

## Diszkretizáció véges térfogatok módszerével

Kristóf Gergely  
2015.10.12.

## Fluxusok és térfogati források

A transzportegyenlet egy  $\phi$  skaláris mezőváltozóra stacionárius áramlás esetén:

$$\oint_A \rho \phi \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A \Gamma \nabla \phi \cdot d\mathbf{A} + \int_V q_\phi dV$$

konvektív fluxus    konduktív fluxus

Egy 2D háló nevezetes pontjai P pont környezetében (kompassz indexelés):

Felületi integrálok?  
Térfogati integrálok?

## Integrálok numerikus közelítése

Fluxusok felületi integrálja az e felületen:

$$F_e = \int_A \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A} = \langle \mathbf{f}_\perp \rangle_e A_e \cong A_e \frac{1}{2} (\mathbf{f}_P + \mathbf{f}_E)_\perp$$

másodrendű (CDS séma)

Alternatív integrál közelítések:

$$F_e \cong A_e \frac{1}{2} (\mathbf{f}_{ne} + \mathbf{f}_{se})_\perp$$

másodrendű (trapéz szabály)

$$F_e \cong \frac{A_e}{6} (\mathbf{f}_{ne} + 4\mathbf{f}_e + \mathbf{f}_{se})_\perp$$

negyedrendű (Simpson-szabály)

A térfogati forrás integrálja a P cellára:

$$Q_P \cong \int_V q_\phi dV \cong q_{\phi,P} V_P$$

másodrendű

PI. FLUENT rendszerben a mennyiségeket a cellaközéppontokban tároljuk. Más pontokra f értékét interpolálni kell.

## 1D példa

Stacionárius áramlás egyenes csőben, állandó  $\rho$  sűrűség mellett:

$$T_{be}=0^\circ\text{C} \quad u \quad T_w=100^\circ\text{C} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 0 \\ \leftarrow 0 \\ \leftarrow 0 \end{matrix}$$

Kontinuitás:  $\oint_A \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \xrightarrow{\rho=\text{áll.}} u = \text{állandó}$

Energiaegyenlet:  $\oint_A [c_v T + \frac{u^2}{2}] \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A \lambda \nabla T \cdot d\mathbf{A}$

Egy cellára felírva:  
pl. pozitív irányú fluxus feltételezésével

a szorzat negatív    a szorzat pozitív

## Diszkretizálás

Felírjuk a fluxusok felületi integráljait:

$$A(\rho u T)_e - A(\rho u T)_w = A \left( \frac{\lambda}{c_v} \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - A \left( \frac{\lambda}{c_v} \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w$$

Új jelölések:  $C_e = C_w = \rho u$      $D_e = D_w = \frac{\lambda}{c_v \Delta x}$

$$C_e T_e - C_w T_w = D_e (T_E - T_P) - D_w (T_P - T_W)$$

Ugyanez még egyszerűbben:  $F_e - F_w = 0$  , Általánosítsuk ezt 3D-be és más hálókra!

ahol:  $F_e = C_e T_e - D_e (T_E - T_P)$  a teljes fluxus.

## CDS séma

$$[C_e T_e - D_e (T_E - T_P)] - [C_w T_w - D_w (T_P - T_W)] = 0$$

A face-hőmérsékleteket lineárisan interpoláljuk:

$$\left[ \frac{C_e}{2} (T_P + T_E) - D_e (T_E - T_P) \right] - \left[ \frac{C_w}{2} (T_W + T_P) - D_w (T_P - T_W) \right] = 0$$

Felírjuk a P cellára vonatkozó lineáris egyenletet:

$$A_P T_P = A_W T_W + A_E T_E$$

$A_W$	$A_E$	$A_P$
$D_w + C_w / 2$	$D_e - C_e / 2$	$A_w + A_e$
$D_e + D_w + C_e / 2 - C_w / 2 = A_E + A_w + C_e - C_w$		$= 0$ (kontinuitás)

Súlyozott átlagnak is tekinthető. Ha az egyíthatók pozitívak, akkor az átlagolás nem vezet be extrémumot P pontban.

### Az algebrai egyenletrendszer megoldása

Pi. 4 cella esetén az alábbi:

TC()

TE()

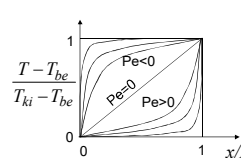
TA()

TD()

$$\begin{bmatrix} -A_{1,P} & A_{1,E} & 0 & 0 \\ A_{2,W} & -A_{2,P} & A_{2,E} & 0 \\ 0 & A_{3,W} & -A_{3,P} & A_{3,E} \\ 0 & 0 & A_{4,W} & -A_{4,P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,P} \\ T_{2,P} \\ T_{3,P} \\ T_{4,P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{1,W}T_{be} \\ 0 \\ 0 \\ -A_{4,E}T_{ki} \end{bmatrix}$$

Megoldás: Gauss-eliminációval.  
 n ismeretlenes, tridiagonál mátrixú egyenletrendszer esetében csak 2 n művelet (egy ciklus előre és egy vissza): Thomas-algoritmus.  
 Sajnos 2D és 3D áramlások esetében nem tridiagonál mátrixú.

