III. előadás

Dr. Balogh Miklós

2015. szeptember 30.

A mozgásmennyiség megváltozása (ism.)

Newton II. törvénye: Egy pontszerű test a gyorsulása azonos irányú a testre ható F erővel, nagysága egyenesen arányos az erő nagyságával, és fordítottan arányos a test m tömegével:

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.$$

Állandó tömeg esetén:

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Másképpen megfogalmazva, a mozgásmennyiség megváltozása, arányos a ható erők eredőjével. Az áramlástanban ezt a törvényt folyadékokra, illetve gázokra alkalmazzuk. Vegyünk egy egyszerű példát: Szűkülő keresztmetszetű csőhöz kapcsolódó csap nyitása. A sebesség teljes megváltozása felbontható lokális és konvektív (odébbáramlási) gyorsulásra:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v},$$

ahol $\boldsymbol{D}$ a derivált-tenzor.

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

A derivált-tenzort $\boldsymbol{v}$-vel szorozva:

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z \\ \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_z \\ \frac{\partial v_z}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z \end{bmatrix}.$$

A derivált-tenzor felbontásával megmutatható, hogy a konvektív gyorsulás

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{v}.$$

Az Euler egyenlet (ism.)

Newton II. törvényét alkalmazva, a mozgásmennyiség megváltozását a ható erők eredője adja. Ezek az erők a súrlódás elhanyagolása mellett rendre a nyomásból származó erők és a külső erők (tehetetlenségi erők) hatása:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p,$$

amely az Euler egyenlet általános alakja.

A Bernoulli egyenlet (ism.)

Integráljuk egy görbe mentén az Euler egyenletet az a és b pontok között:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_a^b \mathrm{grad}\frac{v^2}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{s} - \int_a^b \boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{g}\mathrm{d}\boldsymbol{s} - \int_a^b \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

A $\boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ tagot tartalmazó integrál számos esetben elhagyható!

- Ha az áramlás potenciálos, mivel akkor $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$.
- Ha áramvonal mentén integrálunk, mivel akkor $\boldsymbol{v} \parallel \mathrm{d}\boldsymbol{s}$.
- Ha örvényvonal mentén integrálunk, mivel akkor $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} \parallel \mathrm{d}\boldsymbol{s}$.
- Ha Beltrami áramlást vizsgálunk, mivel akkor $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{v}$.

Vizsgáljuk a tehetetlenségi erőtér hatását tisztán potenciálos nehézségi erőtér (a gravitációs erő és a centrifugális erő eredője) esetén:

$$\boldsymbol{g} = -\mathrm{grad}U,$$

ahol U a nehézségi erőteret jellemző potenciál, az ún. geopotenciál, amelyet a következőképp fejthetünk ki az állandó térerősség nagyságával g-vel és a z függőleges térkoordinátával:

$$U = gz.$$

A gradiens és az áramvonalon való integrálás tulajdonságainak kihasználásával, összenyomhatatlan közegekre és állandó térerősségre:

$$\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \frac{v_b^2 - v_a^2}{2} = -(U_b - U_a) - \frac{1}{\rho}(p_b - p_a) = -g(z_b - z_a) - \frac{1}{\rho}(p_b - p_a).$$

Stacionárius áramlásokra:

$$\frac{v_b^2 - v_a^2}{2} = -g(z_b - z_a) - \frac{1}{\rho}(p_b - p_a).$$

A fenti egyenletet szorozva ρ-val, és az a pontbeli értékeket bal, a b pontbeli értékeket pedig a jobb oldalra rendezve a Bernoulli egyenlet gyakorlati feladatokban leggyakrabban alkalmazott alakját kapjuk:

$$p_a + \frac{\rho}{2}v_a^2 + \rho g z_a = p_b + \frac{\rho}{2}v_b^2 + \rho g z_b.$$

Az egyenletet általánosan a következő összeg, az ún. Bernoulli összeg állandóságával fejezhetjük ki:

$$p + \frac{\rho}{2}v^2 + \rho U = p + \frac{\rho}{2}v^2 + \rho g z = \text{állandó}$$

