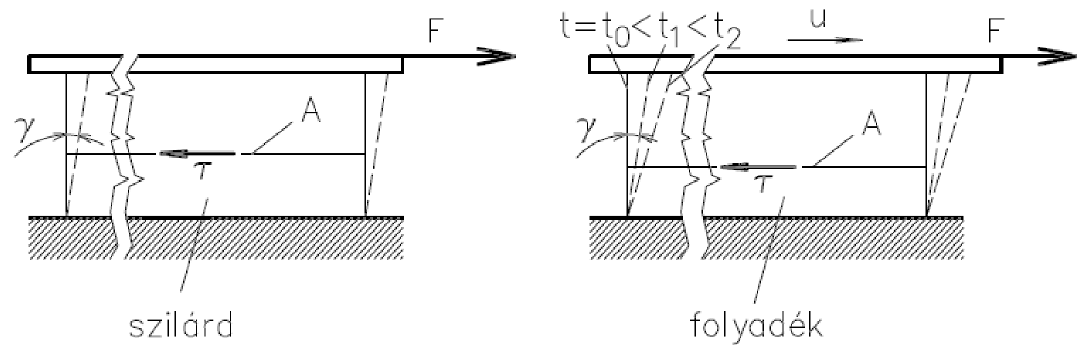
Hő- és áramlástan
1. előadás – Áramlástani alapok

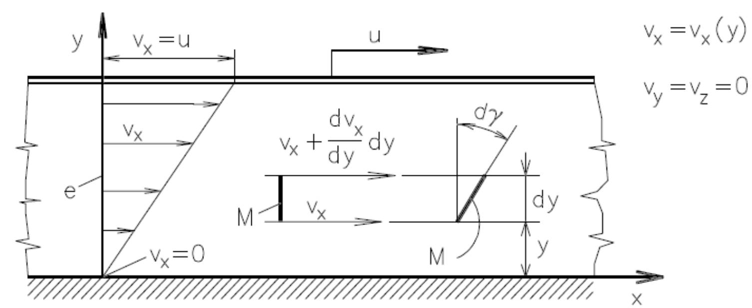
Dr. Tomor András
BME Áramlástan Tanszék
2020. február 10.

Newton viszkozitási törvénye

Áramlástan: folyadékok és gázok mechanikája

Szilárd test ↔ folyadék





[1] Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai

Newton viszkozitási törvénye: $\tau_{yx} = \mu \dfrac{dv_x}{dy} = \mu \dfrac{d\gamma}{dt}$

szilárd anyagoknál: a deformáció arányos a csúsztatófeszültséggel
(newtoni) folyadékoknál: a deformációsebesség arányos a csúsztatófeszültséggel

A folyadékok áramlásának leírása

Folyadék mozgásának leírása:

Lagrange-féle leírási mód ↔ Euler-féle leírási mód

Az egyes folyadékrészeket a t = 0 pillanathoz tartozó helyzetükkel jelöljük meg, és a t idő függvényében megadjuk a folyadékrészek helyét.

$$\underline{r} = \underline{r}(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} \qquad \underline{a} = \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2}$$

Szilárd testek mozgásának leírásával analóg.

Áramlástani alkalmazása viszonylag nehézkes → kevésbé elterjedt.

A folyadékrészek sebességét adja meg a hely és az idő függvényében.

$$\underline{v} = \underline{v}(x, y, z, t)$$

A sebességtér egy vektortérrel írható le.

Stacionárius áramlásoknál (ellentétben a Lagrange-féle leírási móddal) a független változók száma háromra csökken.

Pálya, áramvonal, nyomvonal

Folyadékrész pályája: Egy kiszemelt pontszerű folyadékrész egymást követő pillanatokban elfoglalt helyeit összekötő görbe.

Áramvonal: Olyan görbe, amelyet egy adott pillanatban minden pontjában érint a sebességvektor. (Az áramvonal egy adott pillanatban a sebességvektorok burkológörbéje.)

