Laval-cső

Euler-egyenlet érintő irányú komponensegyenlete:

$$v\frac{\partial v}{\cancel{\partial e}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}a^2\frac{\partial \rho}{\cancel{\partial e}}$$

$\partial e \coloneqq de$ azaz végtelenül kicsi távolság

$$v\;dv = -a^2\frac{d\rho}{\rho}$$

Kontinuitás: $\rho\;v\;A = konst. \rightarrow d(\rho v A) = 0$

$$d\rho\;vA + dv\;\rho A + dA\;\rho v = 0 \quad \Big/ : \rho v A$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\left(\frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}\right)$$

$$v\;dv = a^2\left(\frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}\right)$$

$$\frac{v}{a^2}\;dv = \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} \quad \Big/ \cdot \frac{v}{v}$$

$$\frac{v^2}{a^2}\frac{dv}{v} = \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{v^2}{a^2}\frac{dv}{v} - \frac{dv}{v} = (Ma^2 - 1)\frac{dv}{v}$$

Laval-cső

$$\frac{dA}{A} = (Ma^2 - 1)\frac{dv}{v}$$

$Ma < 1$:

ha $\frac{dv}{v}$ ⊕ azaz *v* nő, akkor $\frac{dA}{A}$ ⊖ azaz *A* **csökken**

$Ma > 1$:

ha $\frac{dv}{v}$ ⊕ azaz *v* nő, akkor $\frac{dA}{A}$ ⊕ azaz *A* **növekszik**

ha $\frac{dA}{A} = 0$ akkor $\frac{dv}{v} = 0$ : a sebesség nem változik

vagy $Ma = 1$

Vagyis: *A*-nak szélsőértéke van

Mivel *Ma*=1-ig a sebesség nő ($\frac{dv}{v}$⊕), addig *A* csökken,

tehát *A*-nak negatív szélsőértéke van: a **legszűkebb keresztmetszet**.

Legszűkebb keresztmetszetben uralkodó viszonyok

$$T_t = T^* + \frac{v^{*2}}{2\,c_p} = T^* + \frac{a^{*2}}{2\,c_p} = T^* + \frac{\kappa\,R\,T^*}{2\,c_p} = T^*\left(1 + \frac{\frac{c_p}{c_v}(c_p - c_v)}{2\,c_p}\right) = \cdots = \frac{\kappa+1}{2}T^*$$

vagyis:

$$T_t = \frac{\kappa+1}{2}T^* \qquad \frac{T^*}{T_t} = \frac{2}{\kappa+1} \cong 0.83$$

$$\frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \cong 0.53$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \cong 0.63$$

Laval-cső

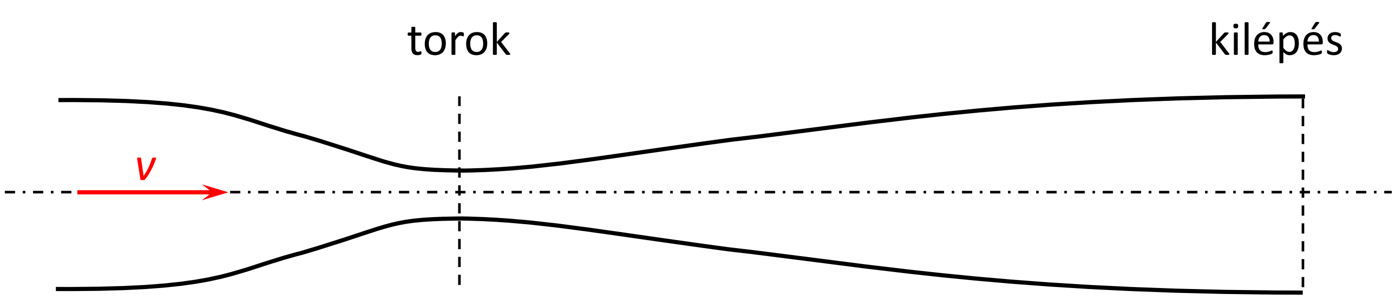
$$\frac{T^*}{T_t} = \frac{2}{\kappa + 1} \qquad \frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad \frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

