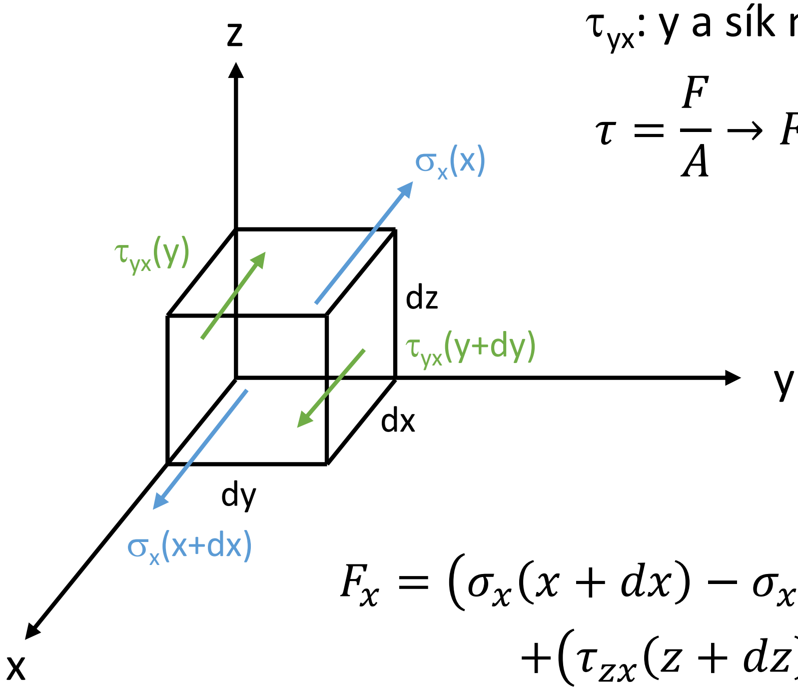
Ismétlés: Mozgásegyenlet

$F = m \cdot a$ Egységnyi tömegre ható erő = gyorsulás

$\underline{F} + \underline{g} = \frac{d\underline{v}}{dt}$ Felületi (szomszédos részecskétől) + térerő = sebességváltozás

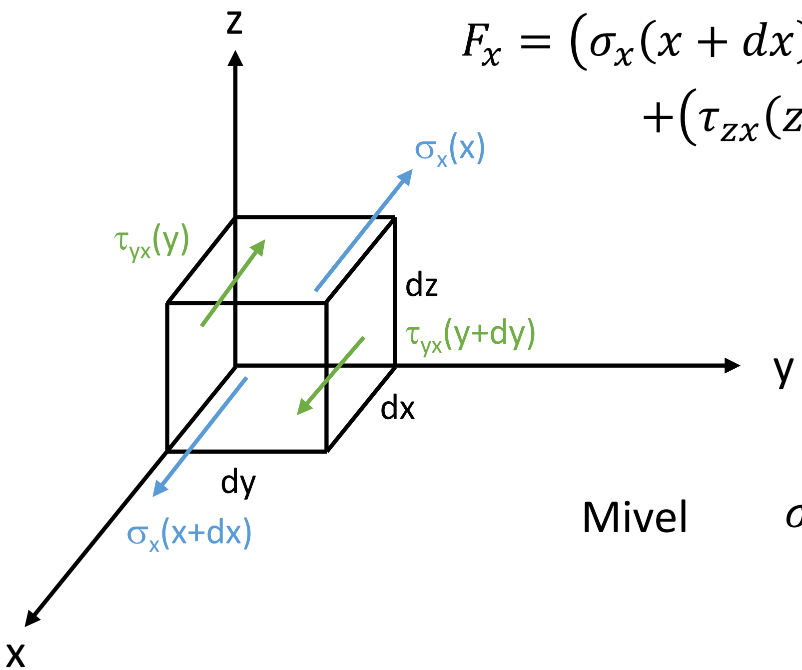
Elemi folyadékrész



τ_{yx}: y a sík normálisa, x a feszültség iránya

$$\tau = \frac{F}{A} \rightarrow F = \tau \cdot A$$

$$F_x = \left(\sigma_x(x+dx) - \sigma_x(x)\right)dydz + \left(\tau_{yx}(y+dy) - \tau_{yx}(y)\right)dxdz + \\ +\left(\tau_{zx}(z+dz) - \tau_{zx}(z)\right)dxdy$$



