F1

M

Név:......................**MEGOLDÁS**...

NEPTUN kód:................................. ÜLŐHELY sorszám..............

PONTSZÁM:Σ50p / p

1. FELADAT (10pont = 10×1pont, csak a tökéletesen jó válasz ér 1-1 pontot)

1.1) Az ún. newtoni folyadékokban a deformáció sebességével arányos a csúsztatófeszültség. Írja le az arányossági tényező pontos megnevezését, jelét és mértékegységét!

μ [kg·m^{-1}·s^{-1}] dinamikai viszkozitás

1.2) Sorolja fel a valós folyadékok sajátosságait!

molekuláris szerkezetű (nem folytonos, azaz nem kontinuum), inhomogén
összenyomható = kompresszibilis ($\rho \neq$áll.)
nem súrlódásmentes, azaz súrlódásos (viszkózus) ($\mu \neq 0$)

1.3) Melyik összefüggés(ek) fejezi(k) ki egy elemi folyadékrész konvektív gyorsulását?

$A)\ \underline{\boldsymbol{a}}_{konv} = \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial \underline{\boldsymbol{r}}}\frac{\partial \underline{\boldsymbol{r}}}{\partial t}$

$B)\ \underline{\boldsymbol{a}}_{konv} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{r}}}{\partial t}$

$C)\ \underline{\boldsymbol{a}}_{konv} = \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial t}$

$D)\ \underline{\boldsymbol{a}}_{konv} = \underline{\underline{\boldsymbol{D}}} \cdot \underline{\mathbf{v}}$

1.4) Karikázza be a $\underline{\underline{D}}$ deriválttenzor helyes alakjára vonatkozó jó válasz vagy válaszok betűjelét!

A)
$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

B)
$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

C)
$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

1.5) Karikázza be a jó válasz vagy válaszok betűjelét! Egy potenciálos erőtér térerősség vektora és az erőtér skalár potenciálja között az alábbi összefüggés áll fenn:

A) $\underline{g} = -gradU$

C) $\underline{g} = gradU$

B) $\rho\underline{g} = -gradU$

D) $\rho\underline{g} = U$

1.6) Az alábbiak közül mely(ek) a nyomásgradiens vektor tulajdonsága(i)? Karikázza be a helyes válasz vagy válaszok betűjelé(i)t!

A nyomásgradiens vektor…

A) …a nyomás növekedésének irányába mutat.
B) …a nyomás legrohamosabb változásának irányával párhuzamos.
C) …merőleges az ekvipotenciális (U=áll.) szintfelületre.
D) …merőleges az izobár (p=áll.) szintfelületre.

1.7)Karikázza be a jó válasz vagy válaszok betűjelét!
Mely egyenlet(ek) fejezi(k) ki a folytonosság tétel általános integrál alakját?

A)

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V div(\rho \underline{v}) dV = 0$$

B)

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho\, \underline{v}\, d\underline{A} = 0$$

C)

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV + \int_V div(\rho \underline{v}) dV = 0$$

D)

$$\int_V \frac{d\underline{v}}{dt} dV + \int_V div(\rho \underline{v}) dV = 0$$

1.8) Az Euler-egyenlet levezetésekor használt egyetlen feltétel:

A) potenciálos erőtér
B) ideális közeg
C) súrlódásmentes közeg
D) stacioner áramlás

1.9) Karikázza be a helyes állítás(ok) betűjele(i)t!

A) A *Prandtl*-csővel az össznyomás és a statikus nyomás különbségét mérjük.
B) A *Pitot*-cső torlópontjában v=0 feltétel miatt a statikus nyomás zérus.
C) $p_{din} = p_ö + p_{stat}$
D) $p_{din} = \frac{\rho}{2} v^2$

1.10) Egészítse ki a Bernoulli-egyenlet alábbi hiányos alakját helyesre! Feltételek: ideális közeg instacioner áramlása, csak a potenciálos nehézségi erőtér hat, az „1" és „2" pontok egy áramvonalon helyezkednek el. Kérem, adja meg minden Ön által beírt mennyiség nevét és mértékegységét is! ($d\underline{s}$: elmozdulás vektor, p: nyomás, ρ: sűrűség, z: magasság-koordináta)
$\underline{v}$ [m/s]: sebességvektor; t [s] idő; g [N/kg] erőtér térerősségvektora