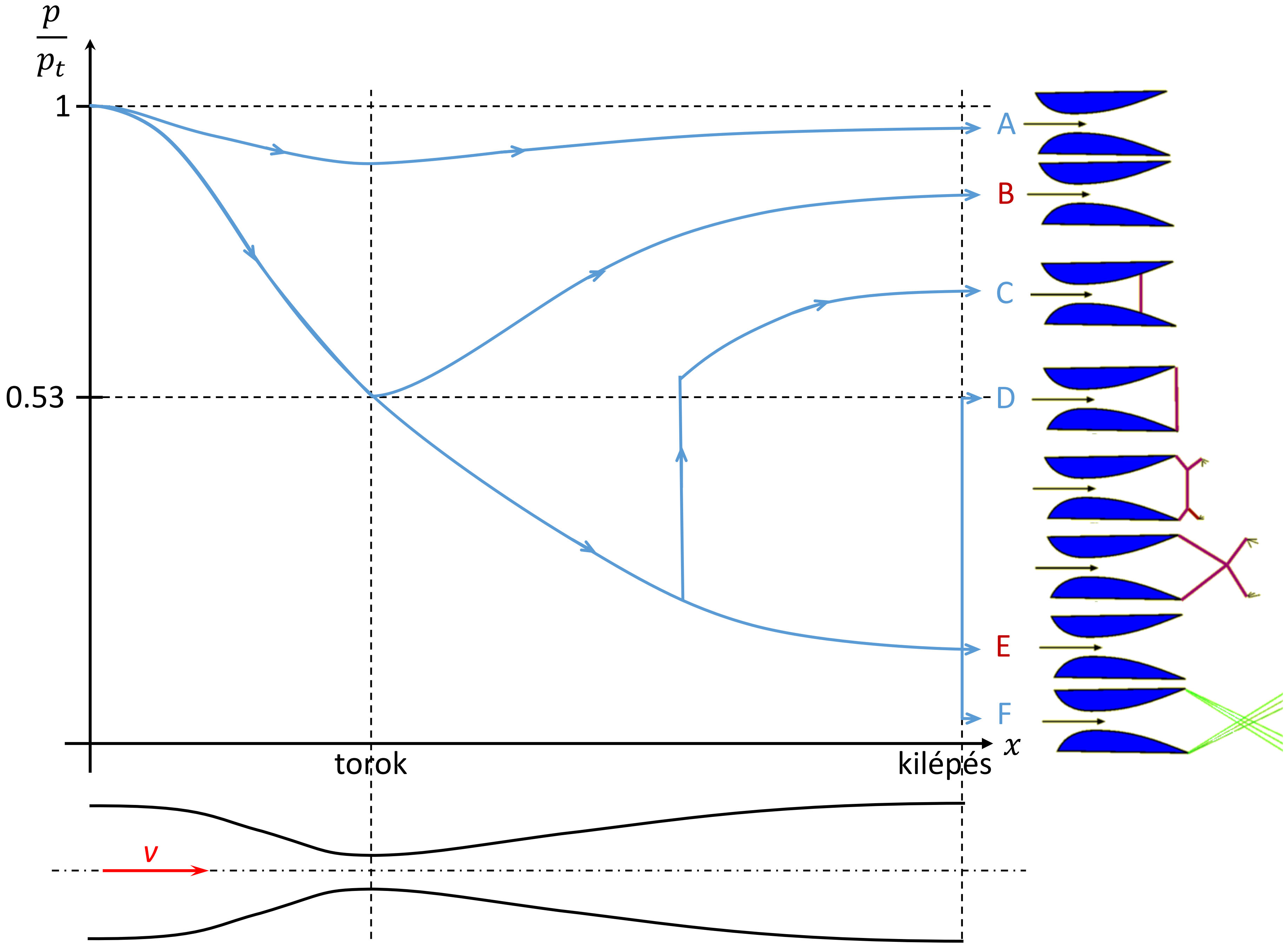
Kilépés:

$$\rho^* v^* A^* = \rho_{ki} v_{ki} A_{ki}$$

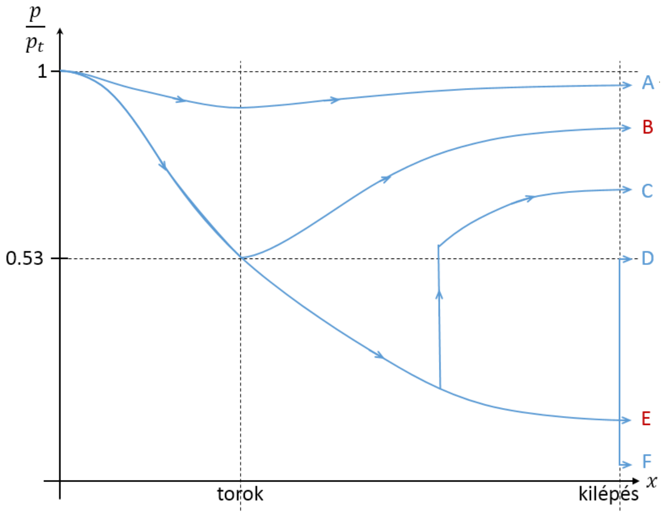
$$\underbrace{\left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \rho_t}_{\rho^*} \underbrace{\sqrt{\kappa\, R \frac{2}{\kappa + 1} T_t}}_{v^*} \cdot A^* = \underbrace{\rho_t \left(\frac{p_{ki}}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}}}_{\rho_{ki}} \underbrace{\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} RT_t \left(1 - \left(\frac{p_{ki}}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}}_{v_{ki}} \cdot A_{ki}$$

$\frac{p_{ki}}{p_t}$ -re két megoldást ad.





$\frac{p}{p_t}$
1
0.53
A
B
C
D
E
F
$x$
torok
kilépés
$v$




A-B: hangsebesség alatti áramlás.

B: eléri a hangsebességet, de nem növekszik tovább.
Izentropikus megoldás N° 1.

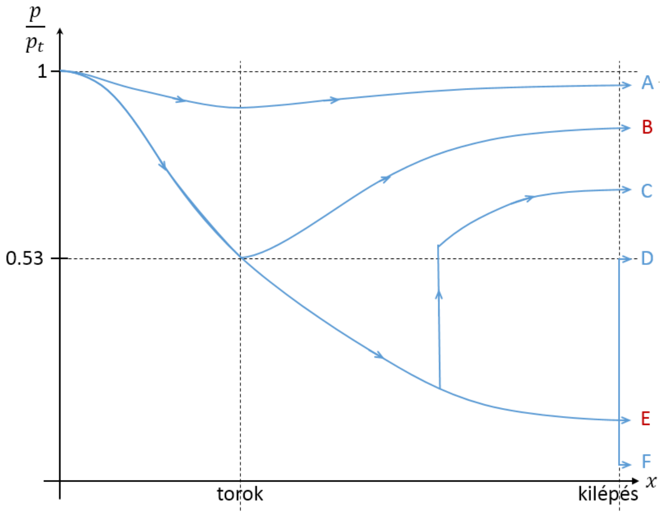
B-D: túllépi a hangsebességet, de nincsen izentropikus megoldás,
merőleges lökéshullám alakul ki a csőben, melyen keresztül lelassul a közeg.

D: túllépi a hangsebességet, de nincsen izentropikus megoldás,
merőleges lökéshullám alakul ki a cső végén, melyen keresztül lelassul a közeg.

D-E: túllépi a hangsebességet, de nincsen izentropikus megoldás,
ferde lökéshullám alakul ki a cső végén, melyen keresztül lelassul a közeg.

