Turbulencia és modellezése II.

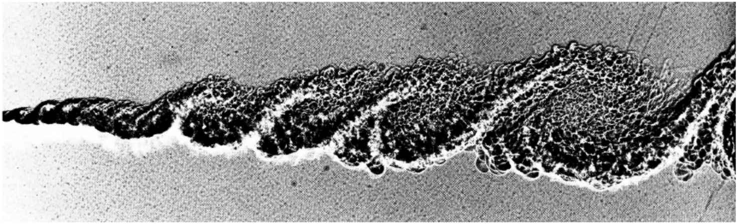
Balogh Miklós

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Áramlástan Tanszék

2017.

A turbulencia sok léptéke

A turbulencia különböző skálái egy keveredési rétegben sűrűség változással láthatóvá téve



Cél: Találjunk összefüggést a különböző léptékű turbulencia tulajdonságainak leírására

Mozgási (kinetikus) energia

Mozgási energia:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} u_i u_i \tag{1}$$

A Reynolds felbontása:

$$E = \frac{1}{2} u_i u_i = \frac{1}{2} (\overline{u_i}\,\overline{u_i} + 2u_i'\overline{u_i} + u_i' u_i') \tag{2}$$

A Reynolds átlaga:

$$\overline{E} = \underbrace{\frac{1}{2}(\overline{u_i}\,\overline{u_i})}_{\hat{E}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\overline{u_i' u_i'})}_{k} = \hat{E} + k \tag{3}$$

- Az átlagos áramlás mozgási energiája: $\hat{E}$
- A turbulencia mozgási energiája: k (Turbulens Kinetikus Energia, TKE)

A Richardson-féle energia kaszkád

Lewis Fry Richardson (1920):

„Big whirls have little whirls,
that feed on their velocity;
and little whirls have lesser whirls,
and so on to viscosity."

„Nagy örvény kisebbet plántál,
melyet sebességével táplál;
majd az még kisebbet szülvén,
viszkozításba tűnik szürkén."

Magas Re számú áramlást tekintünk

- Az áramlás tipikus sebessége $\mathcal{U}$
- Az áramlás tipikus hosszléptéke $\mathcal{L}$
- A vonatkozó Reynolds szám ($\mathcal{R}e = \frac{\mathcal{U}\mathcal{L}}{\nu}$) nagy

A turbulencia különböző méretű örvényekből áll

Az örvények minden osztályának van:

- hosszléptéke: l
- sebesség léptéke: $u(l)$
- idő léptéke: $\tau(l) = l/u(l)$

A Richardson-féle energia kaszkád
A nagy léptékek

Legnagyobb örvények jellemzői

- méret $l_0 \sim \mathcal{L}$
- sebesség $u_0 = u_0(l_0) \sim u' = \sqrt{2/3k} \sim \mathcal{U}$

$\Rightarrow Re = \frac{u_0 l_0}{\nu}$ szintén magas

A nagy örvények darabolódása

- A nagy Re szám kis mértékű viszkózus stabilizációt jelent
- A nagy örvények instabilak
- A nagy örvények kisebbekre esnek szét

A Richardson energia kaszkád

A kis léptékek felé

Tehetetlenségi kaszkád

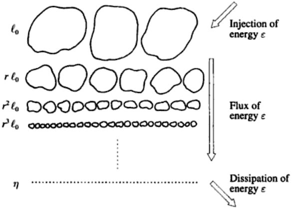
- Amíg $Re(l)$ nagy a tehetetlenségi erők dominálnak és a darabolódás folytatódik
- Kis léptékeken, ahol $Re(l) \sim 1$ a viszkozitás kezd fontossá válni
  - Az örvények mozgási energiája hővé disszipál

A Richardson energia kaszkád

A kis és a nagy méretek közötti kapcsolat

A disszipáció megegyezik a produkcióval

- A disszipációt ε-al jelöljük
- A kaszkád miatt a nagy léptéken lévő mozgásokkal jellemezhető
- Disszipáció: $\varepsilon \sim \frac{\text{mozg. energia}}{\text{időlépték}}$ a nagy léptékeken
  - Képlettel: $\varepsilon = \frac{u_0^2}{l_0/u_0} = \frac{u_0^3}{l_0}$



Az NS szimbólum

A levezetések leíráshoz érdemes bevezetni a következő NS szimbólumot:

$$NS(u_i) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\partial_i p + \nu \partial_j s_{ij}}_{\partial_j t_{ij}} \tag{4}$$

ahol: $s_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ az (szimmetrikus=s) alakváltozás része a derivált tenzornak $\partial_j u_i$.

k transzport egyenlete
Definíciók 2.

