

Turbulencia  
I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

# Turbulencia és modellezése I.

Balogh Miklós

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Áramlástan Tanszék

2018. november 12.



# Kivonat

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

- 1 Előszó
- 2 Bevezetés
- 3 A turbulencia definíciója és tulajdonságai
- 4 Tulajdonságok
- 5 Jelölések
- 6 Statisztikai leírás
- 7 Reynolds egyenlet

# Történelem - Leonardo da Vinci, 1500 körül

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

### Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

Leonardo da Vinci (fordítás: Piomelli in Lumley, J.L., 1997):

"Observe the motion of the surface of the water, which resembles that of hair, which has two motions, of which one is caused by the weight of the hair, the other by the direction of the curls; thus the water has eddying motions, one part of which is due to the principal current, the other to random and reverse motion"





# Művészet - Vincent van Gogh : Csillagos éj, 1889

Turbulencia  
I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet





# Tudomány - Reynolds kísérlet, 1883

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

### Előszó

Bevezetés

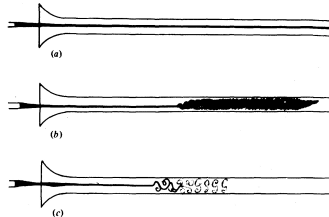
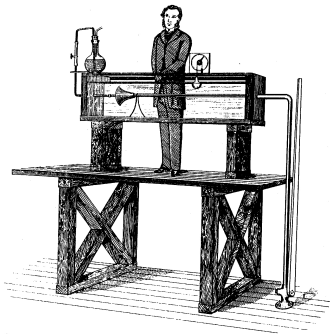
Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet





## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

### Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

### Horace Lamb, 1932

„I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic.”

### Peter Bradshaw, 1994

„Turbulence was probably invented by the Devil on the seventh day of Creation when the Good Lord wasn't looking.”



## Miért foglalkozunk a turbulenciával egy numerikus áramlástan (CFD) kurzusban?

- **Numerikus áramlástanban** az egyenletek nagyrészt **modell egyenletek**
- A **turbulencia** jelensége a numerikus áramlástan alkalmazások  **$\approx 95\%$ -ban jelen van**
- A **turbulenciát** csak nagyon ritkán lehet szimulálni, általában **modellezni kell**
- A turbulencia **alapjainak** ismerete **szükséges** feltétele a modellek megfelelő használatának



# Korlátok, egyszerűsítések

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

## A következő egyszerűsítésekkel/elhanyagolásokkal élünk:

- Sűrűség változás hatása:
  - Lökéshullám és a turbulencia kölcsönhatását nem tárgyaljuk
  - A felhajtóerő turbulenciára gyakorolt hatását nem tárgyaljuk
- Viskozitás változás hatása
- Gravitációs térerősség hatása:
  - Nyílt-felszínű áramlások kivételével, a gravitációnak nincs hatása a turbulenciára (beolvasztható a nyomásba)





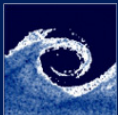
## Létezik precíz definíció?

- Eddig **nem adták meg** a turbulencia egzakt **definícióját**
- **Stabilitás- és káoszelmélet** szolgáltathatnak "majd" definíciót
  - De a leíró **PDE**-eket sokkal **bonyolultabb** kezelni mint egy KDE-t
- A klasszikus fizika utolsó **megoldatlan problémája** ("Lehetséges-e egy elméleti modellt adni amely leírja a turbulens áramlások statisztikáit?")
- A **mérnökök** mégis **tudják kezelni** a turbulenciát



## Definíciók helyett

- A turbulencia tulajdonságai összefoglalhatók
- Ezek a jellemzők felhasználhatók, hogy
  - Különbséget tegyünk a lamináris (akár időfüggő) és a turbulens áramlások között
  - Megértsük hogyan vizsgálható a turbulencia
  - Megértsük a turbulencia mérnöki gyakorlatban betöltött szerepét



# Magas Reynolds szám

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statistika

Reynolds  
egyenlet

## Reynolds szám

- $Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{F_{\text{tehetetlenségi}}}{F_{\text{viszkózus}}}$
- Magas Re szám  $\longleftrightarrow$  viszkózus erők kicsik
- **De** a súrlódásmentes áramlás nem turbulens