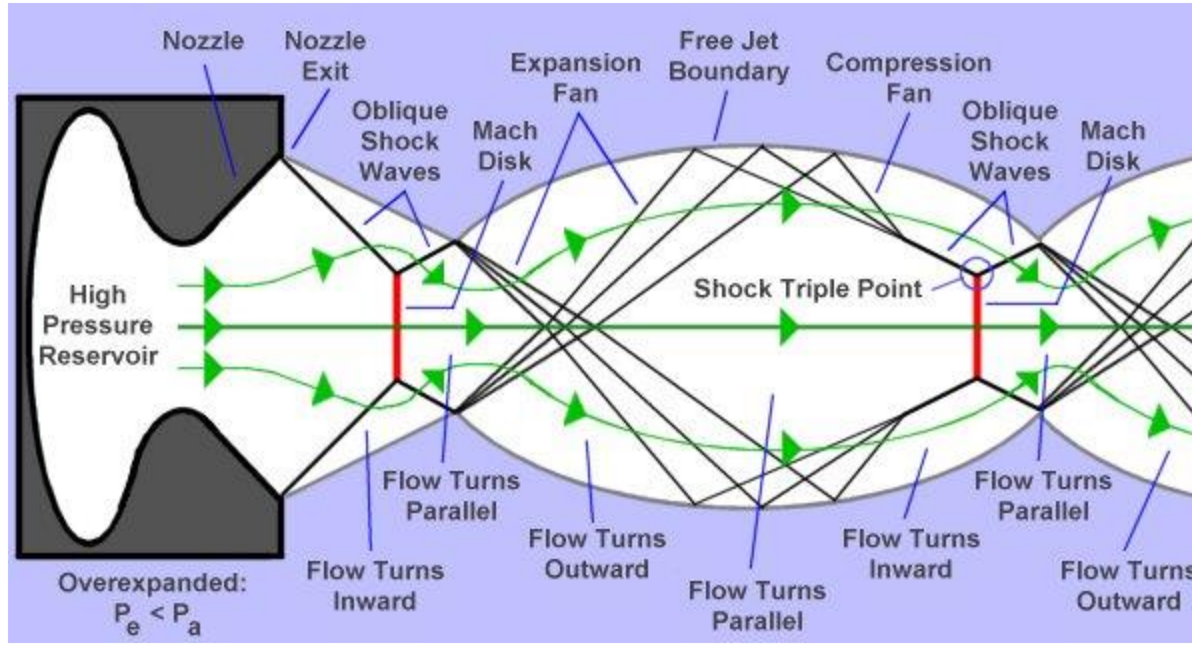
E: túllépi a hangsebességet. Izentropikus megoldás N° 2.

E-F: túllépi a hangsebességet, de nincsen izentropikus megoldás,
ferde expanziós hullámok alakulnak ki a cső végén, melyeken keresztül tovább gyorsul.