Nyomvonal: A tér egy pontján egymás után áthaladó folyadékrészeket egy adott pillanatban összekötő görbe. (Pl.: kéményből kilépő füstzászló.)

Áramfelület: Egy kijelölt vonalra illeszkedő vagy egy pontból kiinduló áramvonalak alkotják, amelyeket a sebességvektorok érintenek. Bármely áramlásba helyezett felület, amelyen nincs átáramlás, áramfelületnek tekinthető.

Áramcső: speciális, cső alakú áramfelület, amelynél az áramvonalak egy zárt görbére illeszkednek.

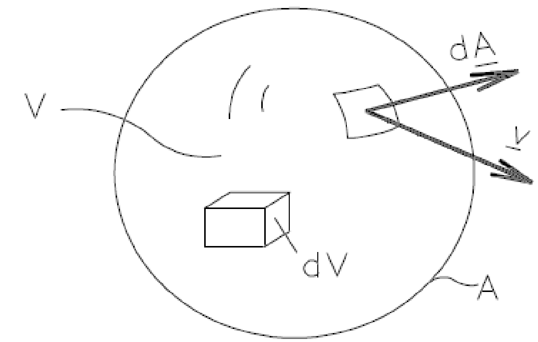
Stacionárius (időben állandósult) áramlás esetén a pálya, az áramvonal és a nyomvonal egybeesik.

A folytonosság (kontinuitás) tétele

Anyagmegmaradás törvénye: tömeg nem keletkezhet és nem tűnhet el.

Többletkiáramlás (kilépő tömegáram): $q_m = \int_A \rho \underline{v} d\underline{A}$

Az A felület által határolt V térfogatban lévő tömeg másodpercenkénti változása (felhalmozódó tömeg): $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$



[1] Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai

A folytonossági tétel integrál alakja: $-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_A \rho \underline{v} d\underline{A} = \int_V div(\rho \underline{v}) dV$

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{v}) \right] dV = 0$$

A folytonosság tétele: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{v}) = 0$

Stacionárius áramlás esetén: $div(\rho \underline{v}) = 0$ Összenyomhatatlan közeg esetén: $div \underline{v} = 0$

Áramcső esetén: $\rho \bar{v} A = \acute{a}lland\acute{o}$

A folyadékrészek gyorsulása

Folyadéksebesség: $\underline{v}(t,\underline{r}) = v_x(t,x,y,z)\underline{i} + v_y(t,x,y,z)\underline{j} + v_z(t,x,y,z)\underline{k}$

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t}dt + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz$$

Egy folyadékrészre: $\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \underline{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \underline{v}}{\partial z}$$

A folyadékrészek gyorsulásának komponensei 3D-ben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\\
\frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\\
\frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{d\underline{v}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}}_{\text{lokális gyorsulás}} + \underbrace{\underline{\underline{D}}\,\underline{v}}_{\text{konvektív gyorsulás}}$$

Az Euler-egyenlet

Az **Euler-egyenlet** olyan **mozgásegyenlet**, amely a súrlódás elhanyagolása esetén **összefüggés**t teremt **a folyadékrész** mozgásmennyiségének idő szerinti megváltozása (**gyorsulása**) és a folyadékrészre ható **erők között**. (Newton II. axiómája)

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho}\, grad p$$

(egységnyi tömeg esetén)

térerősségből származó erő

nyomásból származó erő

Az Euler-egyenlet vektoriális alakja:

$$\left(\frac{d\underline{v}}{dt} = \right)\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + grad\,\frac{v^2}{2} - \underline{v}\times rot\,\underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho}\, grad p$$