## A Reynolds szám szerepe

- A Reynolds szám az áramlás bifurkációs (stabilitási) paramétere
- $Re_{cr} \approx 2300$  csőáramlás esetén
- $Re > Re_{cr} \Rightarrow$  áramlás instabil, turbulens



# Rendezetlen, kaotikus

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

- Dinamikus rendszerek terminológiája
- A kezdeti (KF) és a perem feltételekre (PF) való erős érzékenység
- Az áramlás "stabilitásáról" való állítás
- A PDE-knek (P arciális D ifferenciál E egyenleteknek) végtelenszer több szabadsági foka van mint a KDE-knek (közönséges differenciál egyenleteknek)
  - Sokkal nehezebb kezelni őket
  - A turbulencia definíciójának jelöltje lehet
- Eszköz amellyel megmagyarázható a **turbulencia** és a "sima" **lamináris időfüggés** közötti **különbség**



# Folytonos térbeli spektrum

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

## Térbeli spektrum

- A térbeli spektrum analóg az időbelihez, **Fourier transzformációval** definiáljuk
- Praktikusan periodikus vagy végtelen nagy tartományt nehezebb találni
- Vizuálisan: **Minden méretű** (határok között) áramlási jelenség jelen van

## Ellen példa

Az akusztikai hullámoknak csúcsos spektruma van al- és felharmonikusokkal.



# 3D jelenség

Turbulencia  
I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

- **Örvény megnyúlás** (lásd: Hő és áramlástan vagy Áramlástan válogatott fejezetei) csak 3D áramlásban van jelen.
- 2D-ben nincs az örvényesség irányába mutató sebességkomponens, amely meg tudná nyújtani azt.
- Felelős a **méretetek csökkenésért**
- Felelős az **örvényesség növekedésért**

## Az átlagáramlás lehet 2D

- Az időfüggő áramlás **mindenképp 3D**
- A (Reynolds, idő) átlagolt áramkép lehet 2D
  - A keresztirányú fluktuációk zérusra átlagolódnak, de részt vesznek az áramlás és a falra merőleges irányú ingadozások alakításában



# Időfüggő

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

A turbulens áramlások időfüggők, de **az áramlás időfüggése nem jelenti azt**, hogy turbulens (pl. Kármán - féle örvénysor)

Az időfüggő áramlások stabilitás szempontjából különbözőek lehetnek

- Egy csőben való időfüggő lamináris áramlásban (pl.:  $500 < Re_b(t) < 1000$ ), a kis perturbációktól való függés sima és folytonos
- Egy csőben való időfüggő turbulens áramlásban (pl.:  $5000 < Re_b(t) < 5500$ ), a kis perturbációktól való függés erős



# Kontinuum jelenség

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

- Leírható a kontinuum Navier-Stokes (NS) egyenlettel
- Azaz a **molekuláris jelenségeknek nincs szerepe**, ahogy ezt 100 évvel ezelőtt még gondolták egyesek

## Következmények

- 1 **Szimulálható a NS egyenlet megoldásaként** (közvetlen numerikus szimuláció **DNS**)
- 2 A **turbulenciának** van egy legkisebb **léptéke**, ami általában jelentősen **nagyobb mint a molekuláris léptékek**
- 3 Van olyan eset is ahol a molekuláris hatások fontosak (pl. úrjárművek, visszatérő kapszulák)
- 4 A turbulenciát nem a molekuláris rezgések hajtják
- 5 A turbulencia a NS egyenlet (stabilitás típusú) tulajdonsága





## Disszipatív

- Def: A mechanikus (mozgási) **energia hővé alakulása** (hőmérséklet növelés)
- Mindig jelen van a turbulens áramlásokban
- A turbulencia legkisebb léptékén történik, viszkózus erők fontosak a tehetetlenségi erőkhöz képest
- Hullám mozgáshoz képest ez egy jelentős különbség, mivel ott a disszipációnak nincs elsőrendű jelentősége



## A turbulens áramlások mindig örvényesek

- Az örvény megnyúlás felelős a méretek csökkenéséért
- A disszipáció a legkisebb skálákon jelentkezik