Ismételjük meg a Reynolds egyenlet levezetését!

$$\overline{NS(\overline{u_i} + u_i')} \tag{5}$$

$$\partial_t \overline{u_i} + \overline{u_j}\, \partial_j \overline{u_i} = \partial_j \underbrace{\left[-\frac{1}{\rho} \overline{p}\, \delta_{ij} + \nu \overline{s}_{ij} - \overline{u_i' u_j'} \right]}_{\overline{T_{ij}}} \tag{6}$$

A TKE egyenlete

Vegyük $\overline{(NS(u_i) - \overline{NS(u_i)}\,)u'_j(NS(u_j) - \overline{NS(u_j)}\,) + u'_i}$ nyomát

$$\partial_t k + \overline{u_j}\,\partial_j k = \underbrace{-a_{ij}\overline{s_{ij}}}_{\text{Produkció}} + \underbrace{\partial_j \left[\overline{u'_j\left(\frac{p'}{\rho} + k'\right)} - \nu\overline{u'_i s'_{ij}} \right]}_{\text{Transzport}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{Disszipáció}} \tag{7}$$

- Disszipáció: $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} 2\nu\overline{s'_{ij}s'_{ij}}$
- Anizotrópia tenzor: $a_{ij} \overset{\text{def}}{=} \overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{3}\underbrace{\overline{u'_l u'_l}}_{2k}\delta_{ij}$

  (A Reynolds feszültség tenzor deviátor része)

Produkció

- Kifejezés: $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}\overline{s_{ij}}$
- A mozgási energia transzferje az átlagos áramlástól a turbulenciába
  - Ugyanez a tag jelenik meg ellentétes előjellel az átlagsebesség mozgási energiájának egyenletében
- Ez a mechanizmus táplálja az energiát a Richardson kaszkádba
- A nagy skálákon történik

A TKE egyenlet
A tagok jelentése (folyt.)

Disszipáció

- Kifejezés: $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} 2\nu\overline{s'_{ij}s'_{ij}}$
- A turbulens kinetikus (mozgási) energia hővé alakulása
  - A viszkózus feszültségek munkája a kis léptékeken (s'_{ij})
- Ez az energia elvonási mechanizmusa a Richardson kaszkádból
- A kis léptékeken történik

$\mathcal{P} = \varepsilon$ ha a turbulencia homogén (izotrop), mint a Richardson kaszkádban

A TKE egyenlet

A tagok jelentése (folyt.)

Transzport

- Kifejezés: $\partial_j \left[\overline{u'_j \left(\frac{p'}{\rho} + k' \right)} - \nu \overline{u'_i s'_{ij}} \right]$
- A turbulens kinetikus energia térbeli transzportja
  - A kifejezés divergenciás alakú ($\partial_j \Box_j$)
  - A divergencia felületi integrállá alakítható (G-O tétel)

A RANS modellezés ötlete

- A Reynolds átlagolt NS egyenletet oldjuk meg az átlagolt változókra $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{p})$
- A Reynolds feszültség tenzor $\overline{u_i' u_j'}$ ismeretlen, így modellezni kell
- A modellezésnek az egyébként is felhasznált mennyiségeket $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{p})$ kellene használnia

Hasznosság

- Ha az átlagolt mennyiségek hasznosak a mérnökök számára
- azaz ha az ingadozások nem érdekesek "csak" a hatásuk az átlag áramképre
- A modellezése megfelelően pontos

Örvény viszkozitás modellezés

Az ötlet

- A turbulencia hatása mint a mozgó molekulák hatása a kinetikus gázelméletben
- Az impulzus csere a különbözős sebességgel mozgó rétegek között a merőlegesen mozgó molekulák által jön létre
- A viszkózus feszültséget így számoljuk: $\Phi_{ij} = 2\nu S_{ij}$

Örvény viszkozitás modell (folyt.)