Háromdimenziós esetben 3 komponensegyenlet

Áramlástani problémánál 5 ismeretlen: v_x, v_y, v_z, p, ρ

4. egyenlet: kontinuitásegyenlet

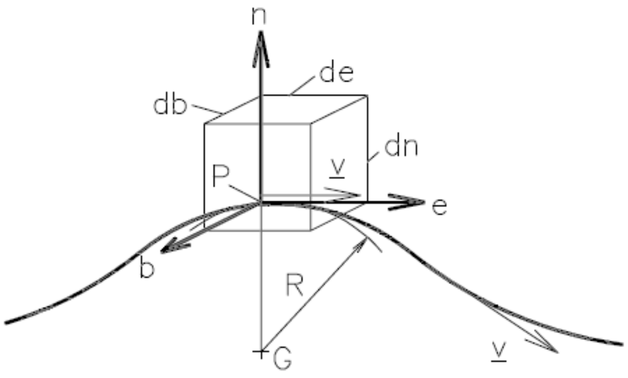
5. egyenlet: gáztörvény $p = \rho RT$

(6. ismeretlen: T; 6. egyenlet: energiaegyenlet)

Az Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben

Az Euler-egyenlet érintő irányú komponensegyenlete:

$$v\frac{\partial v}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial e} + g_e$$

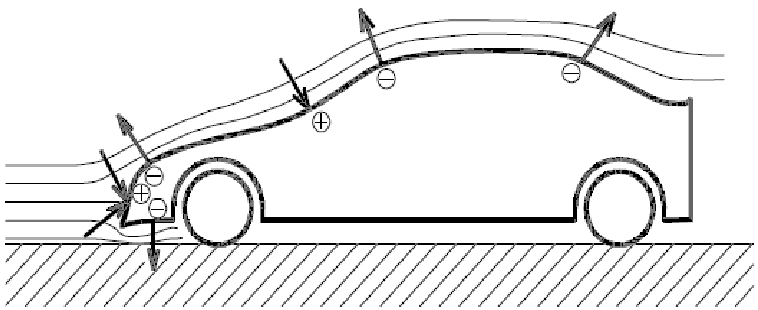


Az Euler-egyenlet normális irányú komponensegyenlete:

$$-\frac{v^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g_n$$

Amennyiben a térerősség hatásától eltekinthetünk:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$



[1] Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai

Következtetések:

1) ha az áramvonalak párhuzamos egyenesek ($R \to \infty$), akkor azokra merőlegesen nem változik a nyomás;
2) ha az áramvonalak görbültek, akkor azokra merőlegesen a nyomás változik: a görbületi középponttól kifelé haladva nő.

A Bernoulli-egyenlet

A Bernoulli-egyenlet lényegében az energiamegmaradás törvényének áramlástani megfogalmazása.

Megkapható az Euler-egyenlet tagjainak az áramlási tér két (például 1-gyel és 2-vel jelölt) pontját összekötő vonal menti integrálásával:

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} + \int_1^2 grad\,\frac{v^2}{2} d\underline{s} - \int_1^2 \underline{v} \times rot\,\underline{v}\,d\underline{s} = \int_1^2 \underline{g}\,d\underline{s} - \int_1^2 \frac{1}{\rho}\,grad\,p\,d\underline{s}$$

Alkalmazásával lehetővé válik, hogy az áramlási tér két pontjában érvényes áramlási paraméterek között kapcsolatot létesítsünk.

A Bernoulli-egyenlet egyszerűsítésének lehetőségei

1) Stacionárius-e az áramlás? Ha nem, van-e olyan koordináta-rendszer, amelyből azzá tehető?
2) Potenciálos-e az áramlás? Ha nem, lehet-e áramvonalon integrálni?
3) Potenciálos-e az erőtér?
4) Állandó-e a sűrűség?

Amennyiben a fenti négy kérdés mindegyikére tudunk igennel válaszolni:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_2$$

Hidrosztatika, erőterek

A hidrosztatika alapegyenlete: $grad p = \rho \underline{g}$

A Bernoulli-egyenlet hidrosztatikai feladatokra:

$$\frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{p_2}{\rho} + U_2$$

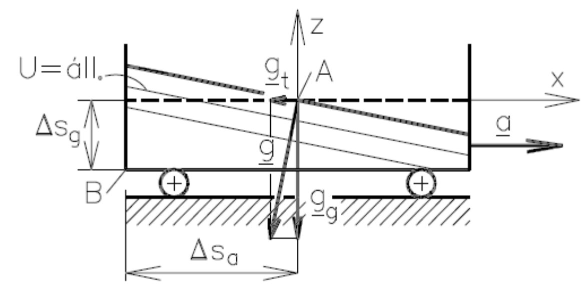
Hidrosztatikában csak potenciálos erőterekkel foglalkozunk.