## A diffúzió tulajdonság, mérnöki szempontból fontos következmény

- Az átlagolt mennyiségeket tekintve a turbulencia általában **növeli az átadásokat**
  - Pl. az átadási tényezők növekednek (pl.:  $\lambda$ )
  - A Nusselt szám növekszik
- Az átlagolt mezőben a turbulencia általában növeli az átadási tényezőket
  - A turbulens viszkozitás (az impulzus átadás) növekszik
  - A turbulens hővezetési tényező növekszik
  - A turbulens diffúziós tényező növekszik



# Történelme van, A TURBULENCIA nem létezik

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

*A klasszikus fizikai utolsó megoldatlan problémája* szerint a turbulenciának nem tudtak **általános elméletet** kifejleszteni mostanáig.

A turbulenciában semmilyen univerzalitást nem fedeztek fel

- A turbulens áramlások többfélék lehetnek, pl.:
  - Peremfeltétel függők (változó kényszerek)
  - A fel-vízi feltételektől függők (térbeli történelem)
  - Az időbeli történelemtől függők



# Turbulencia jellemzésének összefoglalása

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

## A turbulenciában semmilyen univerzalitást nem fedeztek fel

- Magas Reynolds szám
- Rendezetlen, kaotikus
- Folytonos térbeli spektrum
- Térbeli és időfüggő (4D) jelenség
- Kontínium jelenség (nem molekuláris)
- Örvényes
- Disszipatív, Diffúzív
- Történelme van



## Írányok, sebességek

- $x, u$ : Áramlási irány
- $y, v$ : Falra merőleges, legnagyobb gradiens iránya
- $z, w$ : Bi-normális a  $x, y$  irányokra merőleges keresztirány

## Index-es írásmód

$$x = x_1, y = x_2, z = x_3$$

$$u = u_1, v = u_2, w = u_3$$

## Parciális deriváltak

$$\partial_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{és} \quad \partial_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t}$$



# Összegzési konvenció

Turbulencia  
I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

Összegzést végzünk a dupla indexek esetén a három térbeli iránynak megfelelően.

## Alap példa

Skalár szorzás:

$$a_i b_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 a_i b_i \quad (1)$$



# Rövidített írásmód

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

### Kontinuitás egyenlet vektoriális és rövidített alakja

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

$$\partial_t \rho + \partial_i u_i = 0 \quad (3)$$

### Mozgásegyenletek vektoros és rövidített alakja

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left[ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \quad (4)$$

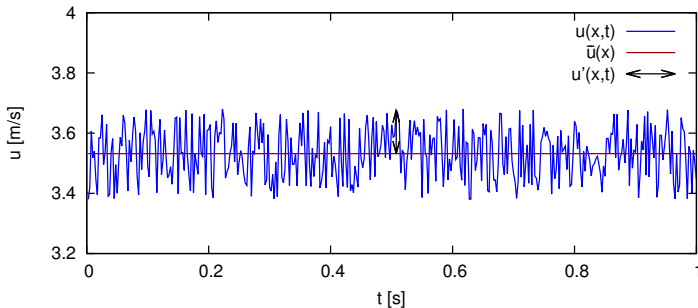
$$\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = g_i - \frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \left[ \partial_j \partial_j u_i + \frac{1}{3} \partial_i (\partial_j u_j) \right] \quad (5)$$





## Az "egyszerű" megközelítés

Turbulens áramlást az **idő átlagával** és az ettől vett pillanatnyi eltéréssel, **ingadozással** lehet jellemezni





### A megközelítés problémái

- Milyen hosszú legyen az időátlagolás?
- Hogy különböztessük meg az időfüggést a turbulenciától?

