

## **Műszaki akusztika és zajcsökkentés (önálló felkészülést segítő tananyag)**

Összeállította: Dr. Koscsó Gábor c. egyetemi docens (BME Áramlástan Tanszék)

### 6. előadás

#### **Tartalom:**

6.1. Akusztikai rezonátorok, Helmholtz-rezonátor (előadás vázlat)

6.2. Gyakorló feladatok

#### **6.1. Akusztikai rezonátorok, Helmholtz-rezonátor**

A rezonátor egy sajátfrekvencián gerjesztett rezgőrendszer. A rezgőrendszer olyan fizikai rendszer, amely gerjesztést követően rezgést végez. Fizikai rendszer rezgése a rendszer egyensúlyi érték körüli periodikus viselkedése. A periodikus viselkedés a rendszert leíró változók egyensúlyi érték körüli periodikus ingadozása. Rezgés létrehozásához elengedhetetlenül szükséges a tehetetlenség és a visszatérítő hatás jelenléte. A rezgőrendszer működését jól szemlélteti a tömeg és rugó elemekből felépülő egyszabadságfokú mechanikai rezgőrendszer, amelyben a tehetetlenséget a tömeg, a visszatérítő hatást a rugóerő hozza létre.

A rezgőrendszereket a matematikai leíráshoz szükséges független változók (hely és idő) alapján koncentrált és elosztott paraméteres kategóriákba soroljuk. Koncentrált paraméteres rezgőrendszer esetén a rezgés létrehozásáért felelős fizikai tulajdonságok a tér egy szűk részére koncentrálnak, illetve a rezgés jellemzői is helyben koncentráltan jelennek meg (pl.: tömegközéppont mozgása, rugóerő változása). A helyfüggésnek nincs jelentősége, a mozgás leírása az idő függvényében közönséges differenciálegyenletekkel oldható meg. Koncentrált paraméteres rezgőrendszer például a tömeg és rugó rezgőrendszer. Elosztott paraméteres rezgőrendszernek a rezgés kialakulásáért felelős fizikai tulajdonságok (pl.: tehetetlenség és rugalmas visszatérítő erő) a térben elosztva jelennek meg, és a kialakuló rezgés jellemzői térben változó jellegűek. Elosztott paraméteres rezgőrendszerek matematikai leírása során az idő mellett a hely szerinti változást is figyelembe kell venni, a leíró egyenletek parciális differenciálegyenletek. Elosztott paraméteres rezgőrendszer például, egy spirálrugó vagy csőben zárt légoszlop.

A környezettel való kapcsolattól és belső hatásoktól függően szabad és gerjesztett rezgéseket, illetve csillapítatlan és csillapított rezgéseket különböztetünk meg. Szabad rezgés esetén a kezdeti kitérítést követően a rendszert magára hagyjuk, ezt követően a folyamatot segítő külső hatás nem éri a rendszert. Szabad rezgést végző rendszer, veszteségek hiányában, időben folyamatosan, változatlan formában folytatja periodikus mozgását. Gerjesztett, vagy kényszerrezgés esetén a rendszer periodikus viselkedését valamilyen folyamatos, periodikus külső hatás hozza létre. Reális körülmények között rezgések esetén is fennáll az általános mechanikai elv, amely szerint minden mozgást veszteségi folyamatok kísérik. A veszteségi folyamatokkal kísért rezgés a csillapított rezgés. Folyamatos gerjesztés hiányában a csillapított rezgés amplitúdója időben folyamatosan csökken, majd kellő idő elteltével a mozgás megáll.