A térerősség vektor ($\underline{g}$) és a potenciál (U) között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$\underline{g} = -grad U$$

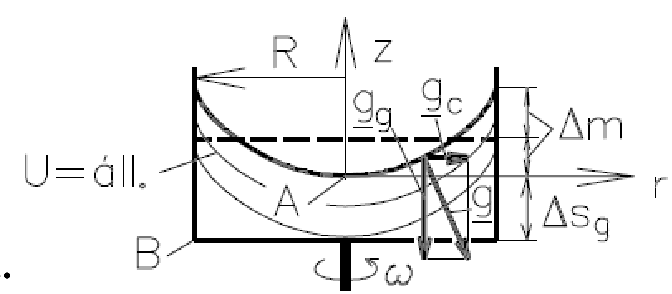
Nehézségi erőtér $\underline{g} = -g_g \underline{k}$ $U_g = g_g z + \text{konst.}$

(pl.: vízzel teli tartály)



Tehetetlenségi erőtér $\underline{g}_t = -a\underline{i}$ $U_t = ax + \text{konst.}$

(pl.: gyorsuló tartálykocsi)

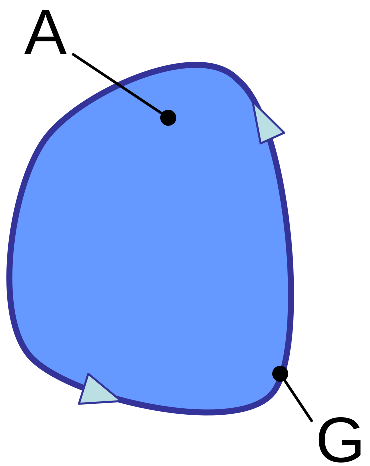


Centrifugális erőtér $\underline{g}_c = \underline{r}\omega^2$ $U_c = -\frac{r^2\omega^2}{2} + \text{konst.}$

(pl.: forgó tartály)

[1] Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai

Örvényes áramlások



Cirkuláció: $\Gamma = \oint_G \underline{v} d\underline{s}$ (arányos a felhajtóerővel)

A Thomson-tétel szerint $\nu = 0$, ρ = áll. és potenciálos erőtér esetén bármely folyékony zárt görbére:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

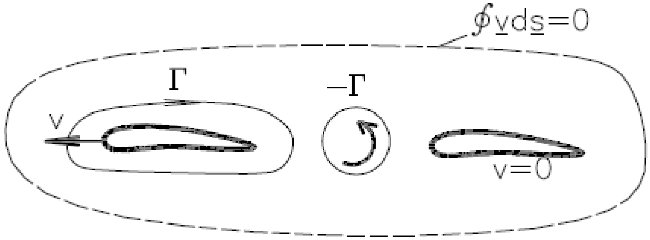
Örvényesség:

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

a szögsebesség kétszerese

Hogyan kerül az örvényesség az áramlásba?

Indulási és megállási örvény



Helmholtz I. és II. tétele

Helmholtz I. tétele szerint egy örvényvonal, amely két folyékony örvényfelület metszésvonala, mindig ugyanazokból a folyadékrészekből áll.

<u>*Gyakorlati jelentősége:*</u> Az örvények „megőrzik" a bennük áramló folyadékrészeket. Például úszómedencéknél az örvényekben lévő folyadékrészek tartózkodási ideje megnő (aktív klór koncentrációja lecsökken) → törekedni kell a nagy örvények kialakulásának elkerülésére.