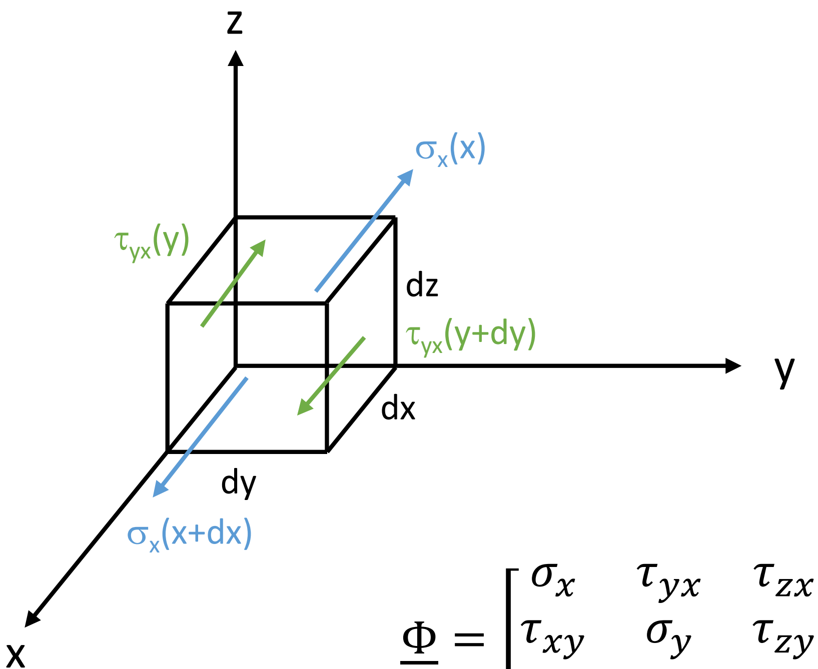
$$F_x = \left(\sigma_x(x+dx) - \sigma_x(x)\right)dydz + \left(\tau_{yx}(y+dy) - \tau_{yx}(y)\right)dxdz +$$
$$+\left(\tau_{zx}(z+dz) - \tau_{zx}(z)\right)dxdy$$

Mivel $\sigma_x(x+dx) = \sigma_x(x) + \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx$

$$F_x = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy$$

Egységnyi tömegre ható erő: $F_{xm} = \dfrac{F_x}{dm} = \dfrac{F_x}{\rho dxdydz}$

$$F_{xm} = \frac{1}{\rho \cancel{dV}} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\cancel{dV} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\cancel{dV} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\cancel{dV}\right)$$



$$F_{xm} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$\underline{F_m} = \frac{1}{\rho} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\nabla}$$ ahol

$$\underline{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$ és

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$ feszültségtenzor

Innen:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{v} = \underline{g} + \frac{1}{\rho} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\nabla}$$ Mozgásegyenlet differenciál alakja

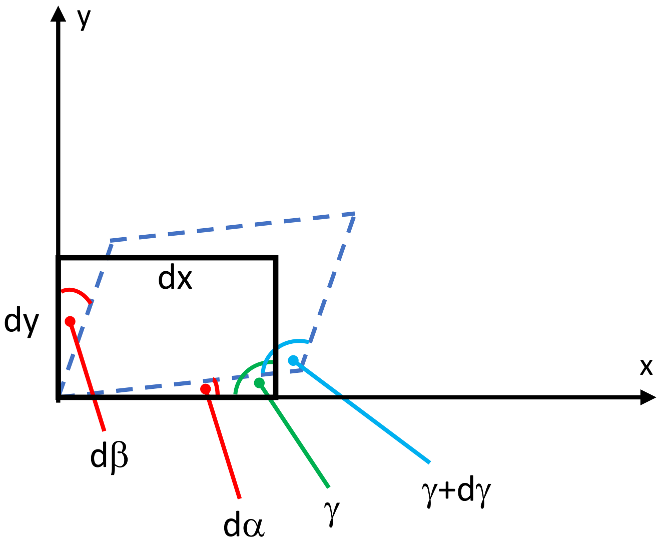
X irányban kifejtve:

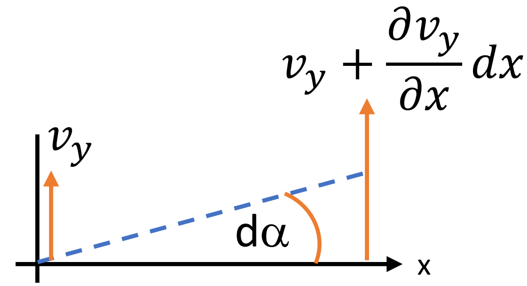
$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = g_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

Feszültségállapot és sebességtér jellemzői közötti kapcsolat

Newtoni közeg: $\tau \sim \dfrac{d\gamma}{dt}$ azaz a feszültség arányos a deformációsebességgel.

Elemi folyadékhasáb:





dα: dt idő alatti elmozdulás miatt

sebességkülönbség: $\dfrac{\partial v_y}{\partial x} dx$

dt idő alatti különbség a két végpont elmozdulásában: $\dfrac{\partial v_y}{\partial x} dx \cdot dt$

$$d\alpha : \frac{elmozdulásbeli\ különbség}{két\ pont\ közti\ távolság} : \ d\alpha = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} \cancel{dx} \cdot dt}{\cancel{dx}} = \frac{\partial v_y}{\partial x} dt \qquad d\beta = \frac{\partial v_x}{\partial y} dt$$

$$d\gamma = d\alpha + d\beta \qquad \text{és} \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} \cancel{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cancel{dt}}{\cancel{dt}} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Mivel $\tau = \mu \cdot \frac{d\gamma}{dt}$ ezért $\tau_{yx} = \mu \cdot \frac{d\gamma_z}{dt} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \tau_{xy}$

A hasáb egy éle irányába mutató csúsztatófeszültségek megegyeznek, azaz a feszültségtenzor szimmetrikus.

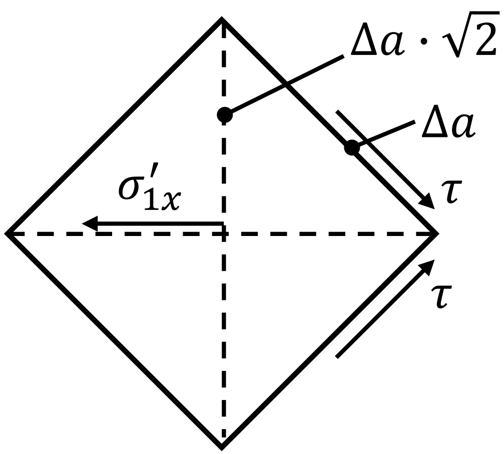
Statikus nyomás: főfeszültségek átlagából: $$p_{stat} = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Negatív előjel: mert a (húzó)feszültség és a nyomás ellentétes irányú.

$\sigma_x = -p_{stat} + \sigma_x{}'$ Statikus nyomásból+alakváltozási sebességből adódóan.

