1. AZ AKUSZTIKA ALAPJAI ORVOSBIOLÓGIAI MÉRNÖKHALLGATÓK SZÁMÁRA (BME)

1.1. Bevezető

Az akusztika vagy más néven hangtan valamely folytonos közegben kialakuló, terjedő és elhaló mechanikai zavarások leírásával foglalkozik. Attól függően, hogy a keltett zavarás levegőben, vagy más gázban, vízben vagy ettől eltérő folyadékban illetve szilárd halmazállapotú, de rugalmas közegben hat, léghang-akusztikáról, hidro-akusztikáról illetve testhang-akusztikáról beszélünk. Az akusztika a természettudományok közül a fizikán belül első sorban a mechanika és termodinamika fejezetekkel áll szorosabb kapcsolatban. Tágabb értelemben, a hang hatását, létrehozó rendszerét és módosulásának körülményeit is figyelembe véve számos más szakterülettel áll kapcsolatban. Így például a szabadtéri hangterjedésen keresztül a légkör fizikával, a hangkeltő és érzékelő berendezések révén az elektroakusztika az elktrotechnikával, a víz alatti hangterjedés révén a hidroakusztika az oceanográfiával, a zaj keletkezésével és a zajvédelemmel kapcsolatban főként a gépészettel, az előadótermek és részben a zajvédelem kapcsán az épület- és teremakusztika az építészettel, illetve a hangszerek révén a zenei akusztika a zenével. Ebbe a kapcsolat rendszerbe helyezhető be a komunikációban fontos szerepet játszó beszéd és hallás akusztikája, a hang illetve zaj élő szervezetre, kiemelten az emberre kifejtett hatását vizsgáló fiziológiai és pszichoakusztika, vagy az emberi szervek által lesugárzott zörejek elemzése és az ultrahang felhasználása, betegségek diagnosztizálásához, a bioakusztika.

1.2. Alapfogalmak

Az alábbiakban néhány, az akusztikában fontos alapfogalmat vezetünk be, illetve csoportosítást végzünk el, amely segít elhelyezni az akusztikában előforduló jelenségeket a mechanika fejezetén belül.

1.2.1. A vivő-közeg akusztikai szempontból fontos fizikai tulajdonságai

Feltételezésünk szerint a hangterjedésnek teret adó vivő-közeg akusztikai szempontból, az alábbi legfontosabb fizikai tulajdonságokkal rendelkezik:

-Homogén (azaz egynemű) kontinuum, vagyis a teret folytonosan kitöltő olyan közeg, amelyet akármilyen kicsiny részekre bonthatunk, mindig az eredeti közeghez hasonló anyagi tulajdonságokkal rendelkező elemet kapunk. Ez azt jelenti, hogy nem vesszük figyelembe a folyadék molekuláris szerkezetét. Ez a közelítés az esetek többségében azért engedhető meg, mert bár a mozgások elemzése során sokszor a finom térbeli részletek is érdekesek lehetnek, azonban ezek mérete az esetek többségében még mindig jóval nagyobb, mint a folyadék molekuláris szerkezetének jellemző mérete.

-A gázok és folyadékok összenyomhatóak, a szilárd de rugalmas testek pedig deformálhatóak. Ha ez a feltétel nem teljesül, úgy a közeg egy adott pontját érő zavarás bármely más pontban azonnal megfigyelhető, és így véges nagyságú zavarás terjedési sebesség hiányában hullámtér eleve nem alakulhat ki.

1.2.2. A molekuláris felépítésű közeg mozgásával járó jelenségek makroszkópikus és mikroszkópikus vizsgálata

Az előző pontban láttuk, hogy a hangteret leíró modell megalkotásánál a molekuláris szerkezetű közeget folytonos kontinuumnak tekintjük. Mielőtt a kontinuum modell nyújtotta előnyöket kihasználva a hangterek leírását elkezdenénk, érdemes a valóságban véges méretű részecskékből felépülő közeg mikroszkópikus és makroszkópikus egységeit, és a segítségükkel értelmezhető mozgásokat megvizsgálni. Az áramló közeg mikroszkópikus részének a közeg mozgás szempontjából még fontos legkisebb alkotóelemet, a molekulát tekintjük. Az igen nagy számú mikroszkópikus egységet magába foglaló nagyobb közeg részt makroszkópikus elemnek nevezzük. A geometriai felbontás tekintetében kétféle megközelítés szerint a közeg illetve a közeg részecskék mozgását vizsgálva az alábbi csoportosítást végezhetjük el:

-Diffúzió:
A diffúzió a makroszkópikusan nyugalomban lévő közeg molekuláinak rendezetlen, Bown-féle mozgásának következtében kialakuló helyzet változtatása. A molekulák diffúziós mozgásuk során kellő idő elteltével eredeti helyzetükhöz képest jelentősen eltávolodhatnak, egymáshoz képesti helyzetük pedig teljesen megváltozik. Jelentős diffúziós mozgással csak gázok esetében kell számolnunk.

-Szilárd test mozgása térben, gáz és folyadék halmazállapotú közeg áramlása **(konvekció):**
A hétköznapi értelemben vett mozgás, vagyis a közeget alkotó molekulák rendezett, makroszkópikus mozgása. Az ilyen mozgás során a molekulák eredeti helyzetükhöz képest jelentősen eltávolodhatnak, evvel szemben szűk környezetüket tekintve egymáshoz képesti helyzetüket általában csak kis mértékben változtatják.

-Akusztikai hullám:
A közeg illetve az őt alkotó molekulák rendezett mozgási állapotában bekövetkezett zavarás továbbterjedése. A hullámterjedés során a közeget alkotó molekulák végeznek ugyan összerendezett makroszkópikus mozgást, de nyugalmi helyzetüktől, legalábbis a hullámterjedés geometriai méreteihez képest, soha nem távolodnak el jelentősen. Ennek megfelelően rendszerint egymáshoz képesti helyzetüket is csak kis mértékben változtatják meg.

Természetesen a különböző mozgás formák egyidejűleg is felléphetnek ugyanabban a közegben, sőt valóságos közeg mozgásoknál az esetek többségében mindhárom egyszerre is megtalálható.

1.2.3. Rezgés és hullám:

Rezgés: Általánosságban rezgésnek nevezünk minden olyan fizikai jelenséget, amelynél a rendszert leíró jellemzők egy egyensúlyi érték körüli ingadozást mutatnak. Rezgés olyan rendszerben alakul ki, amelynek van tehetetlensége, és az egyensúlyi állapotából történő kitérítésre mindig az eredeti állapotának visszaállítására törekszik. Hétköznapi értelemben rezgés alatt általában mechanikai rezgéseket értünk. Ebben az esetben ha a visszatérítő erő arányos a rezgést végző tömeg kitérésével harmonikus rezgés alakul ki. A harmonikus rezgés jellemzőit szinusz függvény írja le.

Hullám: A hullám egy zavarási állapot továbbterjedés. Alapvetően akusztikai (hang) és elektromágneses hullámokat különböztetünk meg. A harmonikus rezgés által létrehozott zavarás továbbterjedése esetén harmonikus hullám alakul ki.

1.2.4. Az akusztikai hullámok csoportosítása a zavarás által a közegben létrehozott deformáció alapján.

A hullámot létrehozó gerjesztés és a vivőközeg jellemzőitől függően, a zavarás hatására a közegben különböző alakváltozási állapotok alakulhatnak ki. A létrehozható alakváltozási állapotoknak és a hullámmozgás sajátosságainak megfelelően általában az alábbi öt hullám típust szokás megkülönböztetni.

-Longitudinális vagy hosszanti **komresszιós hullám**:
A longitudinális vagy hosszanti kompressziós hullámokban a közeg részecskék mindig a hullámterjedés irányával párhuzamosan mozdulnak el. Az azonos zavarási állapotokat elszenvedő, nyugalmi helyzetükben egymással párhuzamos egymástól egyenletes távolságban elhelyezkedő síkokban helyet foglaló közeg részecskék a zavarás hatására továbbra is egymással párhuzamos síkokban helyezkednek el, de a síkok egymástól mért távolsága folyamatosan nő vagy csökken. Longitudinális hullámok gázokban, folyadékokban és szilárd rugalmas testekben egyaránt kialakulhatnak.