### Áramlási példák

- Turbulens csőáramlás ( $Re \gg 2300$ ), amelyet egy dugattyús szivattyú hajt meg (szinuszos időfüggés)
- Kármán örvénysor egy  $Re = 10^5$  számú henger körüli áramlásban, ahol az örvények  $St = 0,2$  frekvenciával válnak le

Nehéz különbséget tenni a turbulencia és az időfüggés között



# Statisztikai (sokasági) átlag

Turbulencia  
I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

**Statisztika**

Reynolds  
egyenlet

## Miért kezelünk egy determinisztikus folyamatot statisztikailag?

- Az NS egyenletek determinisztikusak (legalábbis azt hisszük, de nincs általánosan bizonyítva)
- Azaz a megoldást egyértelműen megadják a KF-ek és PF-ek
- A statisztikai leírás hasznos a kaotikus viselkedés miatt
  - A KF-ek és PF-ek re való nagyfokú érzékenység
  - A hasonló KF és PF halmazokbeli megoldásokat statisztikailag lehet kezelni



# Sokasági előrejelzés (perturbált KF)

## Turbulencia I.

Balogh Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

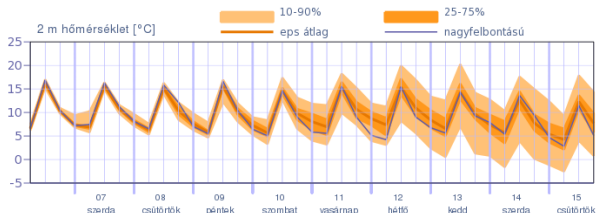
Jelölések

Statistika

Reynolds egyenlet

ECMWF valószínűségi előrejelzés: Budapest

Készült: 2018.11.06 00 UTC-s futtatásból





## A megoldás mint egy statisztikai változó

$$\varphi = \varphi(x, y, z, t, i) \quad (6)$$

Az  $i$  index különböző de hasonló KF-ekhez és PF-ekhez tartozik

## Sűrűség függvény

- Megmutatja  $\varphi$  értékének valószínűségét.

$$f(\varphi) \quad (7)$$

- Normálva van:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi) d\varphi = 1 \quad (8)$$



# Átlag érték

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

### Várható érték

$$\overline{\varphi(x, y, z, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z, t) f(\varphi(x, y, z, t)) d\varphi \quad (9)$$

### Átlag

$$\overline{\varphi(x, y, z, t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x, y, z, t, i) \quad (10)$$



# Reynolds átlagolás

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

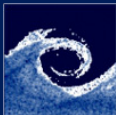
## Reynolds felbontás

Mivel a statisztikai átlagot Reynolds átlagnak is hívjuk, ezért a felbontást szintén Reynolds felbontásnak hívjuk

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi' \quad (11)$$

## Ingadozás

$$\varphi' \stackrel{\text{def}}{=} \varphi - \bar{\varphi} \quad (12)$$



# Az átlagolás tulajdonságai

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

### Linearitás

$$\overline{a\varphi + b\psi} = a\overline{\varphi} + b\overline{\psi} \quad (13)$$

### A Reynolds átlag csak egyszer hat

$$\overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi} \quad (14)$$

### Az ingadozások átlaga zérus

$$\overline{\varphi'} = 0 \quad (15)$$

### Kommutative a deriválásra

$$\overline{\partial\varphi} = \partial\overline{\varphi}$$





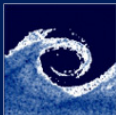
## Szórás

- Az ingadozás elsőrendű jellemzése

- 

$$\sigma_{\varphi} = \sqrt{\overline{\varphi'^2}} \quad (16)$$

- RMS-nek is hívják:  $\varphi_{rms} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{\varphi}$



# Kapcsolat az idő és a statisztikai átlag között

Turbulencia  
I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

**Statisztika**

Reynolds  
egyenlet

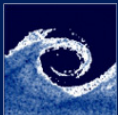
## Ergodicitás

Ha az időbeli és statisztikai átlag azonos. Azaz ha függetlenek a kezdeti feltételektől.