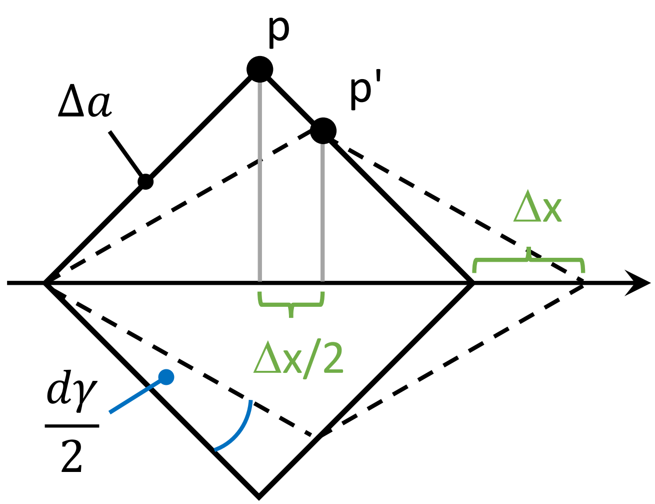
Alakváltozás miatti csúsztatófeszültségből felületre merőleges húzófeszültségek is keletkeznek.

Deformáció következtében keletkező feszültségek meghatározása:
ábra síkjára merőlegesen egységnyi hosszúságú hasáb:



Erőegyensúly: $$\cancel{2} \cdot \cancel{\Delta a} \cdot \tau \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = \sigma'_{1x} \cdot \cancel{\Delta a} \cdot \cancel{\sqrt{2}}$$

$$\tau = \sigma'_{1x}$$



Δx: nyúlás dt idő alatt.

$$\Delta x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdt = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \Delta a \cdot \sqrt{2} \cdot dt$$

$$\frac{\Delta x}{2} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \Delta a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot dt$$

$$\overline{pp'} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \Delta a \cdot dt$$

$$\frac{d\gamma}{2} = \frac{\overline{pp'}}{\Delta a} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dt$$

Mivel $\tau = \sigma'_{1x}$ és $\tau = \mu \cdot \frac{d\gamma}{dt}$

$$\sigma'_{1x} = \mu \frac{d\gamma}{dt} = 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

Ha **csak** tágul: minden irányba egyformán deformálódik: $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$ és $\frac{d\gamma}{dt} = 0$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{3} div\underline{v} \qquad \text{mert} \qquad div\underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Tehát az X irányú húzófeszültséget okozó deformációsebességet az alábbi kifejezés jellemzi:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \qquad \text{helyett} \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} div\underline{v}$$

Innen a deformáció miatti húzófeszültség: $\sigma'_x = 2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} div\underline{v}\right)$

Azaz: tágulás (sűrűségváltozás), és a közeg egyéb, sűrűségváltozástól független deformációja esetén:

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu div\underline{v}$$

innen a feszültségtenzor:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu div\underline{v} & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu div\underline{v} & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu div\underline{v} \end{bmatrix}$$

A feszültségtenzor szimmetrikus.

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu div\underline{v} & \mu\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \mu\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \mu\cdot\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & -p + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu div\underline{v} & \mu\cdot\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \mu\cdot\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \mu\cdot\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu div\underline{v} \end{bmatrix}$$

Felbontható:

egységmátrix

$$\underline{\underline{\Phi}} = \left(-p - \frac{2}{3}\mu div\underline{v}\right)\cdot\underline{\underline{E}} + 2\cdot\mu\cdot\underline{\underline{A}}_s \qquad \underline{\underline{A}}_s = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

alakváltozási sebesség tenzor

Mozgásegyenlet: $$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial\underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{D}}\cdot\underline{v} = \underline{g} + \frac{1}{\rho}\cdot\underline{\underline{\Phi}}\cdot\underline{\nabla}$$

Mozgásegyenlet legáltalánosabb alakja newtoni közegekre, X irányban:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z =$$
$$= g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu div\underline{v}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\mu\cdot\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\mu\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right\}$$

Mozgásegyenlet legáltalánosabb alakja newtoni közegekre, X irányban:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z =$$
$$= g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu div\underline{v}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\mu\cdot\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\mu\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right\}$$

Ismeretlenek: $v_x, v_y, v_z, p, \rho, \mu$

6 ismeretlen, 3 egyenlet (X, Y, Z irányú mozgásegyenlet)

+1: folytonosság (6/4)

p, ρ meghatározása, pl. gáztörvény segítségével
de: újabb ismeretlen: T (7/5)

+1: viszkozitás és hőmérséklet közti összefüggés (anyagjellemző) (7/6)

+1: energiaegyenlet (később) (7/7)

Vagyis: 7 ismeretlen, 7 egyenlet → <u>elméletileg</u> megoldható.

