \textit{és} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

A kontinuitás 3D-ben is automatikusan kielégül: $\nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot \nabla \times \underline{\psi} \equiv 0$

2D-ben további előny, hogy a mezőváltozók száma csökken (u,v →Ψ).
Sajnos ez az előny 3D-ben elvész.

Az örvényesség (ω)

Az örvényesség 3D-ben: $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v}$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial w}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial v}{\partial z}} \\ \cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2D-ben ω-nak csak z komponense van:

tehát: $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

Az áramfüggvénnyel kifejezve:

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Delta \psi$$

ez egy **Poisson-egyenlet az áramfüggvényre**.

Egy érdekes speciális eset: potenciálos áramlásokra $\underline{\omega} = 0$

Csak egy Laplace-egyenletet kell megoldani 2D esetben. $\Delta \psi = 0$
Analitikus megoldások, analógiák...

Az örvénytranszportegyenlet (ÖTE)

Képezzük a Navier-Stokes egyenlet rotációját! 2D-ben csak z komponens van:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\#\#\#=-\frac{\partial^2 p/\rho_0}{\partial x\partial y}+\mathbf{v}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\#\#\#=-\frac{\partial^2 p/\rho_0}{\partial x\partial y}+\mathbf{v}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}+\#\#\#=0+\mathbf{v}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}=(\nabla\cdot\underline{v})\omega=0$$

Az örvénytranszport egyenlet 2D alakja.
(3D-ben bonyolultabb).

$$\frac{d\omega}{dt}=\mathbf{v}\,\Delta\omega$$

A kinematikai viszkozitás az örvényesség vezetési tényezője...
Pl: határrétegben.

Megoldási módszer stacionárius áramlásra

Poisson-egyenlet Ψ-re:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\omega$$

ÖTE-ba beírjuk a Ψ-vel kifejezett u-t és v-t:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}=\mathbf{v}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)$$

Szegregált megoldási módszer:

$$\psi^0,\omega^0\xrightarrow{Poisson}\psi^1,\omega^0\xrightarrow{ÖTE}\psi^1,\omega^1\xrightarrow{Poisson}\psi^2,\omega^1\ \ldots$$

Peremfeltételek Ψ-re:
- Belépésnél és falon: elsőfajú.
- Kilépésnél másodfajú (Neuman pf.).

ω-ra:
- Belépésnél és falon: elsőfajú.
- Kilépésnél másodfajú (Neuman pf.).

Probléma: nyomás peremfeltételt nem tudunk előírni, mert p nem szerepel az egyenletekben. A nyomásmezőt utólag kell meghatározni.

Nyomás alapú megoldók
A nyomásegyenlet

Kontinuitás:

$$\nabla\cdot\vec{u}=0$$

Mozgásegyenlet ha *g*-nek nincs szerepe:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\nabla\cdot(\vec{u}\otimes\vec{u})=-\nabla(p/\rho_0)+\mathbf{v}\Delta\vec{u}$$

Új jelölések: $P=p/\rho_0$ és $\vec{f}$ (értelemszerűen).

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=\vec{f}-\nabla P$$

Képezzük a mozgásegyenlet divergenciáját felhasználva, hogy: $\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{u}=0$

$$\Delta P=\nabla\cdot\vec{f}$$

Ez egy Poisson-egyenlet P-re.
Nyomásegyenlet

Ez alkalmas pl. a nyomásmező meghatározására Ψ-ω módszer esetén.

Alkalmas-e a nyomásegyenlet a kontinuitás kiváltására?

Diszkretizáljuk a mozgásegyenletet egyszerűség kedvéért időben elsőrendű pontosságú integrálási sémával (Euler-módszerrel):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t\left(f_i^n - \tilde{\nabla}\big|_i P^n\right)$$ **2. lépés**

ahol i a Descartes komponensek indexe. A nyomásegyenlet diszkrét alakja:

$$\tilde{\Delta} P^n = \tilde{\nabla} \cdot f_i^n$$ **1. lépés**

Először oldjuk meg a nyomásegyenletet P^n-re, majd frissítsü-k a sebességet!

Divergenciamentes lesz az új sebességmező?

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \tilde{\nabla} \cdot u_i^n + \Delta t \underbrace{\left(\tilde{\nabla} \cdot f_i^n - \tilde{\Delta} P^n\right)}_{\approx 0}$$

≈0 csak közelítőleg tudjuk megoldani!

A nyomásegyenletet megoldásának hibája felhalmozódva jelentkezik a kontinuitásban.

A hiba felhalmozódása elkerülhető...

Nekünk nem a nyomásegyenlet fontos, hanem a kontinuitás teljesítése.