Helmholtz II. tétele: Egy folyékony örvénycső hossza mentén bármely metszetben

$\int_A rot\,\underline{v}\,d\,\underline{A}$ értéke állandó és időben sem változik.

<u>*Gyakorlati jelentősége:*</u> Egy örvénycső nem fejeződhet be az áramló közegben: vagy zárt gyűrűt alkot, vagy az áramlási tér határáig ér.

Helmholtz II. tétele

A tornádó tölcsére a Föld felszínéig ér.

A Navier–Stokes-egyenlet

A **Navier–Stokes-egyenlet** olyan **mozgásegyenlet**, amely a **súrlódás** hatását is figyelembe veszi (kikötés: ρ = állandó, ν = állandó):

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + grad\,\frac{v^2}{2} - \underline{v} \times rot\,\underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho}\,grad p + \nu \Delta \underline{v}$$

térerősségből származó erő

nyomásból származó erő

viszkózus erő

Mivel $\Delta \underline{v} = grad\,div\,\underline{v} - rot\,rot\,\underline{v}$ és $div\,\underline{v} = 0$, ezért:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho}\,grad p - \nu\, rot\,rot\,\underline{v}$$

Potenciálos áramlás ($rot\,\underline{v} = 0$), sőt állandó örvényességű áramlás esetén a súrlódásnak nincs szerepe, a Navier–Stokes-egyenlet az Euler-egyenletbe megy át.

Az örvénytranszport egyenlet

Örvénytranszport egyenlet: $\nabla \times \left(\mathrm{Navier-Stokes}\right)$

Levezetés 2D-ben ekkor ω skalár: $\omega = \left(rot\underline{v}\right)_z = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}$

A Navier–Stokes-egyenlet két komponensegyenlete 2D-ben (ρ = állandó és ν = állandó):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)$$

Differenciáljuk az 1. komponensegyenlet mindkét oldalát y szerint, a 2. komponensegyenletet x szerint, majd a második egyenletből vonjuk ki az elsőt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + v_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + v_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \nu\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega$$

Az örvénytranszport egyenlet

A 2D örvénytranszport egyenlet ρ = állandó és ν = állandó esetén

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \omega = \nu \, \Delta \omega \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

kinematikai viszkozitás

analóg a hővezetési egyenlettel:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla T = a \, \Delta T \qquad a = \frac{\lambda}{\rho c} \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

hőfokvezetési tényező

A kinematikai viszkozitás örvénydiffúziós együtthatónak tekinthető.

Az örvénytranszport egyenlet 3D-ben:

$$\frac{d\underline{\omega}}{dt} = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{\omega} = \quad 0 \quad + \nabla \times \underline{g} + \nu \, \Delta \underline{\omega} - \underline{\omega} \nabla \cdot \underline{v} + \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v}$$

