Turbulencia és modellezése III.

Balogh Miklós

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Áramlástan Tanszék

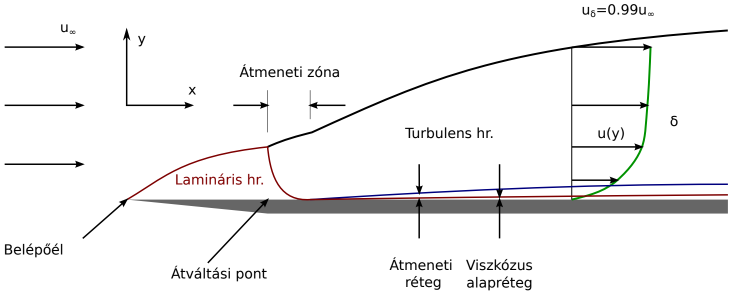
2017.

Vázlat

Fali peremfeltételek

- Mind k-nak és ε-nak vagy ω-nak szüksége van peremfeltételekre a falnál
- Mielőtt bevezetnénk a peremfeltételeket és a közelítő peremkezelési technikákat, pár dolgot érdemes összefoglalni a fali határrétegek elméletéről

Határréteg szerkezete



Csatorna áramlás

Jellemzők

- Áramlás két végetelen síklap között $\Rightarrow$ teljesen kialakult
- Csatorna fél szélesség : δ
- Átlag sebesség: $U_b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \overline{u} \, \mathrm{d}y$
- Reynolds szám: $Re_b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U_b 2\delta}{\nu}$
- $Re_b > 1800$ jelenti a turbulenciát

Csatorna áramlás (folyt.)

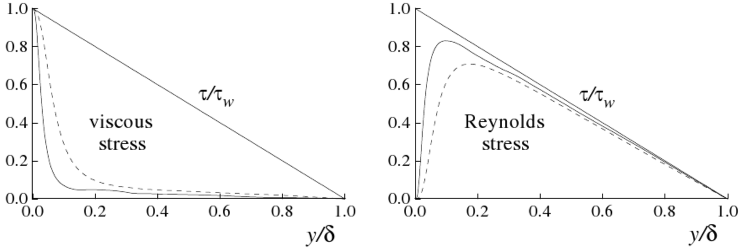
Áramlás irányú átlagolt mozgásegyenlet

$$0 = \underbrace{\nu \mathsf{d}^2_{y^2}\overline{u}}_{\mathsf{d}_y\tau_l} - \underbrace{\mathsf{d}_y\overline{u'v'}}_{\mathsf{d}_y\tau_t} - \frac{1}{\rho}\partial_x\overline{p} \tag{1}$$

A nyomásgradienssel ($\mathsf{d}_x\overline{p_w}$) a két csúsztató feszültség tart egyensúlyt: $\tau = \tau_l + \tau_t$
Az eloszlás lineáris

$$\tau(y) = \tau_w\left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \tag{2}$$

Csatorna áramlás (folyt.)
A kétféle csúsztató feszültség



A két csúsztató feszültség

- A viszkózus feszültség a domináns a falnál
- A turbulens feszültség domináns a faltól távol
- Mindkét feszültség fontos a közbülső tartományban

A fali áramlás két léptéke

Definíciók

- Súrlódási sebesség: $u_\tau \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{-\frac{\delta}{\rho}\mathrm{d}_x \overline{p_w}}$
- Súrlódási Reynolds szám: $Re_\tau \overset{\text{def}}{=} \frac{u_\tau \delta}{\nu} = \frac{\delta}{\delta_\nu}$
- viszkózus hossz lépték: $\delta_\nu \overset{\text{def}}{=} \frac{u_\tau}{\nu}$

Az általános faltörvény jellemezhető:

$$\mathrm{d}_y \overline{u} = \frac{u_\tau}{y} \Phi\left(\frac{y}{\delta_\nu}, \frac{y}{\delta}\right) \tag{3}$$

Φ egy később meghatározandó függvény!