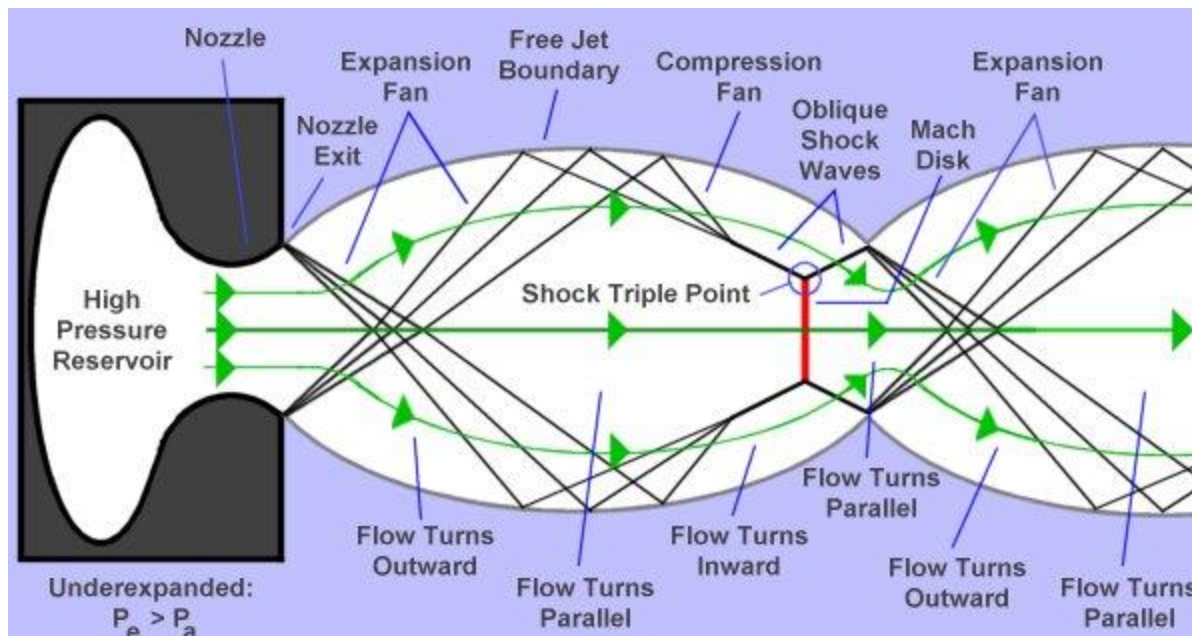
$\frac{p}{p_t}$
1
0.53
A
B
C
D
E
F
torok
kilépés
$x$


D-E:



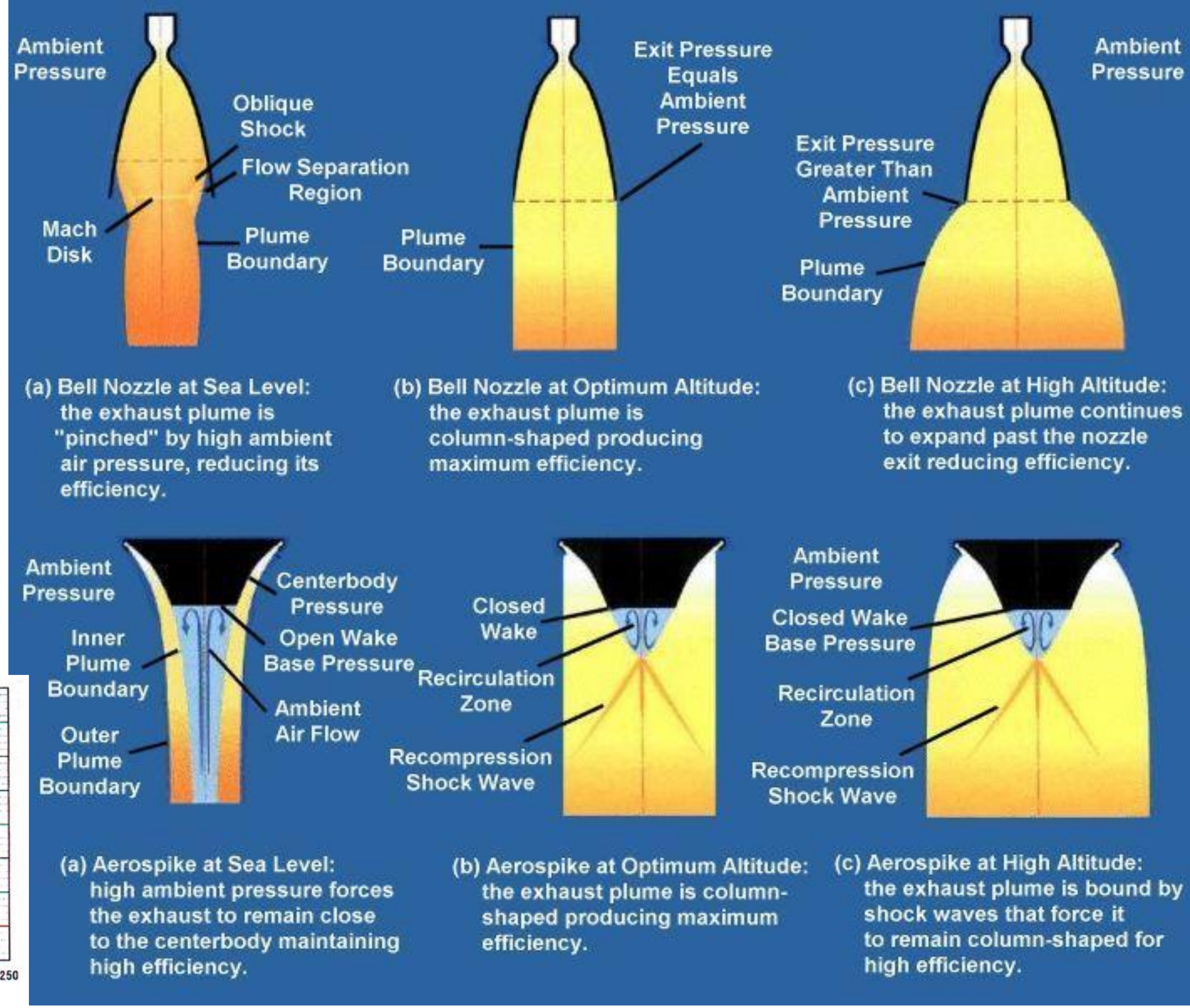
Nozzle
Nozzle Exit
Oblique Shock Waves
Mach Disk
Expansion Fan
Free Jet Boundary
Compression Fan
Oblique Shock Waves
Mach Disk
High Pressure Reservoir
Shock Triple Point
Flow Turns Parallel
Flow Turns Inward
Flow Turns Outward
Flow Turns Parallel
Flow Turns Inward
Flow Turns Parallel
Flow Turns Outward
Overexpanded:
$P_e < P_a$