Az eredeti nyomásegyenlet helyett az alábbi korrigált egyenletet kell megoldani:

$$\tilde{\Delta} P^n = \tilde{\nabla} \cdot f_i^n + \frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^n$$

majd a mozgásegyenletből számoljuk az új sebességeket:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t\left(f_i^n - \tilde{\nabla}\big|_i P^n\right)$$

Ellenőrizzük az új sebesség divergenciamentességét:

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \Delta t \underbrace{\left[\frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^n + \tilde{\nabla} \cdot f_i^n - \tilde{\Delta} P^n\right]}_{\approx 0}$$

≈0 nyomásegyenlet

Csak akkora a kontinuitás hibája, amit a korrigált nyomásegyenlet megoldásakor elkövetünk az n-edik lépésben.

Projekciós módszer

Ugyanez a módszer a szokásosabb jelölésekkel:

1. lépés kiszámítjuk: $u^*_i = u_i^n + \Delta t\, f_i^n$ u* pszeudosebesség

2.lépés **megoldjuk**: $\tilde{\Delta} P^n = \frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u^*_i \longrightarrow P^n$

3. lépés kiszámítjuk: $u_i^{n+1} = u^*_i - \Delta t \tilde{\nabla}\big|_i P^n$

Ellenőrizzük! $\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \Delta t \underbrace{\left[\frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u^*_i - \tilde{\Delta} P^n\right]}$

Tényleg ezt oldjuk meg a 2. lépésben.

Időben másodrendű pontosság is elérhető pl. Adams-Basforth sémával.

Stacionárius áramlás

Az időben explicit módon diszkretizát megoldás általában nem felel meg a gyakorlati igényeknek:
Az előző módszer csak kis időlépésekkel tud működni. (Feltételesen stabil séma.)
Ha az áramlás stacionárius, vagy lassan változik, akkor nagyon sok időlépést kell tenni, amíg elérjük a stacionárius állapotot.

P-u iteráció stacionárius áramlásra

Szeretnénk, ha az n+1-edik iterációs lépésben minél pontosabban közelíteni ezt:

$$a_P\, u_{i,P}^{n+1} + \sum a_\ell\, u_{i,\ell}^{n+1} = Q_i - \tilde{\nabla}\Big|_i P^{n+1} \qquad \text{és} \qquad \tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = 0$$

Csak az előző (n-edik) nyomást tudjuk használni. Megoldjuk u*-ra kezdőértékeként u^n-et felhasználva.

$$a_P\, u_{i,P}^{*} + \sum a_\ell\, u_{i,\ell}^{*} = Q_i - \tilde{\nabla}\Big|_i P^{n} \quad \xrightarrow{\textbf{1.lépés}} \quad u_{i,P}^{*}$$

$$u_{i,P}^{*} = \frac{Q_i - \sum a_\ell\, u_{i,\ell}^{*}}{a_P} - \frac{1}{a_P}\tilde{\nabla}\Big|_i P^n$$

$$u_{i,P}^{*} = \breve{u}_{i,P} - \frac{1}{a_P}\tilde{\nabla}\Big|_i P^n$$

u^{n+1} hasonló képlettel közelíthető az új nyomásgradiens alapján:

$$u_{i,P}^{n+1} \approx \breve{u}_{i,P} - \frac{1}{a_P}\tilde{\nabla}\Big|_i P^{n+1} \qquad \textbf{3.lépés}$$

u^{n+1} elégítse ki a kontinuitást!
Képezzük a numerikus divergenciáját:

$$\tilde{\Delta} P^{n+1} = a_P \tilde{\nabla} \cdot \breve{u}_i \quad \xrightarrow{\textbf{2.lépés}} \quad P^{n+1}$$

A 3. lépésben elhanyagolt szomszédok miatt most a mozgásegyenlet nem pontos, ezért 1,2,3 lépéseket ismételni kell.

Szokásos módszerek

- **Belső iteráció**:
  Közelítő megoldást kell alkalmazni az 1. és a 2. lépés egyenletrendszerének megoldására, azonban a belső iteráció csak 1 lépést szokott tenni.
- **Nyomáskorrekciós egyenlet:**
  Nyomás helyett nyomáskorrekcióra szokásos megoldani a Poisson-egyenletet. (Numerikus előnyök.)
- **SIMPLE, SIMPLEC, SIMPLER, PISO**
- **Időfüggő modellek:**
  Időben változó folyamatok esetén a lokális gyorsulást figyelembe vehetjük a_P-ben és Q-ban. Időben implicit sémát alkalmazva nagy időlépéseket lehet tenni.