Egyenletekben...

- Csak a deviátor részt modellezzük
- A nyom (k) beolvasztható a nyomásban (modifikált nyomás), és nincs szükség a modellezésére
- A modifikált nyomást használjuk a nyomáskorrekciós módszerben a kontinuitás kielégítése céljából (lásd: nyomásra vonatkozó Poisson egyenlet)

$$\overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = -2\nu_t \overline{S_{ij}} \tag{8}$$

Örvény viszkozitás

A viszkozitás a hosszlépték (l') és a sebesség ingadozás lépték (u') szorzatával arányos

- A hosszléptéknek arányosnak kell lennie azzal a hosszal, amit a folyadék impulzusát megtartva megtesz
- A sebesség ingadozási léptéknek a mozgó folyadékrészek által okozott ingadozáshoz kell kötődnie

$$\nu_t \sim l'u' \tag{9}$$

Frissebb eredmények melyek a koncepciót támasztják alá

A turbulencia koherens struktúra szemlélete megmutatta, hogy vannak folyadékrészek (örvények) amelyek mozgásuk során megtartják egy ideig tulajdonságaikat

Két egyenletes modellek

- A hossz (l') és a sebességingadozás lépték (u') az áramlás és nem a folyadék tulajdonsága, így helytől és időtől függenek
- PDE-kre van szükség, hogy a skálák fejlődését leírhassuk

A léptékekre vonatkozó kritériumok

- Jól definiáltnak kell lennie
- Az alakulásra vonatkozó egyenleteket kell fejleszteni
- Numerikusan kezelhetőnek kell lennie
- Könnyen mérhetőnek kell lennie, hogy kísérleti validációra lehetőség legyen

k-ε modell

Sebesség ingadozás lépték

- A TKE jellemzi a sebesség ingadozást
- Izotrop (nincs kitüntetett irány)

$$u' \sim \sqrt{k} \tag{10}$$

Hossz lépték

- Az integrál hosszlépték jól definiált (lásd: korrelációk)
- Nem könnyű közvetlen egyenletet fejleszteni
- A hosszléptéket a disszipáción keresztül számoljuk

Emlékeztető: $\varepsilon = \frac{u_0^3}{l_0} \Rightarrow l' \sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$

Az örvény viszkozitásra vonatkozó egyenlet

$$\nu_t = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{11}$$

C_ν konstanst, melyet elmélet alapján vagy kísérletből kell meghatározni...

A helyzet...?

- Két ismeretlenünk (k, ε) van az egy (ν_t) helyett

k modell egyenlet

k egyenletet levezettük, de vannak benne ismeretlenek:

$$\partial_t k + \overline{u_j}\,\partial_j k = \underbrace{-a_{ij}\overline{s_{ij}}}_{\text{Produkció}} + \underbrace{\partial_j \left[\overline{u'_j \left(\frac{p'}{\rho} + k' \right)} - \nu \overline{u'_i s'_{ij}} \right]}_{\text{Transzport}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{Disszipáció}} \tag{12}$$

Produkció

A produkció közvetlenül számítható, ha felhasználjuk az örvényviszkozitás hipotézist

$$\mathcal{P} = -a_{ij}\overline{S_{ij}} = 2\nu_t \overline{S_{ij}}\,\overline{S_{ij}} \tag{13}$$

k modell egyenlet

Disszipáció

Különálló egyenletet vezetünk le

Transzport $\partial_j T_j$

- Közelíthető a gradiens hipotézis segítségével

$$T_j = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \partial_j k \tag{14}$$

- σ_k egy Schmidt szám típusú mennyiség mely átskálázza ν_t-t, hogy megkapjuk a szükséges diffúziós tényezőt
    - Kísérletileg meghatározandó

A k modell egyenlet összefoglalva

$$\partial_t k + \overline{u_j}\,\partial_j k = 2\nu_t \overline{S_{ij}}\,\overline{S_{ij}} - \varepsilon - \partial_j\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\partial_j k\right) \qquad (15)$$

- Minden közvetlenül számítható, kivéve ε
- A bal oldal k lokális és konvektív változása
  - A konvekció egy fontos tulajdonsága a turbulenciának (így megfelelően kezeljük)