E-F:

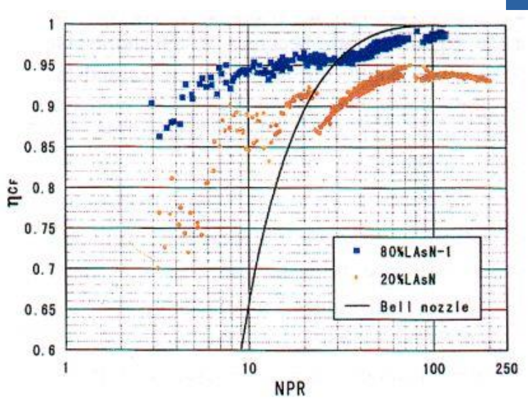


Nozzle
Expansion Fan
Free Jet Boundary
Compression Fan
Nozzle Exit
Oblique Shock Waves
Mach Disk
Expansion Fan
High Pressure Reservoir
Shock Triple Point
Flow Turns Parallel
Flow Turns Outward
Flow Turns Parallel
Flow Turns Inward
Flow Turns Outward
Flow Turns Parallel
Underexpanded:
$P_e > P_a$

"Aerospike"



Ambient Pressure
Oblique Shock
Flow Separation Region
Mach Disk
Plume Boundary
Exit Pressure Equals Ambient Pressure
Plume Boundary
Ambient Pressure
Exit Pressure Greater Than Ambient Pressure
Plume Boundary
(a) Bell Nozzle at Sea Level: the exhaust plume is "pinched" by high ambient air pressure, reducing its efficiency.
(b) Bell Nozzle at Optimum Altitude: the exhaust plume is column-shaped producing maximum efficiency.
(c) Bell Nozzle at High Altitude: the exhaust plume continues to expand past the nozzle exit reducing efficiency.
Ambient Pressure
Centerbody Pressure
Inner Plume Boundary
Open Wake Base Pressure
Ambient Air Flow
Outer Plume Boundary
Closed Wake
Recirculation Zone
Recompression Shock Wave
Ambient Pressure
Closed Wake Base Pressure
Recirculation Zone
Recompression Shock Wave
(a) Aerospike at Sea Level: high ambient pressure forces the exhaust to remain close to the centerbody maintaining high efficiency.
(b) Aerospike at Optimum Altitude: the exhaust plume is column-shaped producing maximum efficiency.
(c) Aerospike at High Altitude: the exhaust plume is bound by shock waves that force it to remain column-shaped for high efficiency.