Feltehető, hogy csak a fali léptékeknek van szerepe a fal közelében

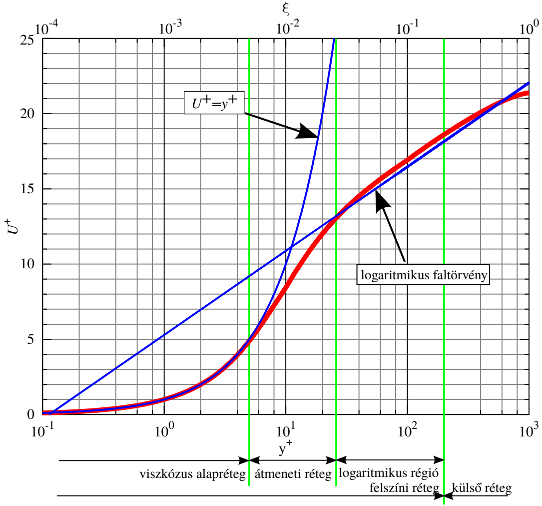
$$\mathrm{d}_y \overline{u} = \frac{u_\tau}{y} \Phi_I \left(\frac{y}{\delta_\nu} \right) \qquad (y \ll \delta) \tag{4}$$

Fali dimenziótlanítás $\square^+$

$$u^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overline{u}}{u_\tau} \tag{5}$$

$$y^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{y u_\tau}{\nu} \tag{6}$$

Határréteg sebességmegoszlása



Faltörvény
Sebesség

Viszkózus alapréteg

- Csak τ_l számít
- $u^+ = y^+$
- $y^+ < 5$ esetén

Logaritmikus réteg

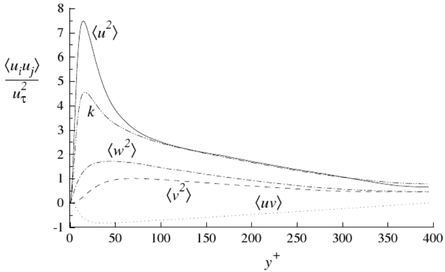
- A viszkozitás nincs benne a skálázásban
- $\Phi_I = \frac{1}{\kappa}$ amennyiben $y \ll \delta$ és $y^+ \gg 1$
- Log-függvény: $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$
  - Mérések alapján: $\kappa \approx 0.41$ és $B \approx 5.2$

Külső réteg

- Φ csak y/δ-tól függ
- Az áramlások numerikus szimulációja során ki szeretnénk számolni! $\Rightarrow$ Nem kell vele foglalkozni.

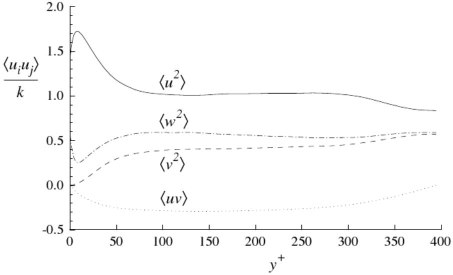
Reynolds feszültség tenzor a falnál

u_τ skálázás



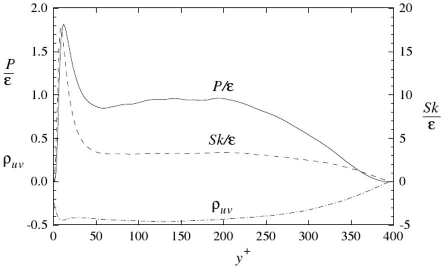
Éles csúcs $y^+ = 20$-nál

Reynolds feszültség tenzor a falnál
k skálázás



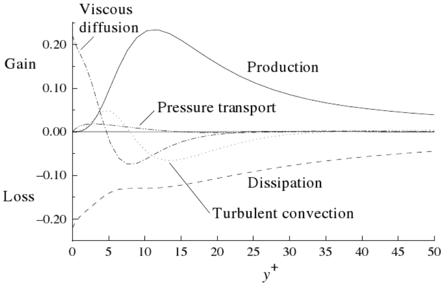
Egy állandó tartomány figyelhető meg a logaritmikus törvény zónájában.