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} + \left[\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g\, z \right]_1^2 = 0$$

2. FELADAT (8pont)

Épp egy focilabda gyárat vettünk meg és úgy döntünk, hogy igen jó reklám lesz az, ha április 1-én az összes (832 218 fő) magyarországi fiúnak 1-1 felfújt focilabdát ajándékozunk. (A lányok más ajándékot kapnak.) Magyarországon jelenleg az alábbi demográfiai létszámadatok állnak rendelkezésre:

	Összesen [fő]	ebből lány [fő]	ebből fiú [fő]
óvodások és iskolások	1 483 246	748 755	734 491
nappali felsőoktatásban tanulók	202 278	104 551	97 727
ÖSSZESEN	1 685 524	853 306	**832 218**

A focilabda gyárunkban N_T=10db egyenként $V_{Tartály}$=10m^3 térfogatú légtartály áll rendelkezésünkre: ezek egyenként 50 bar túlnyomásra (p_T=p_0+50bar=51bar abszolút nyomásra) vannak feltöltve t_{lev}=20°C levegővel. Ezekből tudjuk a focilabdákat adott nyomásra feltölteni.

A FIFA szabályzata szerint gyártott szabványos labda belső térfogata V_{Labda}=5,6 liter. A labda térfogatát és a levegő t_{lev}=20°C hőmérsékletét is tekintsük állandónak, azaz felfújás előtt és után azonosnak. Minden labdát pontosan 1 bar túlnyomásra kell felfújnunk. Felfújás előtti alapállapotban a labda belső nyomása megegyezik a p_0=10^{5}Pa környezeti nyomással.

<u>Adatok</u>: p_0=10^{5}Pa; R=287 J/(kg·K); t_{lev}=20°C; $V_{Tartály}$=10m^3; N_T=10db; V_{Labda}=5,6 *l*;

<u>KÉRDÉS</u>: Van-e elég levegő a 10db légtartályunkban ahhoz, hogy <u>minden</u> fiú 1-1 db azonos 1 bar túlnyomásra felfújt focilabdát kapjon? (A sűrített levegős tartályaink újratöltése nélkül.) Válaszát számítással indokolja!

MEGOLDÁS

$m=\rho\cdot V$

$\rho=p/(R\cdot T) = m/V$

<u>Hosszú megoldás:</u>

A V_L=állandó térfogatú labda feltöltéséhez szükséges levegőtömeg a 2bar nyomású végállapotú labdában lévő és az 1bar nyomású alapállapotban már benne lévő levegő tömegek különbsége:

$\Delta m_{L,1db}= m_{L,2bar} - m_{L,1bar}= \rho_{L,2bar}V_{L,2bar} - \rho_{L,1bar}V_{L,1bar} = V_{L,2bar}\,(\rho_{L,2bar} - \rho_{L,1bar})= V_{L,2bar}\,(p_{L,2bar} - p_{L,1bar})/(RT_0)$

$\Delta m_{L,1db}$=0,0056·(200 000 — 100 000) / (287·293) **= 0,00665945226 kg (≈6,66g≈7g)**

A 10db 50 bar túlnyomásos tartályban lévő levegő labda felfújásra addig használható, amíg a tartályban lévő túlnyomás 1bar –ra nem csökken, utána már nem tudja feltölteni a focilabdát. Az összes rendelkezésre álló levegőtömeg így az 51bar nyomású alap- és a 2bar nyomású végállapotban lévő levegő tömegek különbsége N_T=10db tartályra:

$\Delta m_T= m_{T,51bar} - m_{T,2bar}= N_T\cdot[\,\rho_{T,51bar}V_{T,51bar} - \rho_{T,2bar}V_{T,2bar}\,]= N_T\cdot V_T\cdot(p_{L,51bar} - p_{L,2bar})/(RT_0)$

Δm_T=10·10·(4 900 000) / (287·293) = **5827,0207275452 kg (≈5827kg)**

$N_L= \Delta m_T / \Delta m_{L,1db}$ = <u>875 000 db</u> > 832 218 fő (Tehát minden fiú kaphat labdát.)