-Transzverzális vagy **nyírási hullám**:
A transzverzális vagy nyírási hullámokban a közeg részecskék mindig a hullámterjedés irányára merőlegesen mozdulnak el. A nyugalmi helyzetükben egymással párhuzamos, egymástól egyenletes távolságban elhelyezkedő síkok a zavarás hatására továbbra is egymástól azonos távolságban, párhuzamosan de a hullámterjedésre merőleges irány mentén elcsúszva helyezkednek el. Transzverzális hullámok csak szilárd rugalmas testekben alakulhatnak ki, hiszen gázokban és folyadékokban az egymással párhuzamos közeg rétegek nyíró elmozdulásával szemben nem ébred rugalmas visszatérítő erő.

-**Hajlítási hullám**:
A hajlítási hullámokban a közeg részecskék döntően a hullámterjedés irányával párhuzamosan mozdulnak el. Azonban a longitudinális hullámokkal szemben, az azonos zavarási állapotokat elszenvedő, eredően egymással párhuzamos, egyenlő távolságben elhelyezkedő síkok a zavarás hatására a síkok párhuzamossága megszűnik és a hajlítás alakváltozási állapotának megfelelő elrendeződést vesznek fel. Hajlító hullámok szilárd rugalmas anyagból készült rudakban és véges vastagságú lapokban alakulhatnak ki.

-**Torziós hullám**:
A torziós hullámokban a közeg részecskék mindig a hullámterjedés irányára merőlegesen mozdulnak el. Az azonos zavarási állapotokat elszenvedő, nyugalmi helyzetükben egymástól egyenletes távolságban elhelyezkedő, párhuzamos közegsíkok a zavarás hatására továbbra is egymással párhuzamosan, egyenlő távolságban helyezkednek el, de a síkok a hullámterjedéssel párhuzamos irány mentén egymáshoz képest elfordultak. Torziós hullámok szilárd rugalmas anyadból készült rudakban alakulhatnak ki.

-**Rayleigh-féle hullám**:
A Rayleigh-féle hullámokban a közeg részecskék mozgásuk során ellipszis alakú pályát futnak be. A Rayleigh hullámokra jellemző, hogy a vivőközeg felületétől az anyag belseje felé távolodva a zavarás hatására bekövetkező mozgás amplitúdója egyre csökken. Rayleigh-féle hullámok szilárd rugalmas testek felületén alakulnak ki. (A Rayleigh hullámok hasonlítanak, de nem egyeznek meg a folyadékok felszíni hullámaival.)

1.2.5. Léghangok

Az akusztika szempontjából a levegőnek, mint vivőközegnek kiemelt szerepe van (emberi komunikáció, zajvédelem). Ezért a továbbiakban a léghangok leírásával foglalkozunk.

A léghang egy olyan hullám, amely révén a levegőt illetve annak mozgását leíró fizikai jellemzőkben bekövetkezett zavarási állapotok terjednek tovább. Ez azt jelenti, hogy ha a levegő részecskét eredeti állapotához képest megzavarjuk, például adott sebességgel meglökjük, akkor az ennek hatására a mozgásállapotában (kitérés, sebesség, gyorsulás), nyomásában, sűrűségében és hőmérsékletében bekövetkezett módosulás bizonyos idő elteltével a tér egy másik pontjában lesz megfigyelhető. Vagyis a zavarási állapot véges sebességgel a környezetében tovaterjed. Fontos megjegyezni, hogy szabad hullámterjedési viszonyokat feltételezve a tér egy adott pontjában létrehozott egyszeri gerjesztés hatására egy távolabbi pontban egyszeri zavarás alakul ki. Gázokban, így levegőben is a zavarás hatására kitérő részecskékre ható rugalmas visszatérítő erő kizárólag a szomszédos részekben öszenyomódott és kitágult gáz nyomáskülönbségéből származik. Továbbá a mozgástörvény értelmében az éppen megzavarás előtt álló közegrészecske mozgásállapot változásának irányát a ráható nyomásgradiens iránya határozza meg. Így léghangok esetében az újabb kitérést létrehozó nyomászavarás mindig az előző részecske mozgásával párhuzamos irányból érkeznek. Ennek megfelelően szabad hangterjedési viszonyok mellett a hullámtér bármely pontjára igaz, hogy a zavarás terjedés és a részecskesebesség iránya egymással párhuzamos. Másként fogalmazva a léghangok longitudinális hullám formájában, a forrástól távolodva terjednek.

1.2.6. A hang kettős természete

Összefoglalva az eddig leírtakat a léghangok kettős, nevezetesen hullám és kontinuum áramlás természettel rendelkeznek. Vagyis a léghangokhoz kötődő megfigyelések egy része arra utal, hogy a zavarási állapotok során sajátos tulajdonságokkal rendelkező áramlási jelenség alakul ki. Pontosabban egy átlagos hangtér tetszőleges pontjában az összenyomható közeg nagyon rövid ideig tartó, nagyon kis amplitúdójú, instacioner mozgását tapasztaljuk. Erről gyorsan változó, kis értékek mérésére alkalmas nyomás- és sebességmérő műszerekkel győződhetünk meg. Másfelől a hang hullám természetét bizonyítja, hogy a hang révén az áramlási térben létrehozott zavarási állapotok makroszkópikus közeg mozgás nélkül tovaterjednek, illetve az, hogy a hang kifejezetten a hullámokra jellemző elnyelődési, törési, elhajlási, szóródási és interferencia jelenségek létrehozására képes. Természetesen a léghangoknál megfigyelhető kettős természet annak ellenére, hogy bizonyos általánosításban eltérő fejezetekbe sorolandók, szoros összefüggésben vannak egymással.

1.3. A homogén akusztikai hullámegyenlet

A léghangok terjedése során a levegő részek sajátos áramlása jön létre. Feltételezésünk szerint ennek során a kialakuló nyomás változás a vivő-közeg, jelen esetben a levegő sűrűségének és hőmérsékletének megváltozásával jár együtt. Ezért a hangteret az őt kitöltő közeg áramlástani és termodinamikai jellemzőivel (sebesség, nyomás, sűrűség, hőmérséklet) írhatjuk le. Az így adódott változók közötti kapcsolat megteremtéséhez olyan fizikai alapelveket kell keresnünk, amelyek teljesülnek a hangterjedés során kialakuló fizikai folyamatokban. Mint általában a mechanikában, a hangtér bármely pontjában, és annak szűk környezetében létrejövő áramlási jelenségre is teljesül a tömeg-, az impulzus-, és az energiamegmaradás elve. A három megmaradási elvet matematikai formába öntő egyenlet:

A ***tömegmegmaradás*** elvét kifejező **kontinuitás-egyenlet**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{v}) = 0 \tag{1}$$

Ahol: ρ $[\mathrm{kg/m^3}]$ az áramló közeg (tömeg)sűrűsége.

t [s] az idő.

$\underline{v}$ [m/s] a közeg áramlási sebessége.

Az ***impulzumegmaradás*** elvét kifejező mozgásegyenlet súrlódásmentes folyadékokra vonatkozó alakja, az **Euler-egyenlet**:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{D}}\,\underline{v} = -\frac{1}{\rho} grad\ p + \underline{g} \tag{2}$$

Ahol: $\underline{\underline{D}}$ [1/s] a sebességtér derivált tenzora.

p [Pa] a közegben mérhető nyomás.

$\underline{g}$ [N/kg] a folyadékrészecske tömegegységére ható térerő.

Illetve az ***energiamegmaradás*** elvét kifejező energiaegyenlet termodinamikában használatos alakja, a hőtan **I. főtétel**e elemi folyamatra:

$$dq = c_v dT + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{3}$$

Ahol: q [J/kg] a rendszer tömegegységével közölt hő $q = Q/m$.

c_v [J/kgK] a közeg állandó térfogaton vett fajhője $c_v = 1/m \, \frac{dQ}{dT}$.

Továbbá tekintsük a levegőt ideális gáznak. Így a hangteret leíró, négy ismeretlen változó közötti matematikai kapcsolat megalkotásához szükséges negyedik összefüggést az ideális gázokra vonatkozó ***állapotegyenlet***e adja:

$$\frac{p}{\rho} = R/M\, T = R^* T \tag{4}$$

Ahol: R [8.3 J/K] az általános gázállandó.

M [kg] a móltömeg.

R^* [J/kgK] a hullámterjedésnek teret adó közegben a speciális gázállandó: $R^* = R/M$.

Az (1-4) parciális differenciálegyenlet-rendszert és az adott feladathoz tartozó kezdeti- és peremfeltételeket kielégítő p, v, ρ és T megoldás függvények a hangteret leíró, keresett változók. A megoldás közvetlen előállítása azonban, figyelembe véve a fenti egyenletrendszert, kiemelten annak nemlineáris jellegét, komoly nehézségekbe ütközik. Ezért vizsgáljuk meg azt, hogy a hang tényleges fizikai tulajdonságainak figyelembe vételével melyek azok az egyszerűsítő feltételek, amelyek az egyenletrendszer megoldását megkönnyítik, de a zavarásterjedés során létrejövő alapvető folyamatok leírását nem zavarják meg.

1.3.1. A lineáris akusztikai közelítés

Az (1-4) parciális differenciálegyenlet-rendszer egyszerűsítése érdekében a keresett hangtéri jellemzőket bontsuk fel egy időben állandó, egyensúlyi és egy időben változó, ingadozó összetevőre. Ennek megfelelően:

$$p = p_0 + p' \qquad \underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{v}' \qquad \rho = \rho_0 + \rho' \qquad T = T_0 + T' \qquad (5)$$

Ahol: -Az index nélküli változó a teljes mennyiség.
-A "o" index az adott változó egyensúlyi, időben állandó összetevőjét jelöli.
-A " ' " index az adott változó időben ingadozó összetevőjét jelöli.

(Akusztikai szóhasználattal p'-t hangnyomásnak, $\underline{v}'$-t a részecske (kontinuum darab) sebességnek nevezzük.)

Továbbá tételezzük fel, hogy:
-A nyomás, sűrűség és hőmérséklet értékekben a zavarás hatására létrejövő ingadozó kompónensek az egyensúlyi értékeikhez képest jóval kisebbek, illetve a részecskesebesség általában a természetben megfigyelhető áramlási jelenségek sebességéhez képest jóval kisebb.

$$\frac{p'}{p_0} << 1 \qquad \frac{\rho'}{\rho_0} << 1 \qquad \frac{T'}{T_0} << 1$$

(Hang esetében ezen a feltételezések a létjogosultsága mérésekkel bizonyítható.)

-A hangteret leíró változók folytonos függvények, másként fogalmazva a hangtér nem tartalmaz különlegesen magas frekvenciájú összetevőket.

-A zavarás nyugvó közegben jön létre, azaz $v_0 = 0$ m/s.

-A hullámterjedésnek teret adó vivő-közeg időben állandó, térben homogén erőtérben helyezkedik el. Illetve a hidrostatikai nyomásváltozás hatására a terjedő hang hullámhosszával összemérhető távolság mentén a vivő-közeg sűrűsége elhanyagolhatóan kis mértékben változik meg.

Ezután alkalmazzuk a (5) összefüggésekben bemutatott felbontást és a bevezetett egyszerűsítő feltételeket a kontinuitás egyenletre (1).

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + div\left((\rho_0 + \rho')(\underline{v}_0 + \underline{v}')\right) = 0$$

Végezzük el a lehetséges szorzási műveleteket, majd az összegben szereplő tagokra egyenként írjuk elő a rájuk vonatkozó differenciálási utasítást:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + div(\rho_0 \underline{v}_0) + div(\rho_0 \underline{v}') + div(\rho' \underline{v}_0) + div(\rho' \underline{v}') = 0$$

A fenti egyenlet első tagja nullával egyenlő, hiszen ρ_0 időben nem változik. A harmadik és ötödik tagokban a differenciálási utasítás olyan mennyiségekre vonatkozik amelyekben $\underline{v}_0$ szorzó tagként szerepel, így ezek értéke is nulla. A negyedik és hatodik tagokat bontsuk fel az idevonatkozó vektoranalitikus azonossáság segítségével:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 div(\underline{v}') + \underline{v}' grad\,\rho_0 + \rho' div(\underline{v}') + \underline{v}' grad\,\rho'$$

Az így kapott egyenlet harmadik tagja a vivő-közeg egyensúlyi sűrűségének elhanyagolhatóan kis térbeli megváltozása miatt hagyható el. A negyedik és ötödik tag egy kis mennyiség és egy kis mennyiség kis megváltozásából álló szorzatok ezért úgy is fogalmazhatunk, hogy nagyságuk másodrendben kicsiny. Összehasonlítva őket a hozzájuk képest jóval nagyobb, csupán elsőrendben kicsiny első két taggal, az egyenletből a leírás pontosságának megőrzése mellett a negyedik és ötödik tagok is elhagyhatók. Az így kapott egyenletet lineáris akusztikai kontinuitásegyenletnek nevezzük:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \, div\left(\underline{v}'\right) = 0 \tag{6}$$

Hasonlóan járunk el a mozgásegyenlet esetében is. A változók felbontása és az adódó szorzás elvégzése után:

$$\frac{\partial \underline{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial \underline{v}'}{\partial t} + \underline{\underline{D}}_0 \underline{v}_0 + \underline{\underline{D}}_0 \underline{v}' + \underline{\underline{D}}' \underline{v}_0 + \underline{\underline{D}}' \underline{v}' = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} grad\left(p_0 + p'\right) + \underline{g}$$

Az egyenlet bal oldalán v_0-t önmagában és szorzókén tartalmazó első, harmadik, negyedik és ötödik tagokat illetve a másodrendben kicsiny hatodik tagot elhagyva, továbbá használjuk ki, hogy a zavarás hatására bekövetkező sűrűség változás elhanyagolhatóan kicsi, azaz $1/\left(\rho_0 + \rho'\right) \approx 1/\rho_0$, illetve némi átrendezés után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t} = \underline{g} - \frac{1}{\rho_0} grad \; p_0 - \frac{1}{\rho_0} grad \; p'$$

A hidrosztatika alapegyenletének ismeretében könnyen belátható, hogy a fenti egyenlet jobb oldalának első két tagjának összege éppen nulla. A maradék két tag a lineáris akusztikai mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} grad \; p' \tag{7}$$

A hangterjedés során a közegben kialakuló kicsi összenyomódások és kitágulások olyan gyorsan alakulnak ki, illetve változnak, hogy emiatt az egymással szomszédos, az eltérő zavarási állapot miatt különböző hőmérsékletű folyadékrétegek között számottevő hőcsere nem alakulhat ki. Ezért a zavarásterjedés során a közegben létrejövő állapotváltozás termodinamikailag adiabatikusnak tekinthető. Ennek következtében energiaegyenlet (3) bal oldala nullával egyenlő. Fejezzük ki az elemi fajtérfogat (a fajtérfogat a sűrűség reciproka) változást a sűrűség függvényében:

$$d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2} \tag{8}$$

Fejezzük ki az ideális gázokra vonatkozó állapotegyenlet segítségével az elemi hőmérséklet sűrűség és nyomás változás közötti kapcsolatot:

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) = d\left(R^* T\right) \qquad \rightarrow \qquad \frac{dp}{\rho} + p \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) = R^* dT$$

$$dT = \frac{dp}{\rho R^*} - p \frac{d\rho}{\rho^2 R^*} \tag{9}$$

Helyettesítsük be az így kapott kifejezéseket (8), (9) az energiaegyenlet (3) adiabatikus állapotváltozásokra vonatkozó alakjába (dq = 0):

$$c_v \left(\frac{dp}{\rho R^*} - \frac{p d\rho}{\rho^2 R^*} \right) = p \frac{d\rho}{\rho^2}$$

Felhasználva, hogy az adibatikus kitevő segítségével: $\kappa = {}^{c_p}\!/_{c_v} = \left(c_v + R^*\right)/c_v$, a fenti egyenlet az alábbi egyszerűbb alakra rendezhető:

$$\frac{c_v}{R^*}\frac{dp}{\rho} = \left(\frac{c_v}{R^*}+1\right)p\frac{d\rho}{\rho^2}$$

$$c_v\,dp = \left(\frac{c_v}{R^*}+1\right)R^*\left(\frac{p}{\rho}\right)d\rho$$

$$dp = \kappa R^* T \cdot d\rho \qquad (10)$$

Legyen a $\kappa R^* T$ szorzat jele "c^2": $$c^2 = \kappa R^* T \qquad (11)$$

Gázoknál szokásosan definiált K_{ad} adiabatikus (izentrópikus: S=áll.) kompresszibilitás segítségével:

$$K_{ad} = -\,{}^{1}\!/_{V}\left(\frac{dV}{dp}\right)_S \text{ avagy; } K_{ad}^{-1} = {}^{1}\!/_{\rho}\left(\frac{d\rho}{dp}\right)_{ad} \text{ ; így}$$

$$c = \sqrt{\kappa R^* T} = \sqrt{\frac{K_{ad}}{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{ad}} \text{ ; ideális gázra: } K_{ad} = \kappa\, p \text{ ; így: } c = \sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}}$$

$$c_{hang}^{gáz} = \sqrt{\kappa^g \frac{RT}{M^g}} \text{ ; } c_{hang}^{levegő} = 20{,}08\sqrt{T}$$

$$\kappa^{levegő} = 1.40 \text{ ; } M^{levegő} = 29.0\ kg$$

$$c_{hang}^{levegő} = 340\ m/s \text{ ; (T = 293 K)}$$

Vegyük észre, hogy a (10) kifejezés jobb oldalán található $\kappa^g R^* T$ együttható mindig pozitív, és közelítőleg állandónak tekinthető, hiszen κ^g és R^* a gáz anyagi minőségétől függő konstansok, T pedig az egyensúlyi és ingadozó komponensekre viszonyára tett adiabatikus megkötés miatt tekinthető alig változónak (lásd alább (13’)). Az energia- és a gáz állapotegyenletből nyert (10) kifejezés fizikai tartalma az, hogy veszteségmentes, adiabatikus zavarás terjedési viszonyok mellett, a sűrűség növekedés mindig nyomás növekedést eredményez, illetve az elemi *sűrűség növekedés* közelítőleg *egyenesen arányos* a létrejövő elemi *nyomás változással*. A hangnyomás és a sűrűségingadozás közötti matematikai kapcsolat előállításához használjuk ki, hogy a hagterjedés során a hangnyomás és sűrűségingadozás amplitúdók értéke olyan kicsi, hogy a kapcsolat jó közelítéssel lineárisnak tekinthető.
Így a (10) egyenlet szerint felírható:

$$p' \cong c^2 \cdot \rho' \qquad (12)$$

Ha a (10) összefüggésből dp-t kifejezzük, és a (9) egyenletbe behelyettesítjük, akkor némi átalakítás után az elemi hőmérséklet változásra, dT-re az alábbi kifejezést kapjuk:

$$dT = \frac{\kappa - 1}{\kappa R^* \rho} \cdot dp \qquad (13)$$

avagy $${}^{dT}\!/_{T} = \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot {}^{dp}\!/_{p} \text{ , } \quad \text{ahol } \frac{\kappa^{lev}-1}{\kappa^{lev}} \approx 0.285$$

(13’)
A sűrűségingadozás és hangnyomás közötti kapcsolathoz (10) hasonlóan, a hőmérséklet ingadozás és a hangnyomás között is közelítőleg lineáris kapcsolat van. Kihasználva, hogy a hangterjedés során a hőmérsékletingadozás és a hangnyomás amplitúdói igen kicsik:

$$T' \cong \frac{\kappa - 1}{\kappa R^* \rho} \cdot p' \qquad (14)$$

A bevezetett egyszerűsítő feltételeknek köszönhetően létrehoztuk a hangteret leíró változók között kapcsolatot teremtő lineáris egyenletrendszert. Amíg a (6) és (7) egyenleteket helytől és időtől függő parciális differenciálegyenletek, addig a (12) és (14) egyenletek már közvetlenül a keresett hangtéri változók közötti lineáris összefüggések.
A **lineáris** akusztikai meg**közelítés** egyik előnyös következménye az egyszerű matematikai formalizmus, a hangteret leíró egyenletrendszer könnyű kezelhetősége. A másik előnyös tulajdonság az, hogy két vagy több hangforrás együttes hatása az összetevő források külön-külön vett hangterének az egyszerű összetételéből származtatható (szuperponálható). Ennek megfelelően az adott eredő hangtéri jellemző az egyes hullámösszetevők által létrehozott adott hangtéri jellemzők **egyszerű összeg**eként állítható elő. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az egy időben, azonos környezetben terjedő akusztikai hullámok között nincs kölcsönhatás, minden hullám függetlenül halad a másiktól. Ennek a létjogosultságát mi sem igazolja jobban, mint az az egyszerű megfigyelés, hogy egy időben két egyformán közepesen hangos beszélgetés akusztikailag külön-külön jól érthető, tehát a két beszéd akusztikailag egymást nem befolyásolja.

1.3.2. A homogén akusztikai hullámegyenlet és megoldásai

Fejezzük ki a (12) egyenletből ρ'-t és helyettesítsük be a linearizált akusztikai kontinuitás egyenlet (6) első tagjába. Ezt követően a bal oldal második tagját vigyük át a jobb oldalra, és deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát idő szerint.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(div\left(\underline{v}'\right)\right) \qquad (15)$$

(ρ_0 időben állandó, ez megközelítőleg igaz c^2-re is, így mindkét mennyiség kiemelhető az deriválási utasítás elé.)

Ezután szorozzuk meg a linearizált akusztikai mozgásegyenlet (7) mindkét oldalát az egyensúlyi sűrűség mínusz egyszeresével, és vegyük mindkét oldal divergenciáját:

$$-\rho_0 div\left(\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t}\right) = div\, grad\ p'$$

(16)

Használjuk ki, hogy a hely- és idő szerinti deriválás sorrendje felcserélhető, és tegyük egyenlővé a (15) egyenlet bal oldalát a (16) egyenlet jobb oldalával. Továbbá vezessük be a $divgrad = \Delta$, Laplace-operátor jelölését, szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát c^2-el, és rendezzük az egyenlet két tagját azonos oldalra. Eredményül a hangnyomásokra kifejezett homogén, lineáris, akusztikai hullámegyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0 \qquad (17)$$

A levezetés során kiküszöbölt változók cseréjével (17)-el megegyező alakú egyenlet vezethető le a részecskesebesség, sűrűség- és hőmérsékletingadozás változókra is.

Az így kapott hullámegyenlet egyik legfontosabb fizikai tartalmának megértéséhez a továbbiakban vizsgáljuk a derékszögű koordináta-rendszerben x irány mentén, síkhullámok formájában terjedő zavarásokat. Az ilyen zavarások esetében a hangteret leíró változók csak az időtől és az x koordinátától függenek. Ebben az esetbe a (17) egyenlet az alábbi alakot veszi fel:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \qquad (18)$$

A végtelen kiterjedésű folytonos közegben szabadon terjedő síkhullámok esetében a (18) egyenlet általános megoldását az alábbi hullámfüggvény adja:

$$p'(t,x) = f(t - x/c) + g(t + x/c) \qquad (19)$$

A megoldás helyessége könnyen ellenőrizhető, ha a (19) összetett függvény megfelelő hely és idő szerinti másodrendű deriváltjait visszahelyettesítjük a (18) egyenletbe.
Vegyük észre, hogy a f és g tetszőleges függvények, vagyis a zavarás alakjára a hullámegyenlet nem tesz megkötést. Az egyetlen megszorítás az f és g függvény-argumentumok alakjában keresendők. Vagyis kezdeti- és peremfeltételek nélkül a hullámegyenletet tetszőleges $(t \pm x/c)$, vagy ennek azonos átalakításával nyert argumentumú függvény kielégíti. Válasszuk ki a (19) megoldás függvény jobb oldalának első tagját. Legyen az így kapott hullámfüggvény értékét egy tetszőleges t_1 időpontban és x_1 helyen p'^*. Ezt követően vizsgáljuk meg, hogy valamivel később, t_2 időpontban ugyanazt a hullámfüggvény értéket, p'^*-t hol találhatjuk meg. Egy tetszőleges hullámfüggvény esetében ugyanazt a függvényértéket ugyanannak az argumentumnak a behelyettesítésével kaphatjuk meg. Az argumentumok egyenlősége azonban x_2 értékét megköti. Vizsgáljuk meg, hogy a hullámfüggvény tetszőleges kötött pontjához tartozó hely és idő változók között milyen kapcsolat húzódik.

Ha $\boldsymbol{p}'^*_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}_1} = \boldsymbol{p}'^*_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}_2}$ akkor $f(t_1 - x_1/c) = f(t_2 - x_2/c)$ vagyis

$$t_1 - x_1/c = t_2 - x_2/c \ .$$

Ezek alapján a keresett x_2 koordináta értéke:

$$x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1)$$

Némi átalakítás segítségével az előző kifejezés:

$$c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Belátható, ha a hullámfüggvény tetszőleges p'^* pontjához tartozó tér- és időkoordináták különbségének hányadosa az alábbi alakban fejezhető ki, akkor az "***c***" változó úgy tekinthető, mint egy ***sebesség***, pontosabban a p'^* zavarási állapot terjedési sebessége, vagy hullám***sebesség***. Azt a felületet, amely mentén az azonos zavarási állapotot elszenvedő részecskék elhelyezkednek hullámfelületnek hívjuk. Mivel az idő előrehaladtával $(\boldsymbol{t}_2 > \boldsymbol{t}_1)$ a vizsgált hullámfelület nagyobb x értékű helyre jutott $(\boldsymbol{x}_2 > \boldsymbol{x}_1)$, így belátható, hogy az f függvény az x tengely pozitív iránya mentén haladó hullám mozgását írja le. Hasonló gondolatmenet segítségével belátható, hogy a g függvény viszont az x tengely negatív iránya mentén haladó hullámokat adja meg.
Összefoglalva az eddig leírtakat a (17) homogén hullámegyenlet és a hozzátartozó (19) jellegű megoldás fizikai jelentése az, hogy a tér adott pontjában a közeg nyomás, sebesség, sűrűség és hőmérséklet kicsiny megváltozásaként keltett zavarási állapotok térben hullámsebességgel tovaterjednek. A hullámmozgás további részletei a terjedésnek teret adó környezet és a hullámkeltés jellemzőitől, vagyis a hullámegyenlet peremfeltételeitől függenek.
(Megjegyezzük, hogy a (17) hullámegyenlet megoldása (19)-től eltérő alakban is származtatható, illetve a (17) hullámegyenlet levezetése során felhasznált egyszerűsítő feltételek elhagyásával a hang keletkezésének és elhalásának körülményei is leírhatóvá válnak.)

1.4. Harmonikus hullám

Harmonikus gerjesztés hatására harmonikus, más néven monokromatikus hullám keletkezik. A harmonikus hullám a szinusz illetve koszinusz függvénnyel írható le. A hullámegyenlet megoldásai közül a harmonikus hullámoknak egyfelől azért van kiemelkedő jelentőségük, mert a harmonikus hullám a spektrális elemzés alapeleme. Másfelől a véges mértetű testek szabad rezgései jó közelítéssel harmónikus rezgések, vagy legalábbis ezek kombinációjából összeálló mozgások, így az általuk létrehozott zavarás harmonikus hullám lesz.

A harmonikus mozgások leírására alkalmas szinusz és koszinusz függvény bevezetése miatt az idő mértékegységű argumetumról célszerű áttérni a szög mértékegységűre. Hasonlóan a harmonikus rezgő mozgásokhoz a harmonikus hullámoknál is található egy olyan egyenletes ω szögsebességgel forgó vektor, amelynek az adott irány mentén leképzett vetületi értékének változása éppen az adott hullámtéri változóéval egyenlő. Amíg azonban rezgések esetében a forgó vektor szöghelyzete, fázisszöge csupán a rezgő mozgás idő változójával volt összeköthető, addig hullámok esetében a forgóvektor fázisszögét a hullámmozgás idő és tér változójával együtt kell összekapcsolni. Miközben a hullám egy periódusa lezajlik, vagyis állapota éppen a legutóbbi hasonló állapotába kerül vissza, a forgóvektor egy teljes körülfordulást végez, vagyis 2π fázisszöget tesz meg. A hullám egy teljes periódusának befogásához egy rögzített pontban éppen T periódusidőnek kell eltelnie, illetve egy adott időpontban a hullámterjedés iránya mentén éppen egy λ hullámhosszat kell megtennünk. A periódusidő reciproka f, a frekvencia. Ezek alapján könnyen előállítható egy olyan argumentum, amely az idő és távolság növekedését megfelelően összehangolja a fázisszög változásával. Például egy, a pozitív x tengely irányába haladó harmónikus hullám:

$$p'(x,t) = \hat{p}\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Ahol:

p'(x,t)	[Pa]	A hang***nyomás*** tér- és időbeli változását leíró hullámfüggvény.
$\hat{p}$	[Pa]	A hang***nyomás*** amplitúdója.
$\omega t - kx + \varphi_0$	[rad]	A hullám ***fázis***szöge.
$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	[1/sec]	A ***szögsebesség***, vagyis az időegység alatt megtett fázisszög nagysága radiánban. (A szögsebesség az őt meghatározó hányadossal biztosítja, hogy a teljes hullám periódus megtételéhez szükséges T idő elteltével a hullámfüggvény argumentuma is 2π fázisszöggel növekedjen.)
$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$	[1/m]	A ***hullámszám***, vagyis a hosszegységre jutó fázisszög nagysága radiánban. (A hullámszám az őt meghatározó hányadossal biztosítja, hogy a teljes hullám periódus megtételéhez szükséges λ távolság megtétele után a hullámfüggvény argumentuma is 2π fázisszöggel növekedjen.)
φ_0	[rad]	A hullámmozgás kezdő, t=0 sec időponthoz és x=0 m helyzethez tartozó ***fázisszöge***.

Harmonikus hullámoknál az azonos zavarási állapotot elszenvedő részecskéket tartalmazó felületet a hozzájuk tartozó forgóvektor helyzet azonos fázisszöge miatt fázisfelületnek hívjuk.

Vizsgáljuk a harmónikus hullámot leíró függvény argumentumának első két tagját, és emeljük ki belőlük ω-t.

$$\omega t - kx = \omega\left(t - \frac{x}{\omega/k}\right) = \omega\left(t - \frac{x}{c_f}\right)$$

Az c_f mennyiség a harmonikus hullám fázissebessége. Vagyis a harmonikus hullám adott fázisához tartozó zavarási állapot a térben ilyen sebességgel terjed.

A szinusz és koszinusz függvények a harmonikus hullámokat tökéletesen leírják, bizonyos algebrai és analitikus műveletek azonban csak nehézkesen végezhető el velük. Ezért a komplex számok trigonometrikus alakján keresztül célszerűnek látszik a harmónikus hullámoknál bevezetett hangtéri változók komplex számokkal történő leírása.

$$\mathbf{p'}(\mathrm{x,t}) = \hat{\mathrm{p}}(\cos(\omega \mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_0) + \mathrm{i} \cdot \sin(\omega \mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_0)) = \hat{\mathrm{p}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega \mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi_0)} =$$
$$= \hat{\mathrm{p}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega \mathrm{t} - \mathrm{kx})} = \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega \mathrm{t} - \mathrm{kx})}$$

Ahol: $\mathbf{p'}(\mathrm{x,t})$ [Pa] a komplex hang***nyomás***.

$\hat{\mathbf{p}}$ [Pa] a komplex amplitúdó.

$\mathbf{i}$ a képzetes egység.

Természetesen a valós fizikai tartalommal a komplex hangnyomásnak csak a valós része bír. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a hangnyomás a komplex számsíkra helyezett forgóvektor valós tengelyre leképzett vetületének felel meg.

$$\mathrm{p'}(\mathrm{x,t}) = \mathbf{Re}(\mathbf{p'}(\mathrm{x,t}))$$

A komplex írásmód bevezetését a komplex algebra nyújtota előnyök kihasználásának lehetősége indokolja. Tényleges fizikai tartalommal bíró hullámtéri jellemzőnek azonban mindig csak valós szám felel meg.

1.5. Hangszínkép spektrális elemzés, keskeny-, terc- és oktávsávos felbontás.

A hangtér egy pontjában, a hangteret leíró változók időfüggvényeit vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy bár az időfüggvények minden információt tartalmaznak a hangtérről, közvetlen elemzésükkel gyakran nem sokra megyünk. Közvetlenül az időfüggvényeik alapján az egyes hangok sokszor alig különböztethetőek meg. Szükség van tehát egy olyan módszerre, ami az időfüggvényben rejtőzködő információt megmutatja számunkra. Egy ilyen módszer az időfüggvény harmonikus komponenseire történő bontása. Ennek során megvizsgáljuk, hogy az adott időfüggvény milyen frekvenciájú, amplitúdójú és fázisú harmonikus időfüggésű kompónensekből állítható elő. Az így nyert hangszínkép természetesen a probléma jellegétől függően már elegendően részletes információt nyújt a hangtérről. A harmonikus analízis lényege a Fourier-transzformáció, azaz, hogy bármely f(t) időfüggvény kifejezhető a megfelelő eloszlással összevállogatott elemi harmonikus kompónenseinek az integrál összegeként.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Az egyes harmonikus elemek erősségét az időfüggvény hasonló integráljával határozhatjuk meg:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Ahol: f(t) az időfüggvény, például a hangnyomás. F(ω) az f(t) időfüggvény spektruma, vagy színképe.

A korábbi méréstechnikai gyakorlathoz kötődően az időfüggvények frekvencia analízisét olyan szűrősorozat közbeiktatásával is elvégezhetjük, amely mindig csak egy adott sávban engedi át a vizsgált jelet. A teljes frekvencia tartománynak azt a felosztását, ahol az adott rész-tartomány felsőhatárértéke éppen az alsó kétszerese, oktávsávos felbontásnak nevezzük. Az adott oktávsáv középfrekvenciáját az alsó és felső határfrekvenciájának a mértani átlagából határozhatjuk meg. Az akusztikai méréstechnikában alkalmazott szabványos oktávsáv-középfrekvenciák: 31.5, 63, 125, 250, 500... Hz. Részletesebb vizsgálatokhoz azonban az oktávsávos felbontás sok esetben túlzottan durvának bizonyult. Ezért vezették be az oktávsávot a mértani haladvány szerint három egyenlő részre osztó tercsávot. Tercsávnak nevezzük tehát azt a frekvencia tartományt, amelynek a felső határérték nagysága éppen az alsó határérték $\sqrt[3]{2}$-szöröse. Az akusztikai méréstechnikában alkalmazott szabványos tercsáv-középfrekvenciák: 31.5, 40, 50, 63, 80, 100, 125... Hz.

1.6. Egyszerű három-dimenziós hangterek

1.6.1. Tetszőleges irányban terjedő sík hanghullám

A térben tetszőleges irányban haladó, ω szögfrekvenciájú harmonikus hullám az alábbi függvénnyel írható le:

$$\mathbf{p'}(\underline{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega \mathrm{t} - \underline{\mathrm{r}}\underline{k})}$$

Ahol: $\underline{\mathrm{k}}$ [1/m] A hullámterjedés irányát megadó hullámszám-vektor.

$$\underline{\mathrm{k}} = \mathrm{k}_{\mathrm{x}} \cdot \underline{i} + \mathrm{k}_{\mathrm{y}} \cdot \underline{j} + \mathrm{k}_{\mathrm{z}} \cdot \underline{k} \qquad \text{illetve} \qquad |\underline{k}| = \frac{\omega}{c_f}$$

1.6.2. Gömbszimmetrikus hanghullám

A másik egyszerű térbeli hangterjedési mód, a ponszerű hangforrás által a homogén, szabad térben létrehozott gömbszimmetrikus hangtér. Helyezzük a hangforrást a vizsgálati koordináta-rendszer kezdőpontjába. Ekkor a hangeret leíró változók csak időtől és a középponttól mért távolságtól függenek. A hullámfelületek a kezdőpont körül, koncentrikus gömbfelületeken helyezkednek el. Az ilyen gömbszimmetrikus hangteret legegyszerűbben szférikus koordináta-rendszer alkalmazásával írhatjuk le. Helyettesítsük be (17) egyenletbe a Laplace-operátor szférikus koordináta-rendszerben érvényes alakját:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p'}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p'}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p'}{\partial\varphi^2}\right) = 0$$

A hangteret leíró változók csupán r-től függenek, így

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{c^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p'}{\partial r}\right) = 0$$

Könnyen belátható, hogy a fenti egyenlet általános megoldása:

$$p'(t, r) = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r}$$

1.7. Hangterek jellegzetes módosulásai

A hang, az őt ért különböző zavaró hatásokra az addigi terjedési viszonyainak jellegzetes megváltozásával válaszol. Ilyen módosulás a hanghullám csillapodása, elhajlása, törése és szóródása.

Csillapodás:
A hang csillapodása, a hanghullámmal terjedő munkavégzőképesség csökkenése a hangterjedés során fellépő veszteségek következtébe. Ilyen veszteséget okoz a folyadék súrlódás, a hővezetés és a molekuláris abszorpció.

Hangelhajlás:
A hang geometriai árnyékterébe történő behatolását hangelhajlásnak nevezzük. A hangelhajlásnak köszönhető, hogy a szirénázó rendőrautó hangja az útkereszteződésben már akkor is hallható, amikor a geometriai viszonyok miatt maga a kocsi még nem látható.

Hangtörés:
Az akusztikailag különböző minőségű közegek határfelületén áthaladó hang terjedési irányának megváltozását hangtörésnek nevezzük.

Hangszóródás:
A hang rendezett terjedésében zavaró hatásra bekövetkező rendezetlenné vált terjedési viszonyok kialakulási folyamatát a hang szóródásának nevezzük. A hang szóródása különböző okokra, így például szabálytalan visszaverődésre és elhajlásra, továbbá rezonáns elnyelésre és lesugárzásra, illetve ezek együttes hatására vezethető vissza. Például víz alatt a szonár hangcsóvája az útját keresztező halrajon megszóródik. Emiatt az addig egy irányban haladó hangsugarak a tér minden irányában rendezetlenül haladnak tovább.

1.8. Hangterek hasonlósága.

Két hangtér matematikailag akkor hasonló, ha az őket leíró dimenziótlan differenciálegyenletek és a hozzájuk tartozó perem és kezdetiérték feltételek megegyeznek. A dimenziótlan akusztikai hullámegyenlet előállításához szorozzuk meg a (18) egyenlet mindkét oldalát a hangtérre jellemző T_0 periódusidővel és osszuk el mindkét oldalt p_0 vonatkoztatási nyomással. Ezt követően az egyenlet bal oldalán a második tag számlálóját és nevezőjét is bővítsük a hangtér egy jellemző L_0 geometriai méretével. Némi átrendezés után:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{p'}{p_0}\right)}{\partial\left(\frac{t}{T_0}\right)^2}-\frac{c^2T_0^2}{L_0^2}\frac{\partial^2\left(\frac{p'}{p_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)^2}=0$$

Hasonlóság esetén a két hangteret leíró dimenziótlan egyenlet dimenziólan együtthatóinak is meg kell egyeznie. Legyen a hangtérre jellemző hullámhossz $\lambda_0 = cT_0$, így:

$$\frac{c^2T_0^2}{L_0^2}=\frac{\lambda_0^2}{L_0^2}$$

Végül a fenti kifejezés jobb oldalának négyzetgyökét és reciprokát véve a hangterek hasonlósági számához, a Helmholtz-számhoz jutunk:

$$He=\frac{L_0}{\lambda_0}$$

1.9. Energetikai viszonyok az akusztikában

A zavarási állapotok továbbterjedése során a közegben igen kis mértékű munkavégző képesség is tovaterjed. A hangterjedés során a közeg részecskékeken csak a rájuk ható, külső nyomásból származó erők végeznek munkát. Így a hangterjedés irányára merőleges keresztmetszeten időegység alatt átáramló pillanatnyi akusztikai teljesítmény, vagyis az akusztikai intenzitás éppen a hangnyomás és a részecskesebesség szorzatával egyenlő.

$$I = p'v'$$

Ahol: I $\left[\mathrm{w/m^2}\right]$ a pillanatnyi akusztikai intenzitás.

Ha a (18) hullámegyenlet hangnyomásra nyert (19) megoldását visszahelyettesítjük a (7) linearizált mozgásegyenletbe, akkor a hangnyomás és a részecskesebesség között az alábbi egyszerű összefüggést kapjuk:

$$p' = c\rho_0 v'$$

Szabadon terjedő síkhullámok esetén, amikor a hangnyomás és a részecskesebesség fázisban van, akkor a fenti egyenletből kifejezett részecskesebesség közvetlenül behelyettesíthető az intenzitást értékét megadó összefüggésbe. Így a pillanatnyi intenzitás a hangnyomás függvényében:

$$I = \frac{p'^2}{\rho_0 c}$$

Az átlagos intenzitás szabadon terjedő síkhullámok esetében az alábbi módon határozható meg:

$$\overline{I} = \overline{p'v'} = \frac{1}{\rho_0 c}\overline{p'^2} = \frac{p'^2_{eff}}{\rho_0 c}$$

Ahol: $p'^2_{eff} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} p'^2 dt$ $\left[\mathrm{Pa^2}\right]$ a hangnyomás effektív értékének a négyzete.

Az átlagos intenzitás segítségével könnyen meghatározható a hangterjedésre merőleges keresztmetszeten áthaladó átlagos teljesítmény:

$$\overline{P} = A\overline{I}$$

Ahol: $\overline{\mathrm{P}}$ [W] átlagos teljesítmény.
A $\left[\mathrm{m^2}\right]$ a hangterjedésre merőleges keresztmetszet nagysága.

Mennyiségek *szintes* írásmódja az akusztikában

Definíció szerint minden teljesítményszerű, teljesítménnyel arányos vagy hatványkitevős alakban avval arányossá tehető fizikai mennyiség kifejezhető szintekben. Egy adott ξ mennyiség L ***szint***ben kifejezett értékét az alábbi módon határozzuk meg.

$$L_\xi = 10\,lg\,\frac{\xi}{\xi_0} \qquad \text{[dB]}$$

Ahol: L_ξ [dB] a ξ mennyiség **szint**ben (angolul L*evel*) kifejezett értéke.
ξ_0 [ ] a ξ mennyiséghez tartozó viszonyítási érték.

Akusztikában a vizsgált jellemzők széles átfogott tartománya miatt, illetve a hangérzékletünk logaritmikushoz közelebb álló jellege miatt széles körben használnak **szint**eket a hangnyomás, intenzitás és teljesítmény mennyiségek leírására. Az említett mennyiségek szintjeinek kifejezését a nemzetközileg elfogadott viszonyítási értékekkel (G. Bell tiszteletére *bel*-ben, ill. annak tized részével *decibel*-ben) az alábbiak szerint adjuk meg:

Hang*nyomás**szint***: $L_p = 10lg\frac{p^2}{p_0^2} = 20lg\frac{p}{p_0}$ ahol: $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa

Hang*intenzitás**szint***: $L_I = 10lg\frac{I}{I_0}$ ahol: $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$

Hang*teljesítmény**szint***: $L_W = 10lg\frac{P}{P_0}$ ahol: $P_0 = 10^{-12}$ W

1.10. Hangforrások

1.10.1. Hangforrás típusok a hangkeltés mechanizmusa szerint

Hangot különböző fizikai folyamatok során hozhatunk létre. Ezek közül a legfontosabbak:

-Szilárd test rezgése által lesugárzott hang. Például rezgő húr, vagy a hangszóró membránja.

-Áramlás eredetű zaj. A lüktető tömegáram bevezetésével keltett zaj, például a belsőégésű motorok kipufogás zaja. Áramlásba helyezett test körül kialakuló ingadozó nyomástér zaja, például a fuvola hangja. Az áramló közegben kialakuló ingadozó feszültségtér által lesugárzott hang, például a préslég fúvó szabadsugarának zaja.

-Termikus eredetű hang. Például egy turbulens láng zaja.

1.10.2. Hangforrás típusok a hangforrás geometriai kiterjedtsége szerint

A hangforrásokat geometriai kiterjedtségük alapján a következő csoportokba sorolhatjuk:

-Pontszerű. Kellő távolságból a hangforrások többsége pontszerűnek tekinthető.

-Vonalszerű. Például vonatszerelvény, vagy forgalmas autóút, csővezeték.

-Felület mentén megoszló. Például rezgő lemez, csobogó víz felület.

-Térben megoszló. Például a szabadsugár.

1.10.3. Hangforrás típusok a modellezhetőség szerint

A különböző hangforrások matematikai modellezhetőségük szerint monopólusok, dipólusok vagy kvadrupólusok.

1.11. Hangterjedés szabad térben

A különböző geometriai kiterjedésű hangforrások levegőben kialakuló távoltéri sugárzási viszonyai alapján a hangtér adott pontjában kialakuló hangnyomásszint és a forrás által kisugárzott hangteljesítményszint közötti kapcsolat az alábbiak szerint határozható meg.

1.11.1. Pontszerű hagforrás távoltéri közelítése

A szabadban elhelyezett, adott hangteljesítményszintű, pontszerű hangforrástól r távolságban kialakuló hangnyomásszint értéke:

$$L = L_w - 10\,lg\,\mathrm{r}^2 + 10\,lg\,\mathrm{D} - 11$$

Ahol: L [dB] a kialakuló hangnyomásszint.

L_w [dB] a hangforrás hangteljesítményszintje.

r [m] a hangforrás és a megfigyelési pont közötti távolság.

$D = A_t / A_v$ [-] a hangforrás irányítási tényezője.

A_t $\left[m^2\right]$ az adott sugárhoz tartózó teljes gömbfelület.

A_v $\left[m^2\right]$ az adott sugárhoz tartózó teljes gömbfelületnek a szabad hangterjedés számára rendelkezésre álló része.

1.11.2. Vonalszerű hangforrások távoltéri közelítése

A szabadban elhelyezett, adott hangteljesítményszintű, végtelen hosszú, vonalszerű hangforrástól r távolságban kialakuló hangnyomásszint értékét a forrás koherens illetve inkoherens jellegétől függően az alábbiakban adjuk meg:

Koherens vonalsugárzó:
Azt a vonalsugárzót, amelynek minden eleme azonos fázisban sugároz, koherens vonalsugárzónak nevezzük. Ilyen sugárzó esetében a hangnyomásszint és a hangteljesítményszint közötti kapcsolat:

$$L = L'_{wk} - 10\,lg\,\mathrm{r} + 10\,lg\,\mathrm{D} - 8$$

Ahol: L [dB] a kialakuló hangnyomásszint.
L'_{wk} [dB] a koherens vonalsugárzó hosszegységre jutó hangteljesítményszintje.
r [m] a vonalsugárzó és a megfigyelési pont közötti távolság.
$\mathrm{D} = \mathrm{A}_t / \mathrm{A}_v$ [-] a hangforrás irányítási tényezője.
A_t $\left[\mathrm{m}^2\right]$ az adott sugárhoz tartózó teljes hengerfelület.
A_v $\left[\mathrm{m}^2\right]$ az adott sugárhoz tartózó teljes hengerfelületnek a szabad hangterjedés számára rendelkezésre álló része.

Inkoherens vonalsugárzó:
Azt a vonalsugárzót, amelynek az egyes elemei kulünböző fázisban sugároznak, inkoherens vonalsugárzónak nevezzük. Ilyen sugárzó esetében a hangnyomásszint és a hangteljesítményszint közötti kapcsolat:

$$L = L'_{wi} - 10\,lg\,\mathrm{r} + 10\,lg\,\mathrm{D} - 6$$

Ahol: L'_{wi} [dB] az inkoherens vonalsugárzó hosszegységre jutó hangteljesítményszintje.

1.12.Hangterjedés közeghatáron keresztül

A közeghatárra beeső hang egy része azon elnyelődik a másik része visszaverődik. A beesés során kialakuló energetikai viszonyokat az elnyelési és reflexiós tényezőkkel jellemezzük.

$$\alpha = \frac{\mathrm{P}_{el}}{\mathrm{P}_{be}} \qquad \text{illetve} \qquad \mathrm{r} = \frac{\mathrm{P}_v}{\mathrm{P}_{be}}$$

Ahol: α [-] hangelnyelési tényező.
P_{el} [W] a határfelületen elnyelt akusztikai teljesítmény.
P_{be} [W] a határfelületre beeső akusztikai teljesítmény.
r [-] hangreflexiós tényező.
P_v [W] a határfelületről visszavert akusztikai teljesítmény.

1.13. Zárt terek akusztikai viszonyai

Jó hangvisszaverő falakkal határolt zárt térben működő hangforrás hatására a helyiségben kialakuló hangnyomásszint:

$$L = L_w + 10\,lg\,\frac{4}{R_t}$$

Ahol: L [dB] A helyiségben kialakuló hangnyomásszint.

L_w [dB] A helyiségben működő hangforrás által kisugárzott hangteljesítményszint.

$R_t = \frac{A\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}}$ $[m^2]$ A helyiség teremállandója.

A $[m^2]$ A helyiség belső felületének nagysága.

$\bar{\alpha}$ [-] A helyiség belső felületének átlagos hangelnyelési tényezője.

1.14. Zajvédelem alapelvei

Környezetvédelmi szempontból az embert zavaró hangot zajnak nevezzük. Tágabb megközelítésben a környezetét zavaró, sok esetben nem szándékolt hang kibocsájtása hasonló környezetszennyezési forma, mint például a levegő, víz vagy talaj vegyi anyaggal történő szennyezése. A környezeti hang-szennyezést zajnak nevezzük. Hatósugarát tekintve a zaj többnyire lokális környezetvédelmi probléma. Széles körben ismert, hogy a jó akusztikai környezet nem csak kellemes közérzetet biztosít, hanem bizonyos betegségek gyógyítására is sikeresen alkalmazható. Ezt az orvosi-pszichológiai gyógymódot zeneterápiának nevezik. Evvel szemben az akusztikailag kedvezőtlen, zajos környezet nem csak a hallásunkat, hanem más érzékszerveinket, illetve általában az idegrendszerünket is fokozottan igénybe veszi. A fárasztó hatás egyik oka az, hogy bizonyos testrészek rugalmasságuknak és tehetetlenségüknek köszönhetően az intenzív hang besugárzás hatására rezgésbe jöhetnek. Ebből a szempontból különösen veszélyesek azok a gerjesztő frekvenciák, amelyek megegyeznek az adott testrész mechanikai rezgéséhez tartozó saját frekvenciáival. Így az ember testrészek közül például a fejnek 3-6 Hz, az agynak 6-8 Hz illetve a szemgolyónak 100 Hz körül van a sajátfrekvenciája. Másfelől idegrendszerünk hálózatos felépítésű, így a hallószerv irányából érkező idegi impulzusok nem csak a hallóközpontot ingerlik, hanem az elágazási pontokon keresztül a központi idegrendszer más területeire is hatással vannak.

A zajos környezet hatásának első jelei fáradékonyságban, rossz közérzetben, ingerlékenységben jelentkezik. Az immissziós (besugárzási) értékek és a besugárzási idő egy bizonyos határáig a kialakuló kóros elváltozás pihenéssel megszüntethető, ezeken az értékeken túlmenően azonban maradó károsodás, végső esetben azonnali hallásvesztés alakulhat ki. A zajvédelem feladata az ilyen hatások megszüntetése, illetve elkerülhetetlen esetben a hatásának elfogadható szintre csökkentése. A zajvédelemnek egyfelől fizikai illetve műszaki akusztikai kérdéseket kell megoldani. Másfelől azonban ismernie kell a különböző zajoknak az emberre kifejtett hatását illetve általában azok szubjektív megítélését. A szubjektív megfigyelő által az adott zajról alkotott vélemény első sorban annak hangnyomásszintjétől és frekvenciájától függ, de nem független a megfigyelést végző személy élethelyzetétől, fáradtsági állapotától, hangulatától, ízléstől, életkorától. A hangtérben mérhető objektív hangnyomásszint és a hangérzetünk közötti kapcsolat frekvencia függésének első alapos vizsgálatát Fletcher és Munson végezték el. Az emberi hallás így kimutatott frekvenciafüggése alapján határozták meg az "A" súlyozó függvényt, amely az emberi hallás frekvenciamenetéhez igazodva a mély hangokat levágja, a közepesen magas (1000-5000 Hz) frekvencia tartományt enyhén kiemeli, majd a viszonylag magas hangokat ismét levágja. Ezért a hangtér adott pontjában mért minden frekvencia összetevőt változtatás nélkül magában egyesítő összhangnyomásszint jórészt a hangteret jellemzi, míg az "A" súlyozott összhangnyomásszint az emberi hallással megegyező súlyozása révén az adott hang által keltett hangerősségérzetet adja meg. Így az "A" súlyozótt összhangnyomásszint értékkel az emberi hallás szempontjából lehet zajokat minősíteni.

A zajcsökkentés általános szempontjai címszavakban

1. A zajforrás csendesítése: A hagforrások számának csökkentése. A zajt okozó alaptevékenység teljesítményének csökentése. Mechanikai zajoknál kiegyensúlyozatlan járás megszüntetése, ütések, ütközések elkerülése, akusztikailag jól sugárzó felületek kilyukasztása, merevítése. Áramlás eredetű zajoknál a jellemző sebesség csökkentése, lüktető tömegáram bevezetés elkerülése, egyenletes áramlási feltételek biztosítása a szilárd testek felülete mentén, nyírórétegek, keveredési zónák kialakulásának elkerülése. Termikus eredetű zajoknál egyenletes hőfelszabadulással járó feltételek biztosítása.

2. A zaj terjedésének megakadályozása: Szabadban a hangforrástól mért távolság növelése, megfelelő sugárzási irányítottság kiválasztása, hangárnyékolás, tokozás. Helyiségben tokozás, elválasztó fal, a belső felület hangelnyelési tényezőjének növelése, a fal hanggátlásának növelése. Csatornában a hangforrástól mért távolság növelése, keresztmetszet változás és iránytörés beiktatása, lemezes hangelnyelővel, reaktív tompítóval, megkerülő-csővel. Aktív zajcsökkentéssel.

3. Egyéni védelem a zajos környezetben tartózkodóknak: Munkaszervezés révén a védett személy kevés időt töltsön a zajos helyen, füldugó, fülvédő, kezelőfülke.

1.15. Akusztikai mérések alapjai

A léghang akusztikában használatos legegyszerűbb mérési kialakítás elvi vázlata:

Mikrofon $\rightarrow$ Előerősítő $\rightarrow$ Súlyozószűrő vagy analizátor $\rightarrow$ Kijelző

Léghang méréstechnikában első sorban kondenzátor- és piezomikrofonokat használnak. A súlyozószűrők közül a legelterjedtebb a zajvédelmi minősítésnél használatos "A"-szűrő, továbbá a méréseknél oktáv- és tercsávos analizátort illetve valósidejű FFT elemző használata gyakori.

1.16. Ajánlott irodalom

1. Dr. Szentmártony Tibor, Dr. Kurutz Imre: A műszaki akusztika alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985, jegyzetszám: J4-970.

2. Dr. Tarnóczy Tamás: Akusztika, Akadémiai kiadó, Budapest, 1963.

3. Angster Judit, Arató Éva: Akusztikai példatár, Akadémiai kiadó, Budapest, 1986.

4. A.P.Dowling and J.E.Ffowcs Williams: Sound and Sources of Sound, Ellis Horwood Limited, 1983.

5. Dr. Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai, Műegyetemi Kiadó, 1994, azonosítási szám: 45013.

6. Jászay Tamás: Műszaki hőtan (Termodinamika), Tankönyvkiadó, Budapest,, 1986, jegyzetszám: J 4-377.