TKE mérleg a falnál



- $\mathcal{P}/\varepsilon \approx 1$ a logaritmikus törvény zónájában
- $\mathcal{P}/\varepsilon \approx 1.8$ a fal közelében

TKE mérleg a falnál



- A turbulencia nagyrészt az átmeneti tartományban keletkezik ($5 < y^+ < 30$)
- A turbulencia viszkózusan diffundál a falhoz
- A turbulencia erősen disszipálódik a falnál
- Következmény: $\varepsilon = \nu \mathrm{d}^2_{y^2} k \quad$ ha $y = 0$

Ebben a módszerben a teljes határréteget numerikusan felbontjuk

Mikor használjuk?

- Alacsony Reynolds számú áramlásoknál, ha a felbontásra lehetőség van
- Ha a határréteg nem egyszerű, azaz nem írható le faltörvénnyel

Hogyan csináljuk?

- Használjunk olyan turbulencia modellt amely figyelembe veszi a fal közeli viszkózus hatásokat is
- Használjunk megfelelő fali felbontást ($y^+ < 1$)

Ebben a megközelítésben az első cella magába foglalja a faltörvényt

Mikor alkalmazzuk?

- Magas Reynolds számú áramlások esetén, ha lehetetlen felbontani a fal közeli réteget
- Ha a határréteg egyszerű, azaz a faltörvény jól leírja

Hogyan csináljuk?

- Használjunk olyan turbulencia modellt amely tartalmaz faltörvényes peremfeltételt
- Használjunk megfelelő fali felbontást $(30 < y^+ < 300)$

Falfüggvények RANS-hoz a gyakorlatban (U, ν_t)

- Sebesség a falon:
  - Dirichlet PF, tapadás törvénye: $U\left(y=0\right)=0$
- Turbulens viszkozitás (a fal melletti első cellában):
  - Csúsztatófeszültség (surlódási sebesség):

$$\tau_w = u_\tau^2 = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}$$

  - Lamináris eset ($y^+ \leq y^+_{lam}$):

$$U^+ = y^+ \rightarrow \nu_t = 0$$

  - Turbulens eset ($y^+ > y^+_{lam}$):

$$U^+ = \kappa \ln\left(Ey^+\right) \rightarrow \nu_t = \nu\left(\frac{\kappa y^+}{\ln\left(Ey^+\right)} - 1\right)$$

Falfüggvények RANS-hoz a gyakorlatban (k, ϵ, P_k)

- TKE (a falon):
  - Neumann PF: $\frac{\partial k}{\partial y} = 0$
- TKE disszipáció (a fal melletti első cellában):
  - Egyensúlyi egyszerűsítés:

$$P_k = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = \epsilon$$

  - Implementáció:

$$\epsilon = \frac{C_\mu^{0.75} k^{1.5}}{\kappa y} \text{ és } P_k = (\nu + \nu_t) \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| \frac{C_\mu^{0.25} k^{0.5}}{\kappa y}$$

A két módszer keverékét fejlesztették ki

- hogy a mérnöknek ne kelljen foglalkozni a fali felbontással
- általában a két módszer keverékére van szükség, attól függően, hogy a számítási tartomány mely pontjában vagyunk

Felbontásbeli követelmények

Bármelyik módszer esetén a határréteg vastagságot $(\delta) \approx 20$ cellával kell fölbontani (szokásos másodrendű megoldó esetén), hogy megfelelő pontosságot érjünk el

Legyünk tisztában mit használunk (képességek különbözőek)!