Áramlástani mérések, nyomás és sebesség

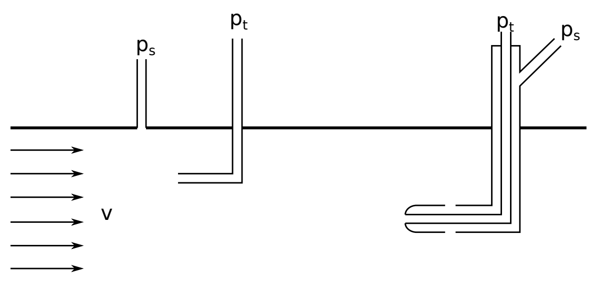
Vegyük észre, hogy a Bernoulli összeg csupa nyomás dimenziójú mennyiséget tartalmaz. A térerősség hatásának elhanyagolásával maradó összeget a következőképp írhatjuk, ha p_t-vel az össznyomást (torlónyomást), p_s-el a statikus, p_d-vel a levegő mozgásából adódó dinamikus nyomást jelöljük:

$$p_t = p_s + p_d = p_s + \frac{\rho}{2}v^2 = \text{állandó}$$

Az áramlási sebesség mérésére gyakran alkalmazzuk ezt az összefüggést, mivel ezt átrendezve, vagyis az össznyomásból a statikus nyomást kivonva a dinamikus nyomást kapjuk, amiből kifejezhető a sebesség:

$$p_d = p_t - p_s = \frac{\rho}{2}v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2(p_t - p_s)}{\rho}}$$

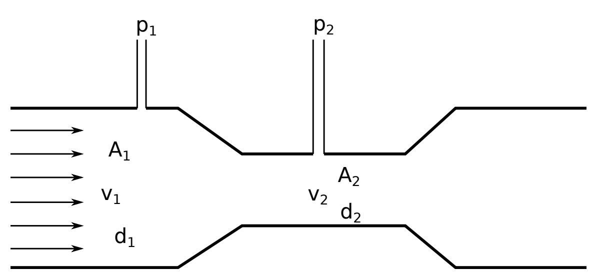
Ezen az elven alapul a Pitot és Prandtl csöves sebességmérés, amelyet az alábbi ábrán láthatunk. A Pitot cső



1. ábra. Sebesség mérésének sematikus szemléltetése statikus nyomáskivezetés és Pitot cső segítségével (bal oldalon), illetve Prandtl cső (jobb oldalon) használatával.

az egyik legegyszerűbb eszköz, amellyel megmérhetjük a közeg sebességét, hátránya, hogy külön statikus nyomásmérésre van szükségünk. A szonda orrpontjában (torlópontjában) a sebesség zérus, így ott a levegő össznyomása mérhető. A Prandtl cső egy szondában ötvözi a statikus és torlónyomás felvevő nyílásokat, így a rajta mérhető nyomáskülönbség a dinamikus nyomást adja.

A sebesség mérését Venturi cső sebességével is elvégezhető, ahogy azt az alábbi ábra mutatja. Az ábrán egy csökkenő, majd növekvő keresztmetszetű cső látható. A sebesség kiszámításához ismernünk kell az A_1 és A_2 keresztmetszet nagyságát, és mérnünk kell ezekben a keresztmetszetben a statikus nyomásokat p_1-et és p_2-őt.



2. ábra. Sebesség mérése Venturi csővel.

Alkalmazva a kontinuitási egyenletet a sebességek egymással kifejezhetők:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \rightarrow v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$

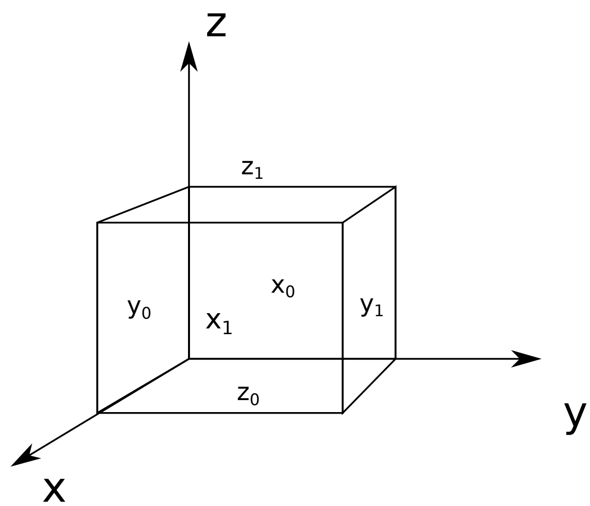
Felhasználva a Bernoulli egyenlet egyszerűsített alakját, és behelyettesítve a v_2 sebességet kiszámolható a v_1 sebesség:

$$p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 \rightarrow p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) \rightarrow p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_1^2\frac{A_1^2}{A_2^2}\right) \rightarrow v_1 = \sqrt{2\frac{p_2 - p_1}{\rho\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)}}$$

A Venturi csöves mérési módszert szűkítőelemes módszernek nevezzük, hiszen az áramlási keresztmetszet csökkentésén alapul. Hasonló módszer a beszívó és átfolyó mérőperemes mérési módszer is.

A Navier-Stokes egyenlet

Tekintsük újra az elemi kontrolltérfogatot szemléltető ábrát és vizsgáljuk meg a mozgásmennyiség megváltozását a nyomásból származó, a súrlódásból származó és a tehetetlenségi erőtér hatásából származó erők függvényében!



3. ábra. Kontrolltérfogat a Navier-Stokes egyenlet levezetéséhez.

Felhasználva, hogy $F_p = pA$ és figyelembe véve, hogy a nyomás a térfogat felületein kintről befelé ható erőt hoz létre, a nyomásból származó erők iránykomponensenként a következőképp írható:

$$F_p(x) = F_p(x_0) + F_p(x_1) = p\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}V$$

hasonlóan x és y irányban:

$$F_p(y) = -\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}V, \quad F_p(z) = -\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}V.$$

Vektoriális alakban a dV térfogatra vonatkoztatva:

$$\boldsymbol{F}_p = -\mathrm{grad}p = -\nabla p.$$

Newton viszkozitási törvénye egyszerű 1-dimenziós esetben fejezte ki a csúsztatófeszültséget $\tau = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y}$ alakban, ahol x az áramlást határoló szilárd fallal párhuzamos, y pedig az arra merőleges irány. Stokes terjesztette ki Newton viszkozitási törvényét 3-dimenzióra, bevezetve a $\boldsymbol{\tau}$ szimmetrikus feszültségtenzort:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix},$$

A feszültségtenzor tagjait kiírva:

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)$$

A súrlódásból származó erők $F_s = \tau A$ meghatározását a nyomáshoz hasonlóan tehetjük meg a dV térfogatra iránykomponensenként:

$$F_s(x) = F_s(x_0) + F_s(x_1) = -\mu\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mu\left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mu\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial x}\mathrm{d}V$$

hasonlóan x és y irányban:

$$F_s(y) = \mu\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial y}\mathrm{d}V, \quad F_s(z) = \mu\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial z}\mathrm{d}V.$$

Vektoriális alakban a dV térfogatra vonatkoztatva:

$$\boldsymbol{F}_s = \mu\nabla\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}V = \mu\left[\nabla^2\boldsymbol{v} - \frac{2}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\right]\mathrm{d}V.$$

A tehetetlenségi erők eredőjét az Euler egyenlethez hasonlóan az eredő $\boldsymbol{g}$ gyorsulással kifejezve a kontroll térfogaton:

$$\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g} = \rho\boldsymbol{g}\mathrm{d}V.$$

Newton II. törvényének értelmében a mozgásmennyiség megváltozása a ható erők eredőjeként adható meg:

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}V = \rho\boldsymbol{g} - \nabla p + \mu\left[\nabla^2\boldsymbol{v} - \frac{2}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\right]\mathrm{d}V.$$

A fenti egyenletet ρ-val elosztva, és egységnyi dV térfogatra vonatkoztatva a Navier-Stokes egyenlet általános alakját kapjuk (figyelembe véve, hogy $\nu = \mu/\rho$):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\left[\nabla^2\boldsymbol{v} - \frac{2}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\right].$$

Inkompresszibilis esetben, az egyenlet egyszerűsíthető:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v}.$$

Súrlódásmentes esetben pedig az Euler egyenletet kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p.$$