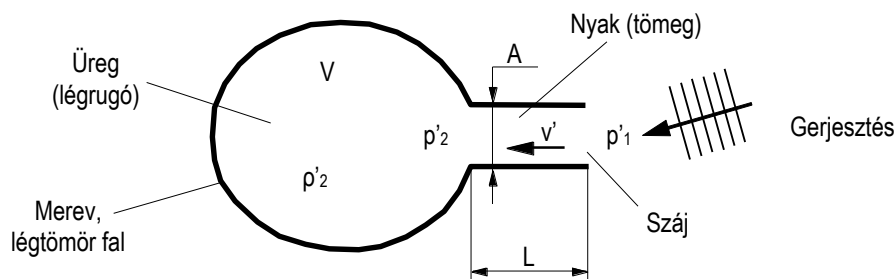
A gerjesztett rezgések egy speciális működési állapota, a gépészmérnöki gyakorlat szempontjából kiemelt fontosságú rezonancia jelenség. Rezonancia esetén a rezgőrendszer saját frekvenciája és a gerjesztési frekvencia megegyeznek. A rezgőrendszer és a gerjesztés fázisazonos viselkedése miatt a gerjesztés által a rendszeren végzett mechanikai munkát a rezgőrendszer teljes egészében befogadja és tárolja. A rezonanciát kis gerjesztés amplitúdó és az ennek hatására kialakuló nagy rezgőrendszer válasz amplitúdó jellemzi. Folyamatos gerjesztés esetén csillapítatlan rezgőrendszerben rezonancia esetén az amplitúdó folyamatosan nő. Csillapított rezgőrendszerben az amplitúdó addig növekszik, amíg a gerjesztés által egy periódus során a rendszeren végzett munka, és rendszer által egy periódus során a csillapító hatások miatt elveszített energia (disszipáció és testhang, rezgés elvezetés) értéke megegyezik.

Gépészeti berendezések szerkezeti anyaga számos esetben acél. A rezgő acélszerkezeteknek kicsi a csillapítása (az acél belső súrlódási tényezője kicsi és a karcsú szerkezetek légellenállása az egyéb erőkhöz

képest szintén kicsi). Így a gerjesztés és disszipáció energia egyensúlya általában a szerkezeti elemek nagy kitérésénél áll be. Meghatározott periódusidőt figyelembe véve a nagy kitérés nagy sebességet, nagy gyorsulást, nagy hatóerőt, nagy mechanikai feszültséget eredményez. A nagy mechanikai feszültség a gépészeti berendezés károsodását okozhatja, ezért a gépészeti berendezéseinkben általában a rezonancia elkerülése a célunk.

### Helmholtz-rezonátor

A Helmholtz-rezonátor vagy más néven üregrezonátor alakja leginkább egy „Unicum”-os üveghez hasonlít, fontos részei az üreg, a nyak és a száj, ld.: ábra. Rezgés létrehozása érdekében a rezonátor szájánál hozzunk létre egy hangnyomás impulzust. A nyak külső (száj felőli) és belső (üreg felőli) végén kialakuló pillanatnyi nyomáskülönbség miatt a rezonátor nyakán keresztül a levegő az üregbe áramlik, ahol emiatt a nyomás megnő. A nyomásimpulzus lezajlását követően a külső térben ismét egyensúlyi nyomás alakul ki, így a belső nyomás növekedése miatt a nyakban a levegő mozgása lelassul, majd egy pillanatra megáll. Ekkor az üregben lévő túlnyomás hatására a nyakban zárt levegő kifelé indul, kis idő elteltével az üreg belső terében és a külső térben a nyomás egy pillanatra kiegyenlítődik, de a nyakban zárt levegő tehetetlensége miatt a mozgás nem áll meg. Az üregben a levegő kiáramlás miatt a nyomás lecsökken, így a külső tér és az üreg közötti nyomáskülönbség immáron a kiáramlást fékezi. Veszteségek hiányában az  $f_0$  sajátfrekvenciájú periodikus áramlás tetszőleges ideig folytatódik. Valóságos körülmények között a nyak belső felületén kialakuló folyadéksúrlódás, a be- és kilépési áramlási veszteségek, illetve a hővezetés miatt csillapítás lép fel, amely a kezdetben átadott energiát lassan felemészti, és a mozgás leáll. A folyamat lényegét tekintve megegyezik, az egyszabadságfokú mechanikai rezgőrendszer periódus szakaszaival. Az akusztikai és a mechanikai rezgőrendszer egymással analóg, a Helmholtz-rezonátor egy koncentrált paraméteres, egyszabadságfokú akusztikai rezgőrendszer, amelynél a nyakban zárt levegő a tömeg, illetve az üregben foglalt levegő a rugó (légrugó). Ha a rezonátort nyomásimpulzus helyett időben folyamatos, a rezonátor  $f_0$  sajátfrekvenciájával megegyező tiszta hanggal gerjesztjük, rezonancia alakul ki.