## Az átlag azonos, és a szórás?

$$\hat{\varphi}^{(T)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi \, dt \quad (17)$$

$$\overline{\hat{\varphi}^{(T)}} = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\varphi} \, dt = \bar{\varphi} \quad (18)$$



## Kovariancia

$$\begin{aligned} R_{\varphi\psi} &= R_{\varphi\psi}(x, y, z, t, \delta x, \delta y, \delta z, \tau) = \\ &= \overline{\varphi'(x, y, z, t)\psi'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \tau)} \end{aligned}$$

## Auto kovariancia

- Ha  $\varphi = \psi$  akkor a kovariancia auto kovariancia
- Pl. Időbeli auto kovariancia:

$$R_{\varphi\varphi}(x, y, z, t, 0, 0, 0, \tau) \quad (19)$$



## Korreláció

Dimenziótlan kovariancia

$$\rho_{\varphi\psi}(x, y, z, t, \delta x, \delta y, \delta z, \tau) = \frac{R_{\varphi\psi}}{\sigma_{\varphi(x,y,z,t)}\sigma_{\psi(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z,t+\tau)}} \quad (20)$$



# Integrál időlépték

Turbulencia  
I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

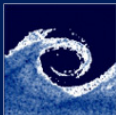
Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

## Integrál időlépték

$$T_{\varphi\psi}(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\varphi\psi}(x, y, z, t, 0, 0, 0, \tau) \, d\tau \quad (21)$$



# Taylor-féle fagyott örvény hipotézis

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

Sokkal könnyebb az integrál időléptéket mérni (hődrót), mint a hosszléptéket (két hődrót különböző távolságokra)

### Feltevések

- Az áramkép teljesen fagyott, az átlagsebességgel ( $U$ ) jellemezhető
- Az áramlás-irányú hosszléptéket közelíteni lehet, a fagyott örvény időbeli haladását vizsgálva

A Taylor szerint közelített áramlás-irányú hosszlépték

$$L^x = TU \quad (22)$$



# Reynolds egyenlet

Turbulencia  
I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

Levezetjük a **NS egyenlet Reynolds átlagát**, amelyet **Reynolds egyenletnek** fogunk hívni



# Reynolds Átlagolt kontinuitás

Turbulencia  
I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

Az eredeti egyenlet

$$\partial_i u_i = 0$$

Levezetés:

$$\begin{aligned}\overline{\partial_i u_i} &= \\ &= \partial_i \overline{u_i} \\ &= \overline{\partial_i \overline{u_i} + u_i'} \\ &= \partial_i \overline{u_i} \\ 0 &= \partial_i \overline{u_i}\end{aligned}\tag{23}$$

Ugyanaz az egyenlet csak az átlagra!





## Levezetés

- Ugyanazokat a szabályokat alkalmazzuk a lineáris tagokra
- A nemlineáris tagok különböznek



# A nem-lineáris tagok átlagolása

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

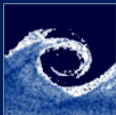
Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

$$\begin{aligned}\overline{u_j \partial_j u_i} &= \\ &= \overline{\partial_j (u_j u_i)} \\ &= \partial_j \overline{u_j u_i} \\ &= \partial_j (\overline{u_j} + u'_j) (\overline{u_i} + u'_i) \\ &= \partial_j (\overline{u_j u_i} + \overline{u_i u'_j} + \overline{u_j u'_i} + \overline{u'_j u'_i}) \\ &= \partial_j (\overline{u_j u_i} + \overline{u'_j u'_i}) \\ &= \partial_j (\overline{u_j u_i}) + \partial_j \overline{u'_j u'_i} \\ &= \overline{u_j} \partial_j \overline{u_i} + \partial_j \overline{u'_i u'_j}\end{aligned}\quad (24)$$



# Reynolds egyenletek

## Turbulencia I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

### Kontinuitás egyenlet

$$\partial_i \bar{u}_i = 0$$

### Mozgás egyenlet

$$\partial_t \bar{u}_i + \bar{u}_j \partial_j \bar{u}_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{p} + \nu \partial_j \partial_j \bar{u}_i - \partial_j \overline{u'_i u'_j} \quad (25)$$

### Reynolds feszültség tenzor

$$\overline{u'_i u'_j} \quad (26)$$

Vagy  $\rho$ -val vagy  $-1$ -el szorozva



Minden feszültség ami gyorsulást okoz:

$$\tau_{ij} = -\frac{1}{\rho} \bar{p} \delta_{ij} + \nu \partial_j \bar{u}_i - \overline{u'_i u'_j} \quad (27)$$



Turbulencia  
I.

Balogh  
Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds  
egyenlet

Köszönöm a figyelmet!