### Az analitikus megoldás



$$\frac{T - T_{be}}{T_{ki} - T_{be}} = \frac{e^{\rho u x c_v / \lambda} - 1}{e^{\rho u L c_v / \lambda} - 1}$$

Pe (Peclet-szám)

### Példaprogram

- Hasonló megoldást kapunk több, különböző paraméter változatra.  $Pe = \frac{\rho u L}{\lambda / c_v}$
- Hiba N<sup>2</sup>-el arányosan csökken. Másodrendű pontosság.  $Re = \frac{\rho u L}{\mu}$
- Néha oszcillál. Mikor kezd oszcillálni?  $Pe_{\Delta x} = \frac{\rho u \Delta x}{\lambda / c_v} > 2$

### UDS séma

W    P    E

•    x    •

u >= 0 esetén:  $T_w = T_W, T_e = T_P$

u < 0 esetén:  $T_w = T_P, T_e = T_E$

$$A_W T_W + A_E T_E = A_P T_P$$

$A_W$	$A_E$	$A_P$
$Max(C_w, 0) + D_w$	$Max(-C_e, 0) + D_e$	$A_W + A_E$

További numerikus kísérletek...

A pontosság elsőrendűre csökken.

### Mesterséges „diffúzió” (1)

A numerikus hibának egy fontos fajtája. A pontatlan interpolációból adódott:

P    e    E

•    x    •

Δx

$$T_e = T_p + \frac{\Delta x}{2} \frac{dT}{dx} + o(\Delta x)$$

ezt elhagyjuk

$$F_e = C_e T_p + C_e \frac{\Delta x}{2} \frac{dT}{dx} - D_e (T_e - T_p)$$

Olyan mintha megnöveltük volna a hővezetést! Írjuk be T deriváltjának diszkrét közelítését:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_e - T_p}{\Delta x}$$

$$F_e = C_e T_p + \frac{C_e}{2} (T_e - T_p) - D_e (T_e - T_p)$$

$$D_e = \frac{\lambda}{c_v \Delta x} \rightarrow \frac{\lambda_{mest}}{c_v \Delta x} = \frac{\rho u}{2} \rightarrow \lambda_{mest} = \frac{\rho u c_v \Delta x}{2}$$

### Transzportivitás

Fizikai szempontból: növekvő Pe esetén egyre T<sub>E</sub> hatása egyre kevésbé érvényesül T<sub>P</sub>-re.

Tudja ezt a numerikus séma?

$$A_E = D_e - C_e / 2$$

$$C_e = \rho u \quad D_e = \frac{\lambda}{c_v \Delta x} \quad Pe = \frac{\rho u L}{\lambda / c_v}$$

$$A_E = \frac{D_e}{2} \left( 2 - \frac{C_e}{D_e} \right) = \frac{D_e}{2} \left( 2 - \frac{\rho u \Delta x}{\lambda / c_v} \right) = \frac{D_e}{2} (2 - Pe_{\Delta x})$$

Cella Peclet-szám: a konvektív és konduktív hőfluxusok hányadosa.  
 Pe<sub>Δx</sub> > 2 esetén A<sub>E</sub> nagysága újra nőni kezd.  
 A stabilitási probléma is ilyen esetekben lép fel.

### HDS séma Spalding (1972)

Az a fontos, hogy az „A” együtthatók ne legyenek negatívak.  
 $Pe_{\Delta x}$  értéke alapján számoljuk a felületi fluxust:

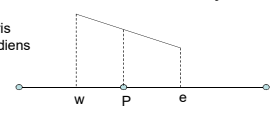
$Pe_{\Delta x} \leq -2 \quad F_e = C_e T_E$   
 $-2 < Pe_{\Delta x} \leq 2 \quad F_e = C_e \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{Pe_{\Delta x}} \right) T_P + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{Pe_{\Delta x}} \right) T_E \right]$   
 $2 < Pe_{\Delta x} \quad F_e = C_e T_P$       Legalább kis  $Pe_{\Delta x}$  esetén másodrendű.

$A_W T_W + A_E T_E = A_P T_P$

$A_W$	$A_E$	$A_P$
$Max \left( C_w, \left[ D_w + \frac{C_w}{2} \right], 0 \right)$	$Max \left( -C_e, \left[ D_e - \frac{C_e}{2} \right], 0 \right)$	$A_W + A_E$

### SOU séma másodrendű szélfelületi súlyozás

Cellán belül lineáris interpoláció a gradiens segítségével:



Pl. a cellafali hőmérséklet:  $T_e = T_P + \frac{dT}{dx} \Big|_P \frac{\Delta x}{2}$

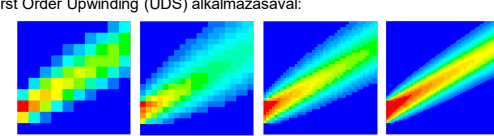
A gradiens meghatározása két lépésben:

1. lépés  $\frac{dT}{dx} \Big|_P = \frac{T_e' - T_w'}{\Delta x} \quad T_e' = \frac{T_P + T_E}{2}, \quad T_w' = \frac{T_W + T_P}{2}$

2. lépés  $\frac{dT}{dx} \Big|_P$  értékét úgy korlátozzuk, hogy ne vezethessen be extrémumokat. Gradiens limiterek: C Hirsch.

### Oldalirányú mesterséges diffúzió 2D áramlás esetén

First Order Upwinding (UDS) alkalmazásával:



Second Order Upwinding (SOU) alkalmazásával:

