6.GYAKORLAT (6. oktatási hét) ÁRAMLÁSTAN BSc

6. heti előadásig elhangzott:

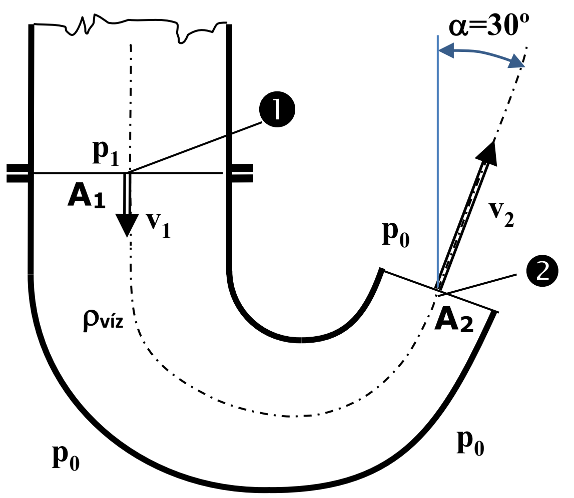
- konvektív gyorsulás átalakítása, Euler-egyenlet, Bernoulli-egyenlet, $p_{össz}=p_{stat}+p_{din}$; Prandtl- és Pitot-cső

(Euler-egyenlet alakja természetes koordinátarendszerben még nem, izoterm atmoszféra még nem, Bernoulli-egyenlet instacioner áramlásra még nem, csak stacionerre.)

Témakörök a 6. heti 6. gyakorlatra:

- Bernoulli-egyenlet alkalmazása (ideális közeg, stacioner áramlás, potenciálos erőtér, ❶->❷ áramvonal)

PÉLDA (Bernoulli-egyenlet, ideális közeg stacioner áramlása)



Az ábrán látható csővégi íves könyökidom A_1=500cm^2 keresztmetszetében ismert a statikus nyomás $p_{1,stat}$=250000Pa értéke. Az szűkülő idom A_2=250cm^2 kilépő keresztmetszete a p_0=10^{5}Pa külső nyomásra nyitott. Az idomból víz ($\rho_{víz}$=1000kg/m^3) áramlik állandó v_2 átlagsebességgel a szabadba. Az „1" és „2" csőtengelyek által bezárt szög (α=30°) az ábrán látható. **FELTÉTELEK**: stacioner állapot; ideális közeg; az idom tengelye a vízszintes síkban fekszik: a nehézségi erőtér hatása elhanyagolható. **KÉRDÉSEK**: Határozza meg az „1" és „2" keresztmetszetekben az átlagsebességek, a dinamikus nyomások és az össznyomások, valamint a kilépő keresztmetszetbeli statikus nyomás értékét!

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

A Bernoulli-egyenlet alakja „1" és „2" pontok között (μ=0, stacioner eset, ρ=állandó, potenciálos erőtér, 1→2 pontok közötti áramvonalon integrálunk):

$$p_1+\frac{\rho}{2}\cdot v_1^2+\rho\cdot g\cdot z_1=p_2+\frac{\rho}{2}\cdot v_2^2+\rho\cdot g\cdot z_2$$

Rendezve kapjuk ($p_{2,stat}$= p_0=100000Pa ismert, z_1=z_2 ismert):

$$\frac{\rho}{2}\cdot(v_2^2-v_1^2)=p_1-p_0$$

Folytonosság tétele 1→2 pontok közötti áramcsőre (q_V=v·A=állandó):

$$v_1A_1=v_2A_2$$

A Bernoulli-egyenlet pl. v_2 kiemelésével, majd folytonosság tétel felhasználásával kapjuk:

$$\frac{\rho}{2}\cdot v_2^2\left(1-\frac{v_1^2}{v_2^2}\right)=p_1-p_0 \quad \text{azaz} \quad \frac{\rho}{2}\cdot v_2^2\left(1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)=p_1-p_0$$

Rendezve v_2-re:

$$v_2=\sqrt{\frac{\frac{2(p_1-p_0)}{\rho}}{\left(1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}}=\sqrt{\frac{\frac{2\cdot(250000-100000)}{1000}}{\left(1-\left(\frac{250}{500}\right)^2\right)}}=\sqrt{\frac{300}{0{,}75}}=\sqrt{400}=20m/s$$

Folytonosság tételéből v_1 átlagsebességre kapjuk:

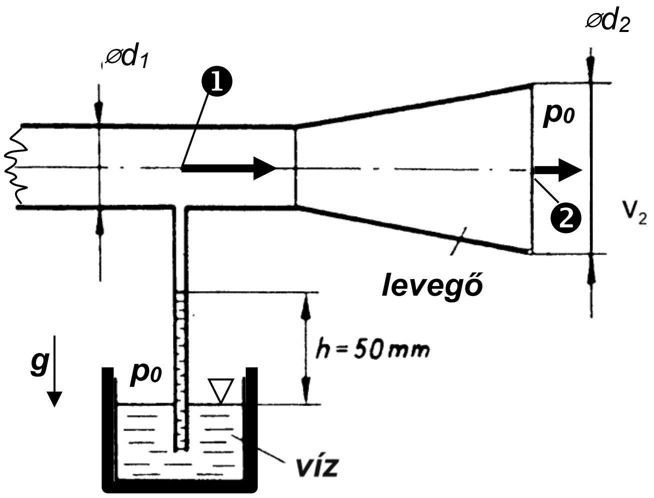
$$v_1=v_2\frac{A_2}{A_1}=20\frac{250}{500}=10m/s$$

Statikus nyomások $p_{1,stat}$=250000Pa ill. $p_{2,stat}$=p_0=100000Pa ismertek. A dinamikus nyomások számolhatók.

Az 1→2 pontok közötti áramvonalon a sebesség kétszeresége, így dinamikus nyomás négyszeresére nő: $p_{1,din}=\frac{\rho}{2}\cdot v_1^2=50000Pa$ és $p_{2,din}=\frac{\rho}{2}\cdot v_2^2=200000$Pa. Az össznyomás állandó: $p_{1,ö}=p_{2,ö}=300000Pa$, értéke akár $p_{1,ö}=p_{1,stat}+p_{1,din}=250000Pa+50000Pa=300000Pa$, akár $p_{2,össz}=p_{2,stat}+p_{2,din}=100000Pa+200000Pa=300000Pa$ alapján számolható.

PÉLDA (Bernoulli-egyenlet, ideális közeg stacioner áramlása)

A mellékelt ábrán látható vízszintes tengelyű d_1=50mm csővezeték végén egy diffúzor (d_2=100mm) található. A csővégen a levegő a szabadba (p_0) áramlik ki ismeretlen v_2 átlagsebességgel. Az alsó szabadfelszínű víztartályból a csatorna oldalfalához kapcsolódó csövön ebben az áramlási állapotban éppen *h*=50*mm* magasra jut fel a víz.



FELTÉTELEK:
stacioner állapot, ideális közeg.

ADATOK:
$\rho_{lev} = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$,
$\rho_{víz} = 1000 \mathrm{kg/m^3}$,
$p_0 = 10^5\ Pa$,
g=*10* N/kg

KÉRDÉS: Határozza meg a kilépő keresztmetszet kiáramlási sebességét! v_2=?

MEGOLDÁS

A stacioner esetre a Bernoulli-egyenlet alakja „1" és „2" pontok között:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

Rendezve kapjuk:

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

Folytonosság tétel (vA=állandó) és kör keresztmetszet átmérők segítségével kapjuk:

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right) = \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 \left(1 - \left(\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)^2\right)$$

A szivornyára a manométer egyenlet felírható, hiszen a h magasra feljutó vízoszlop nyugalomban van, mint egy manométerben. (Kihasználva, hogy $\rho_{víz} >> \rho_{lev}$)

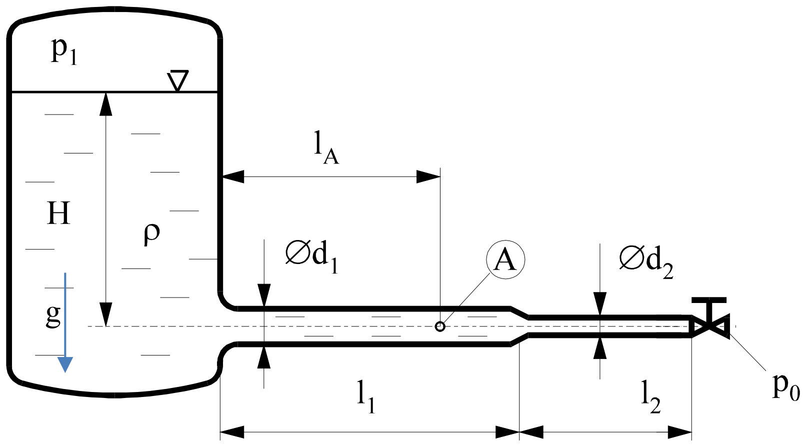
$$p_0 = p_1 + \rho_{víz} g h$$

Rendezve v_2-re:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}{\left(1 - \left(\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)^2\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{2(\rho_{víz} g h)}{\rho}}{\left(\left(\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)^2 - 1\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot (1000 \cdot 10 \cdot 0{,}05)}{1{,}2}}{(16 - 1)}} = 7{,}454 m/s$$

PÉLDA (Bernoulli-egyenlet, ideális közeg stacioner áramlása)

A túlnyomásos, a vízzel töltött zárt fedelű tartály ismeretlen H magasságig töltött vízzel. A vízfelszín felett $\Delta p = p_1 - p_0 = 20000 Pa$ túlnyomás uralkodik. A tartályhoz csatlakozó vízszintes tengelyű csővezeték „A" pontjában az áramló közeg dinamikus nyomása $p_{din,A} = 2000 Pa$ ismert értékű.



FELTÉTELEK: A csővégi szelep teljesen nyitott; stacioner kiáramlási állapot; ideális közeg ($\mu=0$; ρ=áll.); $A_{tartály} >> A_{cső}$; a csővégi szelep be- és kilépő keresztmetszetei a d_2 átmérőjű csőével azonosak.

ADATOK:

$p_0 = 10^5 Pa$; $\rho = 1000 \mathrm{kg/m^3}$; g=*10* N/kg; $d_1 = 50mm$; $d_2 = 25mm$; l_1=10m; l_2=5m; l_A=7m

KÉRDÉSEK: Határozza meg az csővégi kiáramlási sebességet, az „A" pontbeli statikus nyomást és a tartálybeli H vízfelszín-magasságot!

MEGOLDÁS

A csővégi áramlási sebességhez a folytonosság tétele szükséges az „A" pont és a csővég között. Folytonosság tétele „A"→2 pontok közötti áramcsőre ($q_V = v \cdot A$=állandó):

$$v_A A_A = v_2 A_2$$

Ismert $p_{din,A} = \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2$=2000Pa, ebből v_A=2m/s számolható. A kiáramlási sebesség v_2=8m/s kiszámítható a folytonosság tételéből, hiszen a csőkeresztmetszetek (d_1 és d_2 átmérőkkel) adottak.

A megadott feltételek esetén a Bernoulli-egyenlet alakja 1→2 pontok közötti áramvonalon:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

Az áramvonal két végpontja az „1" és a „2" pont, célszerűen az egyik végpont az a pont, ahol az ismeretlen mennyiséget (p vagy v vagy z értékét) keressük, a másik pontban mindent ismerünk.

A z=0m referencia szintet bárhova felvehetjük, most legyen z=0m a csőtengelyben. Mit ismerünk?

	„A"	„2"=csővég, a nyitott szelep utáni kiáramlási keresztmetszet
p [Pa]	p_A=?	p_0=100 000Pa
v [m/s]	v_A=2m/s	v_2=8m/s
z [m]	z_A=0m	z_2=0m

Az alábbi „A"→2 pontok közötti áramvonalon a Bernoulli-egyenlet:

$$p_A + \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot z_A = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

A Bernoulli-egyenletet fenti adatokkal rendezve az ismeretlen p_A statikus nyomásra kapjuk

$$p_A = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot (v_2^2 - v_A^2) = 100000 Pa + 500(64 - 4) = 130000 Pa$$

A H magasság kiszámításához vagy az „1"-„2", vagy az „1"-„A" pontok között felvett áramvonalon is felírhatjuk a Bernoulli-egyenletet. Legyen az utóbbi:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_A + \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot z_A$$

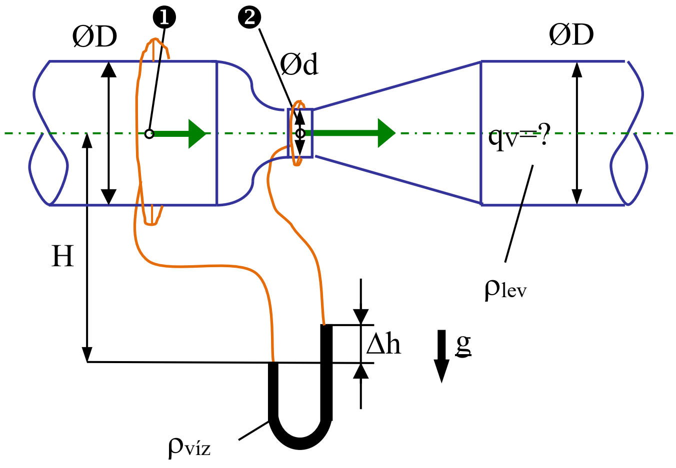
	„1"=tartály vízfelszínen	„A" jelölt pont csőtengelyben
p [Pa]	120 000Pa	130 000 Pa
v [m/s]	≈0m/s ($A_{tartály} >> A_{cső}$)	2m/s
z [m]	z_1=H=?	z_A=0m

Rendezve: $p_1 + \rho \cdot g \cdot H = p_A + \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2$

A H[m] keresett értéke: $H = \frac{p_A - p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{130000 - 120000}{1000 \cdot 10} + \frac{4}{10 \cdot 2} = 1 + 0{,}2 = 1{,}2m$

PÉLDA (Bernoulli-egyenlet, ideális közeg stacioner áramlása)

Térfogatáram-mérés céljából egy ún. Venturi-csövet építünk be egy vízszintes tengelyű csővezetékbe. Az „1” és „2” keresztmetszetekben kialakított statikus nyomás megcsapolásokhoz körvezetékekkel csatlakozik a függőleges szárú, vízzel töltött U-csöves manométer. A manométerről leolvasott kitérés Δh=60mm.



Feltételek:

ideális közeg (ρ=áll., μ=0), stacioner áramlás.

ADATOK:

$\varnothing$D=300mm; $\varnothing$d=100mm; g=10N/kg; H=5m; $\rho_{víz}$=1000kg/m^3; ρ_{lev}=1,2kg/m^3

KÉRDÉSEK: Határozza meg a levegő térfogatáramát, és az „1” és „2” keresztmetszetek statikus nyomáskülönbségét!

MEGOLDÁS

A manométer egyenlet az U-cső baloldali vízfelszíne szintjére:

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot H = p_2 + \rho \cdot g \cdot (H - \Delta h) + \rho_{víz} \cdot g \cdot \Delta h$$
$$p_1 - p_2 = (\rho_{víz} - \rho) \cdot g \cdot \Delta h$$

Ezzel a statikus nyomáskülönbség számítható:

$$p_1 - p_2 = (\rho_{víz} - \rho) \cdot g \cdot \Delta h = (1000 - 1{,}2) \cdot 10 \cdot 0{,}06 = 599{,}28 Pa$$

(Kihasználva, hogy $\rho_{víz}$>>ρ_{lev}, akkor ugyanerre 600Pa értéket kapunk, az is elfogadható).

A stacioner esetre a Bernoulli-egyenlet alakja az „1” és a legszűkebb „2” keresztmetszetek között:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

A z=0m referencia szintet bárhova felvehetjük, most legyen $z_1=z_2$=0m a csőtengelyben.

	„1”	„2
p [Pa]	?	?
v [m/s]	v_1=?	$v_2=v_1(A_1/A_2)= v_1 \cdot 9$
z [m]	z_1=0m	z_2=0m

Ezzel paraméteresen és számértékekkel a statikus nyomások különbségét kapjuk, melyről tudjuk a manométeregyenletből, hogy 599,28Pa értékű (vagy 600Pa, ha $\rho_{víz}$>>ρ_{lev}):

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 (81 - 1) = 80 \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = 599{,}28 Pa$$

Melyből az „1” keresztmetszetbeli
áramlási sebességre kapjuk: v_1=3,533411949m/s (kerekítve ≈3,533m/s)
így a keresett térfogatáram $q_{V,1}=v_1A_1$=0,249762173m^3/s (kerekítve ≈0,250m^3/s)

(Ha $\rho_{víz}$>>ρ_{lev}, feltétellel számoltunk, akkor látható, hogy nem követünk el nagy hibát, mivel minimális az eltérés: a sebességre v_1≈3,536m/s, a térfogatáramra $q_{V,1}=v_1A_1$=0,249912165m^3/s (≈0,250m^3/s) értéket kapunk.)

PÉLDA (térfogatáram számítás pontonkénti sebességméréssel)

Meleg (37°C) levegő áramlik egy 300*mm*×450*mm* téglalap keresztmetszetű légvezetékben, ahol PRANDTL-csővel mérést végzünk. Az N=6db, egyenlő nagyságú A_i részkeresztmetszetek súlypontjaiba egymás után behelyezett PRANDTL-csővel mért Δp_i nyomáskülönbségek rendre:

Δp_i= 285, 295, 280, 285, 290, 270 [*Pa*]

Adatok: t_{lev}=37°C; R=287 J/(kgK), p=99500Pa

Feltételek: stacioner áramlási állapot

Kérdések: Számítsa ki a vezetékben áramló közeg átlagsebességét, térfogatáramát és tömegáramát!

MEGOLDÁS

Vezetékben áramló közeg azonos részterületekben mért sebességmérése alapján:

Mivel Prandtl-csövet használunk, amellyel az össznyomás és a statikus nyomás különbsége, azaz a dinamikus nyomás mérhető, a mért $\Delta p_i = p_{din,i}$ alapján először külön minden pontban külön a v_i sebességeket kiszámoljuk:

$$\mathrm{v}_i = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p_i}{\rho_{lev}}}$$

majd azokból átlagsebesség számítható (hiszen azonosak a részterületek):

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{\sum \mathrm{v}_i}{N}$$

(Helytelen eredményt kapunk (elvi hiba!), ha először az átlagnyomást számolnánk ki és abból az áramlási sebességet, mivel a gyökök átlaga nem egyenlő az átlag gyökével!)

Az átlagsebesség ismeretében a q_V [m^3/s] térfogatáram, ahol A=0,3·0,45=0,135m^2:

$$q_V = \bar{\mathrm{v}} \cdot \mathrm{A}$$

Végül a q_m [kg/s] tömegáram is számítható.

$$q_m = \rho_{lev} \cdot q_V$$

Ahol gáztörvénnyel a levegő sűrűsége: (t→T átváltásra ügyelni! T_{lev}=273+37=310K)

$$\rho_{lev} = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{99500}{287 \cdot 310} = 1{,}118355 \frac{kg}{m^3} (\cong 1{,}12 \frac{kg}{m^3})$$

Értékek:

i	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$\Delta p_i\ [Pa]$	**285**	**295**	**280**	**285**	**290**	**270**
$\mathrm{v}_i\ [\frac{m}{s}]$	22,57603568	22,96869182	22,377124	22,57603568	22,77321004	21,97389955

$\bar{\mathrm{v}} = \frac{\sum \mathrm{v}_i}{N} = \frac{135{,}24500}{6}$ =22,54083 m/s

$q_V = \bar{\mathrm{v}} \cdot \mathrm{A} =$ 3,043012 m^3/s

$q_m = \rho_{lev} \cdot q_V$ =3,403167 kg/s