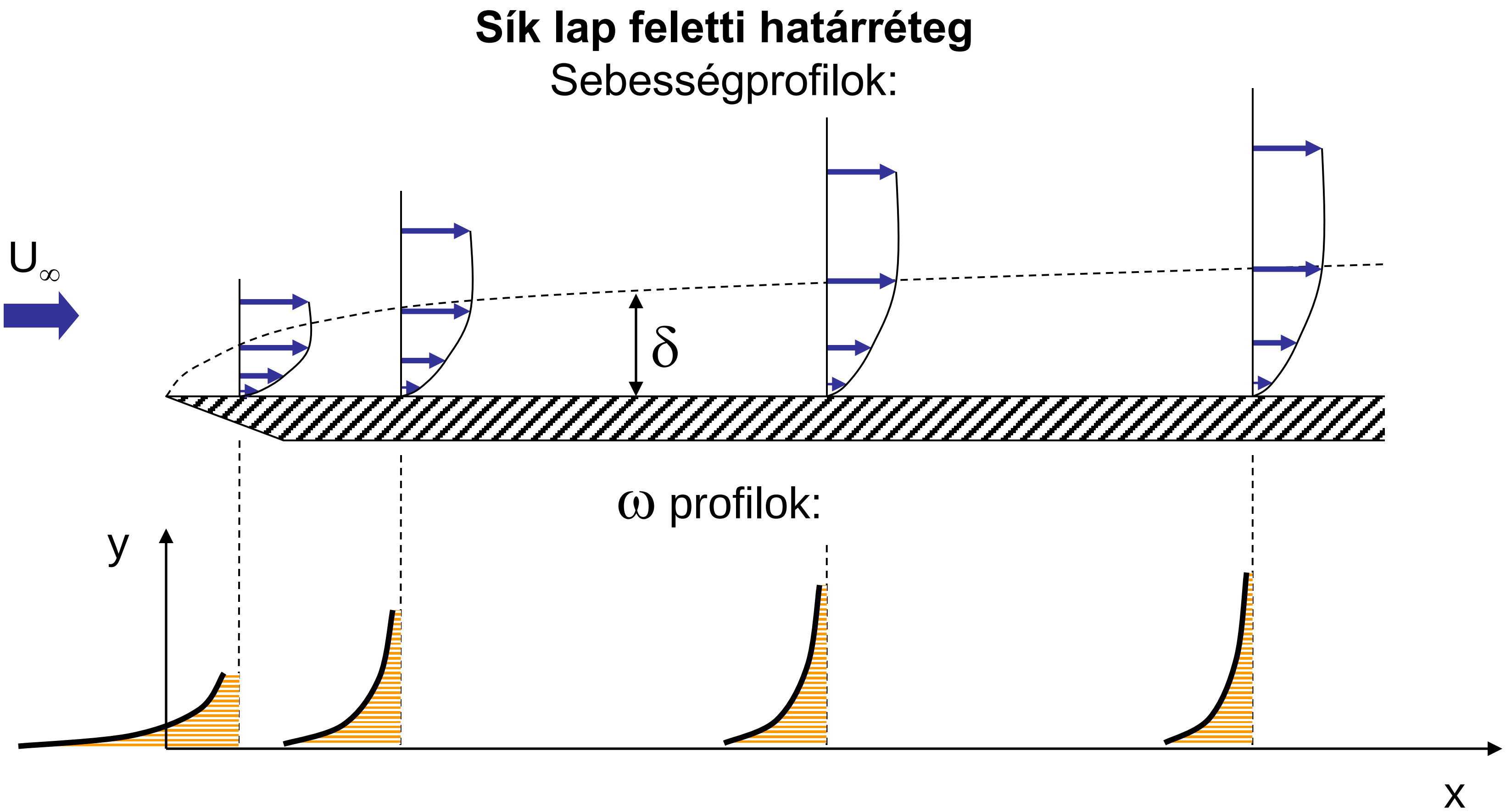
0, ha $\underline{g}$ potenciálos

örvény-diffúzió

0, ha ρ állandó

örvény-nyúlás

Örvénydiffúzió



Az örvényesség a fal felületén keletkezik a folyadék tapadása miatt és a határrétegben vezetés révén kerül be az áramlási térbe.

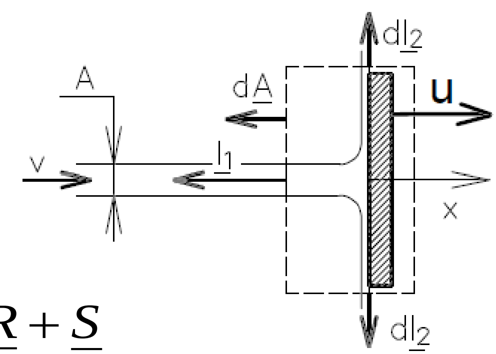
Az impulzustétel

Az **impulzustétel** egy **mozgásegyenlet**, amely a folyadékra ható **erők** és a folyadék **mozgásállapota** között teremt kapcsolatot.