Gyakorlatban: csak korlátozott számú esetben. Vagy: egyszerűsítések, közelítések.

Tegyük fel, hogy a viszkozitás és a sűrűség is állandó. Ha $\rho = áll.$ akkor $div\underline{v} = 0$ (kontinuitás)

$$\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu div\underline{v}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\mu\cdot\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\mu\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\mu}{\rho}\left(2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x}\right) =$$

$$= \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}}\right) =$$

$$= div\underline{v} = 0$$

$$= \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$ innen:

X: $$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

Y: $$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_z = g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$

Z: $$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z = g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\text{X:} \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\
&\text{Y:} \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z = g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\
&\text{Z:} \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z = g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)
\end{aligned}
$$

Navier-Stokes egyenlet

4 ismeretlen van: $v_x; v_y; v_z; p \rightarrow$ kell még egy egyenlet: Kontinuitás.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$ (ha $\rho = áll.$), vagyis: $div\underline{v} = 0$

Vektoriális alak:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{v} + \left(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T \right) \cdot \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \underline{grad}\, p + \nu \cdot \Delta \underline{v}$$

$$\Delta \underline{v} = \underline{grad} \overbrace{\boxed{div\underline{v}}}^{div\underline{v} = 0} - \underline{rot}\, \underline{rot}\, \underline{v} = -\underline{rot}\, \underline{rot}\, \underline{v}$$

$$\underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}\right) \end{bmatrix} = \underline{grad} \frac{v^2}{2}$$

$$\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T = 2 \cdot \underline{\underline{A}}_\Omega$$

$$\underline{\underline{A}}_\Omega \cdot d\underline{r} = \frac{1}{2} \underline{rot}\ \underline{v} \times d\underline{r} \to \quad 2\underline{\underline{A}}_\Omega \cdot \underline{v} = \underline{rot}\ \underline{v} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{rot}\ \underline{v}$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt}=\frac{\partial\underline{v}}{\partial t}+\underline{\underline{D}}^T\cdot\underline{v}+\left(\underline{\underline{D}}-\underline{\underline{D}}^T\right)\cdot\underline{v}=\frac{\partial\underline{v}}{\partial t}+\underline{grad}\,\frac{v^2}{2}-\underline{v}\times\underline{rot}\,\underline{v}=\underline{g}-\frac{1}{\rho}\underline{grad}\,p+\nu\cdot\Delta\underline{v}$$

$$\boxed{\overbrace{\frac{\partial\underline{v}}{\partial t}}^{1}+\overbrace{\underline{grad}\,\frac{v^2}{2}}^{2}-\overbrace{\underline{v}\times\underline{rot}\,\underline{v}}^{3}=\overbrace{\underline{g}}^{4}-\overbrace{\frac{1}{\rho}\underline{grad}\,p}^{5}-\overbrace{\nu\cdot\underline{rot}\,\underline{rot}\,\underline{v}}^{6}}$$

Navier-Stokes egyenlet vektoriális formája

(feltételek: μ = áll., ρ = áll., newtoni közeg)

Euler egyenlet = Navier-Stokes, a 6. tag nélkül.

Euler egyenlet fennáll az alábbi esetekben:

- Potenciálos áramlás: $\underline{rot}\,\underline{v}=0$, ekkor a 3. és 6. tag zérus, vagy
- Állandó örvényesség: $\underline{rot}\,\underline{rot}\,\underline{v}=0$, ekkor a 6. tag zérus.

Ilyenkor a súrlódásnak nincs szerepe, az áramlás súrlódásmentesként viselkedik.