Helmholtz-rezonátor vázlatja

A Helmholtz-rezonátorban kialakuló jelenség leírásához a koncentrált paraméteres jellegnek megfelelően közönséges differenciálegyenletek használhatók. A levezetésnél használt egyszerűsítő feltételek a rezonancián kívüli tartományban a korábbi lineáris akusztikai modellével megegyezők. Rezonancia esetén azonban a jelenséget leíró változók amplitúdója megnő, a súrlódásmentes, izentropikus és nyugvó közeg feltételek teljesülése már nem biztosított. Ennek ellenére, a matematikai levezetések könnyítése érdekében a teljes frekvencia tartományban a lineáris modellnél alkalmazott egyszerűsítő feltételeket alkalmazzuk. Ennek következményeit a megoldás vizsgálata során fokozott figyelemmel kell majd kísérni.

**Kontinuitás egyenlet:** A rezonátorüreg fala tömör (folyadék számára nem átjárható), a tömegmegmaradás elve alapján, az üregben tartózkodó levegő időegységre jutó tömeg változása, a nyakon keresztül az üregbe belépő levegő tömegárammal ( $q_{m\ nyak}$ ) egyenlő,

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{üreg}} = q_{m\ nyak} \quad \frac{d}{dt}(V\rho_2) = \rho_{nyak}Av'$$

A rezonátorüreg fala merev, a külső és belső térben kialakuló nyomáskülönbség hatására nem deformálódik (a  $V$  térfogat idő szerinti deriváltja nulla), továbbá a változókat időben egyensúlyi és ingadozó tagokra felbontva,

$$V \frac{d}{dt} (\rho_0 + \rho'_2) = (\rho_0 + \rho'_{nyak}) A v'$$

Az egyensúlyi tagok idő szerinti deriváltja nulla, továbbá tételezzük fel,  $\rho_0 + \rho'_{nyak} \approx \rho_0$ , a Helmholtz-rezonátor kontinuitás egyenlete,

$$V \frac{d\rho'_2}{dt} = \rho_0 A v'$$

**Mozgásegyenlet:** Tételezzük fel, hogy a nyakhossz ( $L$ ) jóval kisebb, mint a rezonátort gerjesztő hang hullámhossza, a nyak hossza mentén érdemi nyomásváltozás nem alakul ki, és így a nyakban zárt levegő henger egyöntetű, merev testszerű mozgást végez. A külső (száj) és belső (üreg) oldali nyomásból származó erők eredője a nyakban a levegő henger gyorsulás és tömeg szorzatával egyenlő,

$$\frac{dv'}{dt} m_{nyak} = \sum F_p$$

$$\frac{dv'}{dt} L A \rho_0 = (p_0 + p'_1) A - (p_0 + p'_2) A$$

Egyszerűsítéseket követően, a Helmholtz-rezonátor mozgásegyenlete,

$$\frac{dv'}{dt} L \rho_0 = p'_1 - p'_2$$

A  $p'$  és  $\rho'$  változók közötti kapcsolat az algebrai modell alapján,

$$\frac{p'}{\rho'} = a^2 = \kappa R T_0$$

**Gerjesztés:** A külső hangbesugárzás miatt a rezonátor szájánál kialakuló nyomásingadozás,

$$p'_1 = \hat{p}_1 \cos(\omega t)$$

A Helmholtz-rezonátor viselkedése szempontjából a legérdekesebb változó, a nyakban kialakuló részecske sebesség ( $v'$ ). Ennek meghatározása érdekében a kontinuitás egyenletben a hangsebességet tartalmazó összefüggés segítségével cseréljük ki a sűrűség ingadozás változót a hangnyomásra, átrendezést követően,

$$\frac{dp'_2}{dt} = \frac{a^2 \rho_0 A}{V} v'$$

A  $p'_2$  hangnyomás kiejtése érdekében a mozgásegyenlet és a gerjesztés függvény deriválását, vagy az átalakított kontinuitás egyenlet integrálását kell elvégezni. A deriválás kevésbé problémás, mint az integrálás művelet, ezért a mozgásegyenlet és a gerjesztés függvény idő szerinti deriválását és behelyettesítést követően,

$$\frac{d^2 v'}{dt^2} L \rho_0 = \frac{dp'_1}{dt} - \frac{dp'_2}{dt} = -\omega \hat{p}_1 \sin(\omega t) - \frac{a^2 \rho_0 A}{V} v'$$