Euler-egyenlet: differenciálegyenlet ↔ Impulzustétel: <u>integrálokat</u> tartalmaz

Kiszámításuk után erővektorok adódnak

Az integrálok kiszámításához fel kell vennünk az ellenőrző térfogatot körülvevő A ellenőrző felületet.



Ha van szilárd test az ellenőrző térfogatban (impulzustétel általános alakja):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho \underline{v})dV + \int_A \underline{v}\rho(\underline{v}d\,\underline{A}) = \int_V \rho \underline{g}dV - \int_A p d\,\underline{A} + \underline{R} + \underline{S}$$

a V térfogatban lévő mozgásmennyiség egységnyi időre jutó lokális megváltozása

impulzus-áram vektor

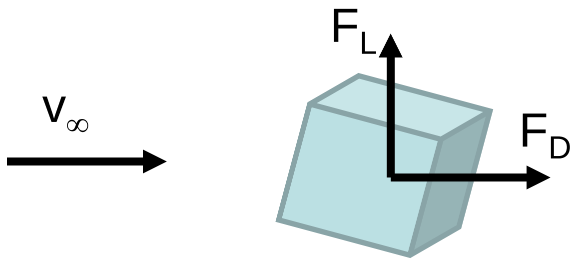
az ellenőrző térfogatban lévő folyadékra ható térerő

az ellenőrző felületen ható, nyomásból származó erő

a szilárd testről a folyadékra ható erő

a folyadékra ható, súrlódásból származó erő

Az áramlásba helyezett testekre ható erő



Általánosan, a testre ható erő a feszültségtenzornak a test felületén képzett felületi integráljával adható meg:

$$\underline{F} = \int_A \sigma d\,\underline{A}$$

Tompa test: a test felületéhez képest jelentős méretű leválási buborékok alakulnak ki, a csúsztatófeszültségből származó erők elhanyagolhatók a nyomásból származó erőkhöz képest.
Áramvonalas test: nincsenek kiterjedt leválások, a csúsztatófeszültségből származó erők jelentősek a nyomásból származó erőkhöz képest.

Ellenállás-tényező és felhajtóerő-tényező:

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2 A} \qquad c_L = \frac{F_L}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2 A}$$

„A” felület szárnyak esetében a függőleges vetület, egyéb esetekben az áramlás irányában képzett vetületi terület.

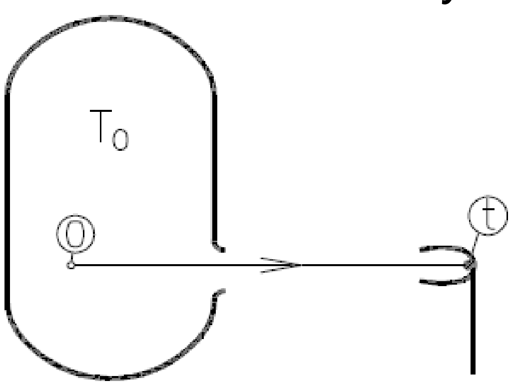
Energiaegyenlet, kiömlés tartályból

Összenyomható közegek áramlása

Az **energiaegyenlet** súrlódásmentes, hőszigetelt közeg stacionárius áramlása esetén azt fejezi ki, hogy a gáz mozgási energiájának és entalpiájának összege az áramvonal mentén állandó:

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = \text{állandó}$$

Gáz kiáramlása tartályból



$$T_0 + \frac{v_0^2}{2c_p} = T_t + \frac{v_t^2}{2c_p}$$

Mivel $v_0 = v_t$, ezért a torlóponthőmérő a tartály hőmérsékletét méri.

Ha pl.: a torlóponthőmérőt levegő 200 m/s sebességű áramlásába helyezzük, az az áramló levegő (statikus) hőmérsékleténél 20 K-nel nagyobb összhőmérsékletet mér.

Levegő esetén: $T_d = \frac{v^2}{2c_p} \cong \frac{v^2}{2 \cdot 10^3} \cong \left(\frac{v}{45}\right)^2$ A nagy sebességgel áramló gáz „hideg”!