$\eta_{cf}$
1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
1
10
100
250
NPR
80%LAsN-1
20%LAsN
Bell nozzle

Hullámegyenlet $$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\kappa\, R\, T}$$

Szilárd testekben: $$dp = -E\,\boxed{\frac{dL}{L}} = E\,\frac{d\rho}{\rho}$$

negatív húzófeszültség

Rugalmassági modulus

relatív megnyúlás

Innen: $$\frac{dp}{d\rho} = \frac{E}{\rho} \rightarrow a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Hullámegyenlet

Hullám, együttmozgó koordinátarendszer (ld. előző óra).

Impulzustétel: $2\rho a dv - a^2 d\rho = dp$ Kontinuitás: $\rho dv = a d\rho$ (ld. előző óra)

Ezúttal más átrendezés: $2\rho a dv - a\rho dv = dp$

$$a\rho dv = dp$$

*dp*: hangnyomás változás, *dv*: részecskesebesség (áramlási sebesség a hullám mögött)

Nyugvó levegőben terjedő síkhullám: $p$, $\rho$, $T$, $v_x$ csak $x$ és $t$ függvénye.

(majdnem) mindegyik fizikai jellemző felbontható $x_0$ időbeli átlag és $x'$ ingadozás összegére:

$p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $T = T_0 + T'$.

De $v_x = v_x{}'$ mert nyugvó levegőben $v_0 = 0$ .

Továbbiakban $v_x{}'$ jelölése: $v$ .

Kontinuitás:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\,\underline{v}) = 0 \rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{v}grad\,\rho + \rho\,div\underline{v} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x} + (\rho_0 + \rho')\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \cancel{v\frac{\partial\rho}{\partial x}} + \rho_0\frac{\partial v}{\partial x} + \cancel{\rho'\frac{\partial v}{\partial x}} = 0$$ $v$ (részecskesebesség) kicsi, $\rho'$ (sűrűségingadozás) kicsi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Első tag felbontva: $\frac{\partial\rho}{\partial t} = \overbrace{\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial p}}}^{\frac{1}{a^2}}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial t}$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t} = 0$$

Euler:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\underline{grad}p \rightarrow \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{grad}\,\underline{v} = -\frac{1}{\rho}\underline{grad}p \quad \Big/ \cdot \rho(= \rho_0 + \rho')$$

$$(\rho_0 + \rho')\frac{\partial v}{\partial t} + (\rho_0 + \rho')v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \cancel{\rho' \frac{\partial v}{\partial t}} + \cancel{\rho_0 v \frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{\rho' v \frac{\partial v}{\partial x}} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$v$ (részecskesebesség) kicsi,
$\rho'$ (sűrűségingadozás) kicsi

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}} = 0 \\
&\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0
\end{aligned}\right\} \ominus$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \;\rightarrow\; \boxed{\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}$$

Akusztikai hullámegyenlet

Hullámegyenlet általános megoldása: $p(x,t) = f(x-at) + g(x-at) + p_0$

ahol $p_0$ a statikus nyomás, $f$ és $g$ tetszőleges függvények, $a$ a hullámterjedési sebesség.

Fizikai jelentése: 2 hullám halad egymással ellentétes irányban,
a hullámforma (= f és g függvények) nem változik, csak a pozíciójuk az idő függvényében.

A hullámforma leírható pl. harmonikus hullámmal: $p = \hat{p} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} t \pm \frac{2\pi}{\lambda} x\right) + p_0$

ahol $\hat{p}$ a nyomásamplitúdó, $T$ a periódusidő, $\lambda$ a hullámhossz.