Átrendezést követően a részecskesebesség meghatározására szolgáló differenciálegyenlet,

$$\frac{d^2 v'}{dt^2} + \frac{a^2 A}{LV} v' = -\frac{\omega \hat{p}_1}{L \rho_0} \sin(\omega t)$$

A közönséges, másodrendű, inhomogén differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása a szinusz függvény (a szinusz második deriváltja mínusz szinusz), a rezonátor nyakában a részecskesebesség az idő függvényében,

$$v'(t) = \hat{v} \sin(\omega t)$$

A sebességamplitúdó ( $\hat{v}$ ) a részecskesebesség megoldás függvény részecskesebesség differenciálegyenletbe helyettesítésével határozható meg,

$$\hat{v} = \frac{-\frac{\omega \hat{p}_1}{L \rho_0}}{\frac{a^2 A}{LV} - \omega^2}$$

A gerjesztés és a részecskesebesség között kialakuló fáziskülönbség bemutatása érdekében a megoldás függvényben a szinuszt írjuk át a gerjesztésben szereplő koszinuszra,

$$v'(t) = \hat{v} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Helyettesítsük vissza az átalakított kontinuitás egyenletbe a részecskesebesség kifejezését, integrálással a gerjesztett rezgés során az üregben kialakuló hangnyomás,

$$p'_2(t) = \hat{p}_2 \cos(\omega t), \quad \text{ahol} \quad \hat{p}_2 = \frac{\frac{a^2 A}{LV}}{\frac{a^2 A}{LV} - \omega^2} \hat{p}_1$$

### Megjegyzések:

- A Helmholtz-rezonátorban  $\omega$  szögfrekvenciájú harmonikus gerjesztés hatására,  $\omega$  szögfrekvenciájú harmonikus rezgés keletkezik. Ez nem csak a Helmholtz-rezonátor, hanem minden más kényszerrezgés esetén igaz.

- A rezgés során a nyakban kialakuló részecskesebesség és az üregben tapasztalható hangnyomás között a fáziskülönbség  $\pi/2$  radián (negyed periódus). Amikor a részecskesebesség abszolút értéke maximális, az üregben a hangnyomás abszolút értéke nulla, és fordítva. Hasonlóan, mint az egyszabadságfokú mechanikai rezgőrendszer esetében.

- Az üregben kialakuló hangnyomás és gerjesztés hangnyomás között fáziseltérés nincs.

- A rezonátorban gerjesztés hatására kialakuló rezgés amplitúdók frekvenciafüggők. Kis frekvencián a részecskesebesség nagyon kicsi, a gerjesztés és az üregben kialakuló hangnyomás amplitúdó pedig nagyjából megegyezik. (A légoszlop egy merev, nyomástovábbító rúd.)

A szögfrekvencia növelésével, megközelítve a rezonancia szögfrekvencia ( $\omega_r$ ) értékét, a részecskesebesség és az üregben tapasztalható hangnyomás amplitúdók rohamosan megnövekednek,

$$\omega_r = \sqrt{\frac{a^2 A}{LV}}$$

Abban az esetben, amikor gerjesztési frekvencia tart a rezonancia frekvencia értékéhez, részecskesebesség és az üreg hangnyomás amplitúdók végtelenhez tartanak.