Nagy örvény szimuláció

A modellezés és a szimuláció közötti különbség

Szimuláció

A szimulációban a turbulencia jelenségét felbontjuk a numerikus módszerrel, oly módon, hogy megoldjuk a leíró egyenleteket

Modellezés

A turbulencia modellezésében a turbulencia hatásait elméleti és kísérleti eredményekre alapozva modellezzük

A számításban a turbulenciának egy redukált leírását adjuk

Közvetlen numerikus szimuláció (DNS)

A NS egyenletet (amely teljesen leírja a turbulencia jelenségét) numerikusan megoldjuk

Nehézségek

- Azok a skálák ahol a disszipáció lezajlik nagyon kicsik
  - A legkisebb léptékek mérete Reynolds szám függő
- A szimuláció csak akadémiai esetekre lehetséges (pl.: HIT 64 $\cdot 10^9$ cellát használva)

A LES koncepciója

A RANS és a DNS közötti kompromisszum

- RANS: lehetséges, de pontatlan
- DNS: pontos, de lehetetlen

A nagy léptékeket fontos szimulálni

- A turbulencia nagy léptékei peremfeltétel függőek, ezért ezeket szimulálni kell
- A turbulencia kis léptékei többé-kevésbé univerzálisak és így ‘könnyen’ modellezhetőek
- A kis léptékek eltávolítása a szimulációból jelentősen csökkenti a számítási igényt

Szűrés

Hogy vezessük le az egyenleteket?
Hogy válasszuk szét a nagy és a kis léptékeket?

Térbeli szűrés, simítás magfüggvényt használva

$$\langle \varphi \rangle (x_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V G_\Delta(r_i; x_j) \quad \varphi(x_j - r_i, t) \mathrm{d}r_i \tag{7}$$

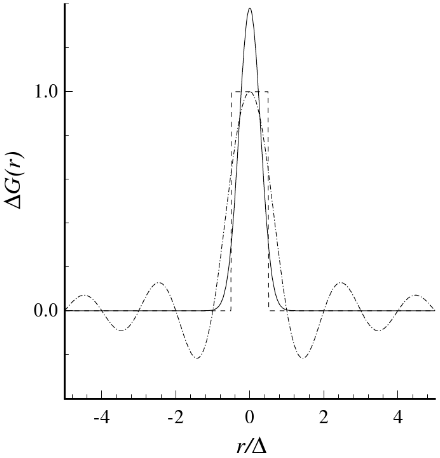
Szűrő mag

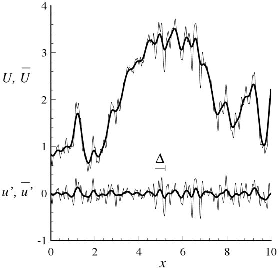
- G_Δ a szűrő mag, melynek tipikus mérete Δ.
- G_Δ kompakt tartójú (az értelmezési tartomány azon része, ahol az érték nem nulla zárt) az első változójában
- Hogy egy konstans mező szűrtje önmaga legyen igaznak kell, hogy legyen:

$$\int_V G_\Delta(r_i; x_j)\mathrm{d}r_i = 1 \tag{8}$$

- Ha $G_\Delta(r_i; x_j)$ homogén a második változójában és izotrop az első változójában akkor $G_\Delta(|r_i|)$ egyváltozós függvény

Szűrő mag
Példák

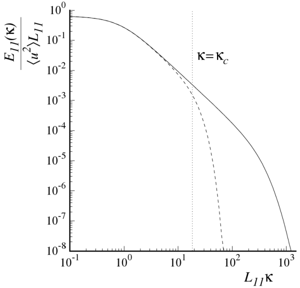




Ingadozás

$$\widetilde{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi - \langle\varphi\rangle \qquad (9)$$

$\langle\widetilde{\varphi}\rangle \neq 0$: egyik különbség a Reynolds átlagoláshoz képest



Emlékeztető: a vágási hullámszám (κ_c), az ami alatt modellezésre szükség van

Szűrt egyenletek

- Ha a korábban definiált (homogén, izotrop) szűrőt használjuk
- Az átlagolás és a deriválás kommutatív (felcserélhető)

$$\partial_i \langle u_i \rangle = 0 \tag{10}$$

$$\partial_t \langle u_i \rangle + \langle u_j \rangle \partial_j \langle u_i \rangle = -\frac{1}{\rho} \langle p \rangle + \nu \partial_j \partial_j \langle u_i \rangle - \partial_j \tau_{ij} \tag{11}$$