(Ha kerekítve 7g-mal és 5827kg-mal számolunk, akkor N_L= 5827kg / 0,007kg = 832 429 db az eredmény, még így is jut minden fiúnak focilabda bolondok napi ajándékként.)

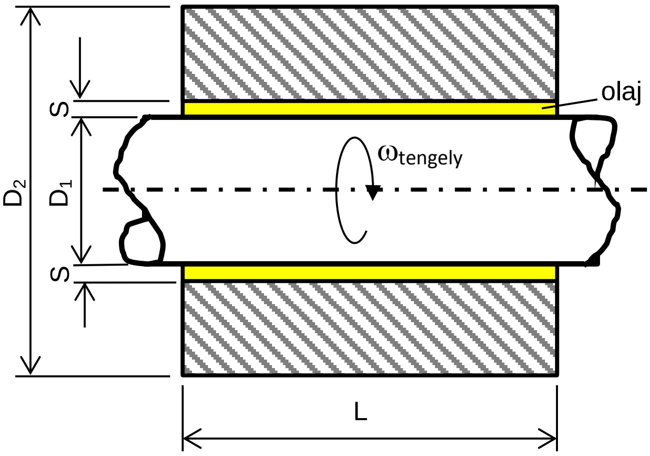
<u>Rövid megoldás paraméteresen</u>

$N_L=\Delta m_T / \Delta m_{L,1db}= [N_T\cdot V_T\cdot\Delta p_T] / [V_L\cdot\Delta p_L]$

$N_L= N_T\cdot V_T/V_L\cdot\Delta p_T/\Delta p_L$ = 10· 10/0,0056·49/1 = <u>875 000 db</u> **> 832 218 fő (Tehát minden fiú kaphat labdát.)**

MEGJEGYZÉS: A megoldókulcsban lévő eredmények számértékének fenti, sok tizedesre való kijelzését csak a megoldásuk (részeredmények, elszámolások, kerekítési hibák) ellenőrzése miatt használom, ezt így kijelezni mérnöki szempontból nem helyes, csak nekem segítség a ZH javítás során. A megoldásukat természetesen, mérnöki szempontból „értelmesen", a kerekítési szabályok szerint helyesen kerekített részeredményekkel kapott végeredménnyel is elfogadom.

3. FELADAT (8pont)



Egy $\varnothing D_1$ = 100 mm átmérőjű hajótengelyt egy L = 50 mm hosszúságú és $\varnothing D_2$ = 250 mm külső átmérőjű álló csapágyház veszi körül (koncentrikus tengelyek). A tengely és a csapágyház között lévő S = 0,1 mm rést ismert állandó 800 kg/m^3 sűrűségű és állandó $5\cdot10^{-6}$ m^2/s viszkozitású kenőolaj tölti ki. A tengelyt állandó $\omega_{tengely}$ = 500 *1/s* szögsebességgel forgatjuk.

FELTÉTELEK: stacioner állapot, az olaj newtoni folyadéknak tekinthető, $v_{tang}=f(r)$ sebességprofil lineáris; $v_{ax}=0$; $v_{rad}=0$.

KÉRDÉSEK:

A) Határozza meg a résben ébredő csúsztatófeszültséget, a súrlódásból adódó átlagos kerületi erőt, veszteségnyomatékot és veszteségteljesítményt!

B) Melyik esetben csökken nagyobb mértékben a súrlódás okozta veszteségteljesítmény: ha a tengely fordulatszámát csökkentjük a felére, vagy ha fele ekkora viszkozitású olajat használunk? Válaszát indokolja!