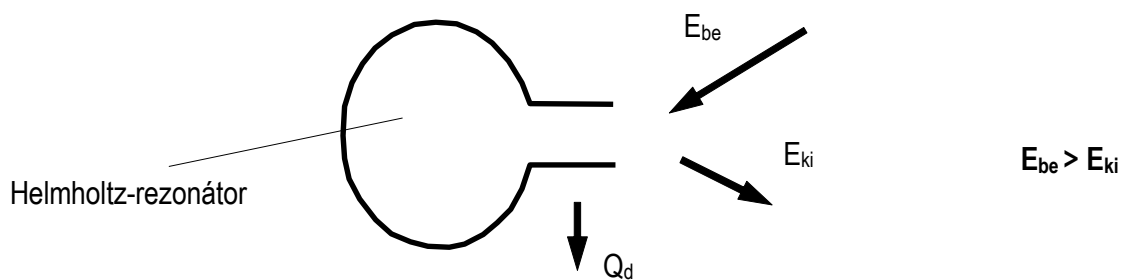
A rezonátor üregben kialakuló hangnyomás amplitúdó és a részecskesebesség amplitúdó a szögfrekvencia függvényében csillapítatlan esetben

Reálisan ez az eredmény nem megengedhető. A csillapítás elhanyagolása miatt rezonancia esetén a modell a rezgés amplitúdók meghatározására nem alkalmas. Jelentősen tovább növelve a frekvenciát, a részecskesebesség amplitúdó csökkenése, az üreg hangnyomás amplitúdó rohamos csökkenése tapasztalható. (A légoszlop tehetetlen tömege lefalazza a külső nyomás zavarását.) A rezonátor üregben csillapítás hiányában kialakuló hangnyomás- és a részecskesebesség amplitúdó változását a szögfrekvencia függvényében az előző ábra mutatja.

### Rezonátorok hatása és alkalmazása

A Helmholtz-rezonátor számos hatása ismert. Megjegyezzük, hogy a felsorolt tulajdonságok közül számos, más rezonátorra is jellemző, általánosítható képesség.

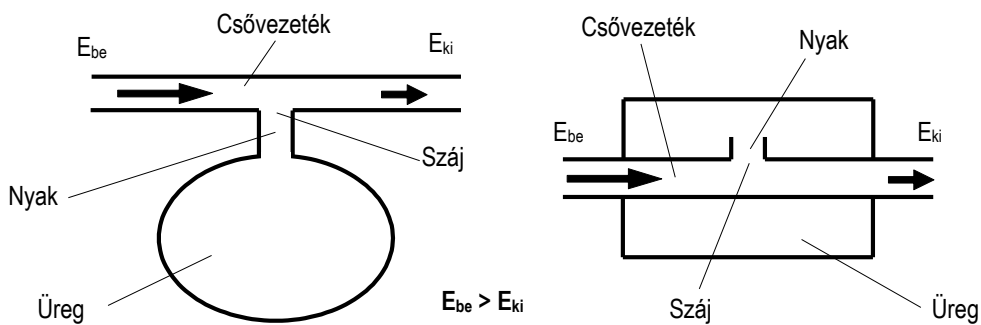
- **Csillapítás:** Elsősorban a rezonancia környezetében a nagy amplitúdójú mozgás során kialakuló veszteségek (viszkózus folyadéksúrlódás, hővezetés) miatt a rezonátorba betáplált mechanikai energia egy része disszipálódik (veszteségek miatti visszafordíthatatlan belsőenergia növekedés alakul). A disszipáció miatt a rezonátor a környező hangtérből elnyelt hangenergia csak egy részét sugározza vissza, amely miatt hangcsillapítóként viselkedik.



A Helmholtz-rezonátor hangcsillapító hatása (hangenergia (E), disszipáció (P))

Az akusztikában hangelnyelő kialakítást (disszipatív veszteség létrehozására) számos helyen alkalmaznak (teremakusztika, elnyelés elvű hangtompítók, ...). Disszipatív veszteséget okozó hatásos hangelnyelő például a finom szálas szerkezetű, porózus anyag (pl.: üvegyapot, kőzetgyapot), de ezek reális anyagvastagság esetén kis frekvencián nem hatékonyak. A szükséges kis frekvenciára méretezett üregrezonátorok csoportjával alkalmas hangelnyelő hozható létre.