- 3D (mivel a turbulencia 3D))
- időfüggő (mivel a legnagyobb örvények is időfüggőek)

Hálóméret alatti feszültségek

τ_{ij}-t hálóméret alatti (Sub-Grid Scale=SGS) feszültség-nek hívják még abból az időből amikor a szűrés közvetlenül a hálóhoz volt rendelve

$$\tau_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \tag{12}$$

- A szűrt léptékek hatását reprezentálja
- Feszültség tenzor formája van
- Disszipatívnak kell lennie, hogy kifejezze a kis léptékeken lévő disszipációt

Örvény viszkozitás modell

- Ugyanaz mint RANS-ban
- $$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -2\nu_t \langle s_{ij} \rangle \qquad (13)$$
- A módszer itt (LES) pontosabb, mivel a kisebb léptékek univerzálisabbak (mint a nagyok amelyeket a RANS-ban modellez)
- Disszipatív ha $\nu_t > 0$.

Szmagorinszki model

- $$\nu_t = (C_s \Delta)^2 |\langle S \rangle| \quad (14)$$
- $$|\langle S \rangle| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2 s_{ij} s_{ij}} \quad (15)$$
- C_s Szmagorinszki konstans, amit meg kell határozni
  - A turbulencia spektrális elmélete alapján
  - valós áramlási esetek validálásával
- Δ-t elő kell írni
  - Meghatározza a számítási igényt (ha túl kicsi akkor magas)
  - Meghatározza a pontosságot (alacsony ha a szűrő túl nagy)
  - Az mozgási energia 80%-nak felbontása egy jó kompromisszum

Méret hasonlóság

Méret hasonlóság modell

Feltételezzük, hogy a levágott kis léptékek hasonlóak a megtartott nagyokhoz!
Egy logikus modell:

$$\tau_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle u_i\rangle \langle u_j\rangle\rangle - \langle\langle u_i\rangle\rangle \langle\langle u_j\rangle\rangle \tag{16}$$

Tulajdonságok

- Nem elég disszipatív
- Alkalmas csúsztatófeszültségeket ad (tapasztalatok alapján)
- Logikus kombinálni a Szmag. modellel!

Dinamikus módszer

- Az ötlet azonos a mérethasonlóság modellével
- Az elmélet bonyolultabb
- Bármely modell dinamikussá tehető
- A dinamikus Szmagorinszki széles körben használt (ötvözi az előnyöket)

Numerikus szempontok

- A térbeli numerikus sémákat a határaiig használjuk (hullámhossz = cella méret), amennyiben a $\Delta = h$ ($h =$ cellaméret)
- A numerikus sémák jelentősen befolyásolják az eredményt
- Hálófüggetlenség h/Δ függvényként: praktikusan lehetetlen elvégezni

- Periodicitást használunk a végtelen tartomány modellezésére
- A periodicitás hosszát a turbulencia hosszléptéke adja meg

Peremfeltételek

Belépés

- Sokkal bonyolultabb mint RANS-nál
- A turbulens struktúrákat kell visszaadni
  - Örvényeket kell szintetizálni
  - Külön előzetes számítás, ami ‘igazi’ turbulenciát ad

Peremfeltételek
Fal

Falaknál a tapadás törvénye alkalmazható, amennyiben megfelelő felbontást használunk (igazi LES)

A szűkséges fali felbontás

$$y^+ \approx 1 \tag{17}$$
$$x^+ \approx 50 \tag{18}$$
$$z^+ \approx 10 - 20 \tag{19}$$

- Hasonlóan felhasználható, mint RANS esetén.
- Szerencsés esetben pontosabb mint a RANS, de rossz használat esetén sokkal pontatlanabb!

Eredmények

Időfüggő struktúrák

- Az örvények mozgását követhetjük.
- Lehetőséget teremt a turbulencia befolyásolására

Köszönöm a figyelmet!