De: nem szerepel benne a hangsebesség, hová lett?

$$p = \hat{p} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} t \pm \frac{2\pi}{\lambda} x\right) + p_0$$

$f = \dfrac{1}{T}$ frekvencia $\qquad \omega = 2\pi f$ körfrekvencia $\qquad k \coloneqq \dfrac{2\pi}{\lambda}$ hullámszám

Innen: $p = \hat{p} \cdot cos(\omega t \pm kx) + p_0$

Ez maximális *t* = 0-nál, ekkor *x* is 0, ezért cos(0): ekkor $p = \hat{p} + p_0$

$t_1 \neq 0$-nál hol lesz ismét maximális → ismét cos(0) kell:

($\lambda$: hullámhossz, *T*: periódusidő)

$$\omega t_1 - kx_1 = 0 \rightarrow \omega t_1 = kx_1 \rightarrow \frac{x_1}{t_1} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = f\lambda = \frac{\lambda}{T} = a$$

$$\omega t_1 + kx_1 = 0 \rightarrow \omega t_1 = -kx_1 \rightarrow \frac{x_1}{t_1} = -a$$

$\pm a$ fizikai jelentése: 2 hullám halad hangsebességgel, egymással ellentétes irányban.

A hullámegyenlet csak a hang terjedését írja le, a keletkezését és az elhalását nem.

Relatív sebesség repülőn

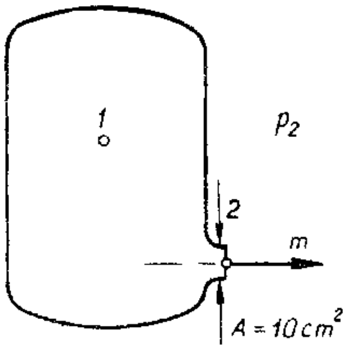
Egy repülőgép $T_1$=0 °C hőmérsékletű, $p_1=10^5$ Pa nyomású levegőben $v_1$=200 m/s sebességgel halad. A szárny egyik pontján a relatív sebesség $v_2$=250 m/s. R=287 J/kgK, $\kappa$=1.4
Mekkora a Mach-szám a jelzett pontban?

$$c_p = \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} = 1005 \frac{J}{kgK} \qquad T + \frac{v^2}{2c_p} = áll. \rightarrow T_2 = T_1 + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c_p} = 261.8\ K$$

$$a_1 = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1} = 331.2\ \frac{m}{s} \qquad Ma_1 = \frac{v_1}{a_1} = 0.604$$

$$a_2 = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_2} = 324.3\ \frac{m}{s} \qquad Ma_2 = \frac{v_2}{a_2} = 0.77$$

## Tartálykiürülés




$p_1$ = 1.3 bar, $p_2$ = 1 bar, $A_2$ = 10 cm2
$T_1$ = 0 °C
R = 287 J/kgK
κ = 1.4
Izentropikus állapotváltozás.
$q_m$ = ?

$$T+\frac{v^2}{2c_p}=áll. \qquad \frac{p}{\rho^\kappa}=áll. \qquad \kappa=\frac{c_p}{c_v} \qquad R=c_p-c_v \qquad c_p=\frac{\kappa\cdot R}{\kappa-1}=1005\,\frac{J}{kgK}$$

$$\rho_1=\frac{p_1}{RT_1}=1.66\,\frac{kg}{m^3}$$

$$\frac{p}{\rho^\kappa}=áll.\rightarrow T_2=T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}=253.3\ K \qquad \rho_2=\frac{p_2}{RT_2}=1.376\,\frac{kg}{m^3}$$

$$T+\frac{v^2}{2c_p}=áll.\rightarrow v_2=\sqrt{2c_p(T_1-T_2)}=199\,\frac{m}{s}$$

$$q_m=A_2\rho_2v_2=0.274\,\frac{kg}{s}$$