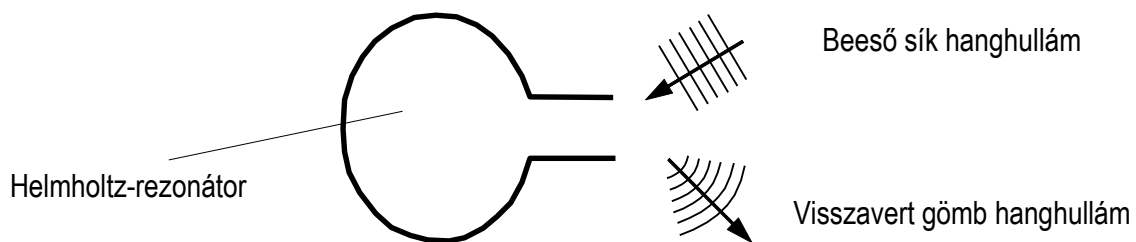
- **Kioltási interferencia:** A Helmholtz-rezonátort szájával egy csőszakaszhoz oldalról hozzacsatlakoztatva oldalági rezonátort hozunk létre. A csőben terjedő hanghullám gerjesztésére a Helmholtz rezonátor rezgésbe jön. A rezonátorból a csatlakozási pontba fáziskéséssel visszaérkező nyomászavarás kioltási interferenciát hoz létre.



Az oldalági Helmholtz rezonátor elvi (bal oldalon) és valóságos (jobb oldalon) kialakítás vázlatja (hangenergia (E))

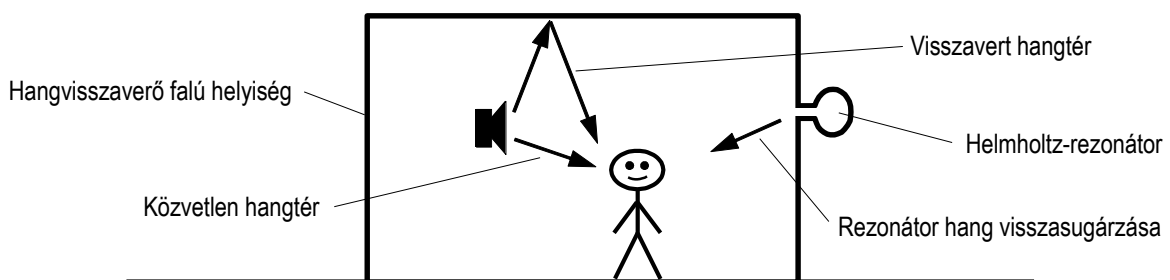
Az előző ábra egy oldalági Helmholtz-rezonátor elvi működési, és valóságos konstrukciós vázlatát mutatja. Az oldalági Helmholtz-rezonátor hangtompító a csővezetékben kizárólag a rezonancia frekvencián okoz terjedési veszteséget.

- **Szórás:** A rezonátorba távolból beeső (általában) sík hanghullámot a rezonátor (fél-) gömbhullám formájában sugározza vissza, így a rezonátor a beeső hang szóródását okozza.



Hanghullám szóródása a Helmholtz-rezonátor hang visszasugárzása során

- **Utózengetés:** Hangvisszaverő falakkal határolt térben a közvetlen hangbesugárzás mellett visszavert hangtér is kialakul. A visszavert hangtér energiája a helyiség térfogatával, az elnyelődése a belső felülettel arányos. Kis méretű helyiség esetén a fajlagos felület (felület, térfogat hányados) nagyobb, mint a nagyobb méretű helyiségben, így a visszavert hangtér elnyelődése gyorsabb, az utózengetés rövidebb ideig tart. Tényleges gyakorlati megfigyelés, ugyanaz a taps egy lakás fürdőszobájában gyakorlatilag impulzusos hanghatást okoz, ezzel szemben egy kosárlabdacsarnokban több másodpercig hallhatjuk a hangvisszaverődéseket.



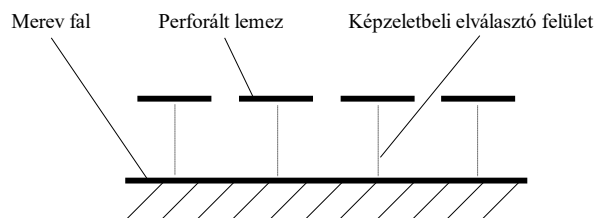
Utózengetési idő meghosszabbítása teremfalba épített Helmholtz-rezonátorral

Egy helyiség belső felületéhez csatlakoztatott Helmholtz-rezonátorban, a helyiséget kitöltő hanghullámok gerjesztésére rezgés alakul ki. Kis méretű helyiségekben a hangforrás kikapcsolását követően a közvetlen és a visszavert hangtér hamar elhal, amelyhez képest a begerjesztett rezonátor (veszteségektől függően) csillapodása időben tovább elhúzódik, így hangenergiát táplál vissza a hangtérbe, amely az utózengetési idő növekedését eredményezi. A hosszú utózengetés impozánsabb, nagyobb hangtér érzetét kelti. Így elsősorban kis

méretű helyiségekben a falba épített üregrezonátor utözengési idő növelésre, más kifejezéssel „akusztikus tér nagyításra” használható.