ε modell egyenlete

- Feltesszük, hogy transzport egyenlet írja le
- Levezetés helyett, a k egyenleten alapul

$$\partial_t \varepsilon + \overline{u_j}\,\partial_j \varepsilon = C_{1\varepsilon}\mathcal{P}\frac{\varepsilon}{k} - C_{2\varepsilon}\varepsilon\frac{\varepsilon}{k} - \partial_j\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\partial_j\varepsilon\right) \qquad (16)$$

- A produkció és disszipációkat átskálázzuk ($\frac{\varepsilon}{k}$) és „feljavítjuk” állandó együtthatókkal ($C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$)
- Gradiens diffúzióval modellezzük a transzportot Schmidt számot használva σ_ε
- Az ε nem túlságosan pontos! :)

A standard k-ε modell állandói

$$C_\nu = 0,09 \tag{17}$$
$$C_{1\varepsilon} = 1,44 \tag{18}$$
$$C_{2\varepsilon} = 1,92 \tag{19}$$
$$\sigma_k = 1 \tag{20}$$
$$\sigma_\varepsilon = 1,3 \tag{21}$$

Példák az állandókra

Homogén turbulencia

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_t k &= \mathcal{P} - \varepsilon && (22)\\
\mathrm{d}_t \varepsilon &= C_{1\varepsilon}\mathcal{P}\frac{\varepsilon}{k} - C_{2\varepsilon}\varepsilon\frac{\varepsilon}{k} && (23)
\end{aligned}
$$

Mivel $\mathcal{P} = 0$, az egyenlet rendszert könnyen meg lehet oldani:

- $k(t) = k_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-n}$
- $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-n-1}$
- $n = \frac{1}{C_{2\varepsilon} - 1}$
- n „könnyen” mérhető

k-ω modell

- k egyenlet ugyanaz
- $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{C_\nu}\frac{\varepsilon}{k}$ Specifikus disszipáció, turbulens frekvencia (ω)
- az ω egyenlet hasonló a ε egyenlethez
  - transzport egyenlet produkcióval, disszipációval és transzporttal a jobb oldalon
- az ω egyenlet jobb a falak közelében
- az ε egyenlet jobb a távol-térben

$\Rightarrow$ az SST modell keveri a két fajta hosszlépték egyenletet a faltól való távolság függvényében

A szükséges peremfeltételek

A turbulencia modell PDE-ei transzport egyenletek hasonlóan az energia egyenlethez

- Lokális változás
- Konvekció
- Forrás tagok
- Transzport tagok

Belépő perem feltételek

Turbulencia II.

Balogh Miklós

- Neumann, Dirichlet vagy kevert típusú peremfeltételeket lehet általában használni
- A belépés általában Dirichlet típusú (adott érték)

Végső cél

- Hogyan adjuk meg k és ε vagy ω értékét a belépő peremeken?

Olyan mennyiségeket használjunk, amit könnyű becsülni

Fejlesszünk egyenletet, amellyel k-t és ε-t vagy ω-t lehet számolni olyan mennyiségekből, amelyek mérnökök által becsülhetőek

Turbulencia intenzitás

$$Tu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u'}{\overline{u}} = \frac{\sqrt{2/3k}}{\overline{u}}$$

Belépő peremfeltételek közelítése

Hossz lépték

Hossz lépték

$l' \sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon$

- Mérésből (Taylor hipotézist felhasználva)
- Faltörvény alapján
- Becsülhető hidraulikus átmérőből $l \approx 0.07 d_H$

A belépő peremfeltételek fontossága

Ha a turbulencia kormányozza az áramlást

- Példa: Atmoszferikus áramlás, ahol a geometria nagyon egyszerű (sík táj, domb), a turbulencia bonyolult
  - az áramlás térbeli történelmén keresztül
  - érdes felület felett
  - felhajtó erő is szerepet játszik
- A belépő turbulenciára való érzékenységet ellenőrizni kell
  - a szimuláció bizonytalanságát fel kell ismerni
  - mérést is használni kell
  - a szimulációs tartományt fel-vízi oldalon ki kell egészíteni

Kérdések

Köszönöm a figyelmet!