MEGOLDÁS

A)

Szögsebesség: ω=1000 1/s

Kerületi sebesség: $v_{ker}=R_1\cdot\omega$=25 m/s, ahol $R_1=D_1/2$=100mm/2=50mm=0,05 m

Csúsztatófeszültség: $\tau = \mu\frac{\partial\gamma}{\partial t} \cong \mu\frac{\partial v_{ker}}{\partial r}$,

ahol $\partial v_{ker} = v_{ker} - 0 = v_{ker}$ = 25 m/s, és ∂r = S = 0,1mm=10^{-4}m

mivel a dinamikai viszkozitás $\mu=\rho\cdot\nu=800\cdot5\cdot10^{-6}=4\cdot10^{-3}$kg/(m·s), ezekkel:

a) 1db csapágyra τ=1000Pa

Kerületi erő: $F_{ker}=\tau\cdot A_{palást}$=15,723671 N (≈15,7N)

ahol a nyírt folyadékfelszín a résben egy közép hengerpalást felülete:

$A_{palást}=D_{közép}\cdot\pi\cdot L$=0,1001m$\cdot\pi\cdot$0,05m=$1,5723671\cdot10^{-2}$ m^2

A nyírt folyadék (rés) középátmérője $D_{közép}=D_1+S$= 100mm+0,1mm=0,1001m, azaz a középsugár $R_{közép}=D_{közép}/2$=0,05005m

Veszteségnyomaték: $M_{veszt}=F_{ker}\cdot R_{közép}$= 0,786969745 Nm (≈0,787 Nm)

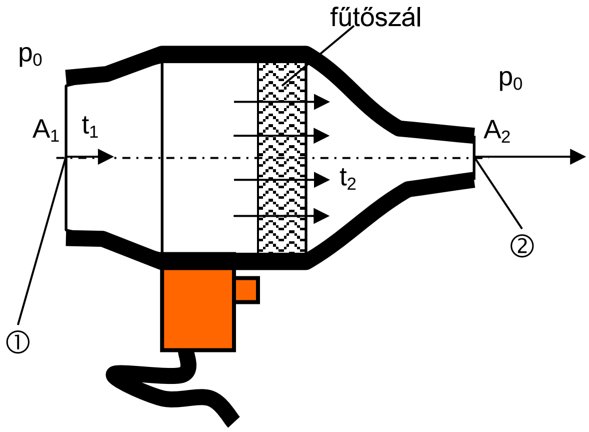
A csapágy veszteségteljesítménye: $P_{veszt}=M_{veszt}\cdot\omega$= 393,4848726 W (≈393,5 W)

B)

Mivel $P\sim\omega^2$ illetve $P\sim\mu$, így ha a fordulatszámot csökkentjük felére, akkor negyedére csökkent a veszteség teljesítmény, míg a fele ekkora viszkozitás esetén csak a felére csökken.

MEGJEGYZÉS: A megoldókulcsban lévő eredmények számértékének fenti, sok tizedesre való kijelzését csak a megoldásuk (részeredmények, elszámolások, kerekítési hibák) ellenőrzése miatt használom, ezt így kijelezni mérnöki szempontból nem helyes, csak nekem segítség a ZH javítás során. A megoldásukat természetesen, mérnöki szempontból „értelmesen”, a kerekítési szabályok szerint helyesen kerekített részeredményekkel kapott végeredménnyel is elfogadom.

4. FELADAT (8pont)



Egy hőlégfúvó ún. áramcsőnek tekinthető: csak az A_1=50cm^2 belépő és az A_2=10cm^2 kilépő keresztmetszetén nyitott. A fűtőszál a beszívott t_1=17°C levegőt t_2=87°C-ra fűti fel. A kiáramló levegő átlagsebessége v_2=20m/s. R=287 J/(kg·K)

Feltételek: stacioner állapot; a sűrűségszámítás szempontjából p_0=10^{5}Pa vehető mindenhol.

KÉRDÉSEK: Határozza meg a

- hőlégfúvó belépő keresztmetszetében a térfogatáramot,
- a belépő levegő átlagsebességét,
- valamint a levegő tömegáramát!

MEGOLDÁS

Stacioner állapot, de mivel ρ≠állandó, így a folytonosság tétele q_m = állandó, azaz $\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2$ alakban használandó.