- **Frekvencia kiemelés:** A hangszerek megszólalásának javítására rezonátorok frekvencia kiemelő hatását számos esetben alkalmazzuk. Így például a gitár esetében, amelynél az üreges gitártest és a rajta lévő hanglyuk egy sajátos Helmholtz-rezonátor. A rezonátor a kisméretű felületekkel (húr) nehezen megszólaltatható kis frekvenciájú hangok kiemelését szolgálja, illetve jelentős mértékben hozzájárul az akusztikus gitárok sajátos lág hangszínének kialakításához.

**Egyedi rezonátor, csoport rezonátor:** Koncentráltan, a tér egy pontjához kötődő (pl.: csőkeresztmetszetben) feladat egy (egyedi) rezonátorral oldható meg. Egyedi rezonátort alkalmaznak például kioltási interferencia létesítésére oldalági rezonátor hangtompítóban, vagy frekvencia kiemelés létrehozására fúvós hangszerekben. Ha a rezonátornak a feladata ellátásához a hangtérrel nagy felületen kell kapcsolatba kerülni, a kifejtett hatás fokozása érdekében több rezonátort építenek be egymás mellé, ennek a neve csoport-rezonátor. Csoport-rezonátort építenek be rendszerint csillapítás, szórás és utözengetés hatások elérése érdekében. Csoport-rezonátor elkészíthető egyedi rezonátorok egymás mellé építésével, de hasonló hatás érhető el jóval egyszerűbben, ha perforált lemezt a merev faltól adott távolságban rögzítünk, ld. ábra. Az ismétlődő geometria és hasonló gerjesztés miatt az egyes szektorokban kialakuló áramlás elválasztó felületek beépítése nélkül is egyező lesz az egyes lyukak mögött.



Csoport-rezonátor kialakítása faltól megfelelő távolságban rögzített perforált lemezzel

**Nyak korrekció:** Gyakorlati megfigyelés, hogy nagy keresztmetszetű, rövid rezonátor nyak esetén a méréssel meghatározott rezonancia frekvencia rendre kisebb, mint a számolt. A probléma megoldása a rezonátor működését leíró matematikai modell mozgásegyenletében van. A mozgásban lévő levegő mennyiségét a nyak térfogata (keresztmetszet és hossz szorzata) alapján határoztuk meg. Áramlástani ismereteink alapján biztosan kijelenthetjük, hogy közvetlenül a nyak két végén az áramlási sebesség nem csökken nullára. A korrekciót a korrigált nyakhossz bevezetésével oldjuk meg, amely a valós geometriai hosszúságot annyival növeli, hogy a kiadódó többlet tömeg révén a számolt és mért rezonancia frekvenciák egymással egyenlők lesznek. A korrigált nyakhossz ( $L_k$ ) a következő összefüggéssel határozható meg,

$$L_k = L + 0,9 \sqrt{A}$$

A korrekciónak elsősorban a rövid, nagy keresztmetszetű rezonátor nyak (pl.: perforált lemezből készült csoport-rezonátor) esetén van fontos szerepe.

## 6.2. Gyakorló feladatok

Gy.1. Vezesse le a harmonikus gerjesztés hatására a Helmholtz-rezonátor nyakában kialakuló levegő mozgást leíró differenciál egyenletet. A levezetés minden lépését írja le, sorolja fel az egyszerűsítő feltételeket, illetve az elhanyagolásokat indokolja! Adja meg és magyarázza a Helmholtz-rezonátorok gyakorlati alkalmazási lehetőségeit, válaszához készítsen vázlatrajzot!

-----