	„1"	„2"
A [m^2]	$50 \cdot 10^{-4}$	$10 \cdot 10^{-4}$
t [°C]	17	87
T [K]	290	360
p [Pa]	10^5	10^5
ρ [kg/m^3]	1,201489847	0,967866821
v [m/s]	$=v_2 \cdot \rho_2/\rho_1 \cdot A_2/A_1=$ $=v_2 \cdot (T_1/T_2) \cdot (A_2/A_1)$=3,222222	20
q_V [m^3/s]	$=v_1 \cdot A_1$=1,611111·10^{-2}	$=v_2 \cdot A_2$=0,02
q_m [kg/s]	1,9357336·10^{-2}	

MEGJEGYZÉS: A megoldókulcsban lévő eredmények számértékének fenti, sok tizedesre való kijelzését csak a megoldásuk (részeredmények, elszámolások, kerekítési hibák) ellenőrzése miatt használom, ezt így kijelezni mérnöki szempontból nem helyes, csak nekem segítség a ZH javítás során. A megoldásukat természetesen, mérnöki szempontból „értelmesen", a kerekítési szabályok szerint helyesen kerekített részeredményekkel kapott végeredménnyel is elfogadom.

5. FELADAT (8p)

Ön a Magas-Tátra hegység 2632m magas Lomnici-csúcsáról utazik lefelé lanovkával a 910m tengerszintfeletti magasságban fekvő Tátralomnicra. A csúcson indulás előtt kiitta a teát az 1 literes termoszából, aztán a kupakot hermetikusan lezárta és nem is nyitotta ki az utazás alatt.

__KÉRDÉSEK__:

A) Tátralomnicra érve mekkora a nyomáskülönbség a termosz belső tere és a külső környezeti nyomás között? Ha kinyitja a termoszkupak szelepét, akkor azon keresztül kifelé vagy befelé kezd el áramlani a levegő? Az A) kérdés során a p=*f*(z) számítása során **izoterm atmoszférát** tételezzen fel, melyhez az adatok: z_0=0m, p_0=101325Pa; T_0=288K; R=287 J/(kgK), g=9,81 N/kg.

B) Mekkora lenne a termosz belső tere és a külső környezeti nyomás között ez a nyomáskülönbség Tátralomnicra érkezéskor, ha nem izoterm atmoszféra, hanem a z_0=0m tengerszinti **ρ_0=állandó** feltétellel számolná a p=*f*(z) környezeti nyomást?

MEGOLDÁS

A)

Izoterm atmoszféra feltételt használva bármely z_i magasságon a p_i nyomás az alábbi p=*f*(z) kifejezéssel számítható:

$$p_i = p_0 \cdot e^{-\frac{g \cdot (z_i - z_0)}{R \cdot T_0}}$$

Esetünkben z_i = 2632m (fent) és 910m(lent) ismeretében a nyomások:

fent: $p_{CSÚCS}$=74140 Pa

lent: $p_{TÁTRALOMNIC}$=90952 Pa

A nyomáskülönbség Δp= $p_{TÁTRALOMNIC}$ — $p_{CSÚCS}$,= 90952Pa — 74140Pa = 16812 Pa

Mivel $p_{TÁTRALOMNIC}$ > $p_{CSÚCS}$, így ha kinyitjuk a kupakszelepet, akkor kintről befelé áramlik a levegő.

B)

A ρ_0=áll. feltételt használva: Mivel z_0 =0m tengerszinten a nyomás p_0 =101325Pa és T_0=288K=áll. adatok ismertek, így a ρ_0=1,225863821kg/m^3 (≈1,226kg/m^3) álladó sűrűség ismeretében bármely z_i magasságon a p_i nyomás felírható:

$$p_i = p_0 - \rho_0 \cdot g \cdot (z_i - z_0) = p_0 - \rho_0 \cdot g \cdot z_i$$

fent: $p_{CSÚCS}$=69673 Pa

lent: $p_{TÁTRALOMNIC}$=90382 Pa

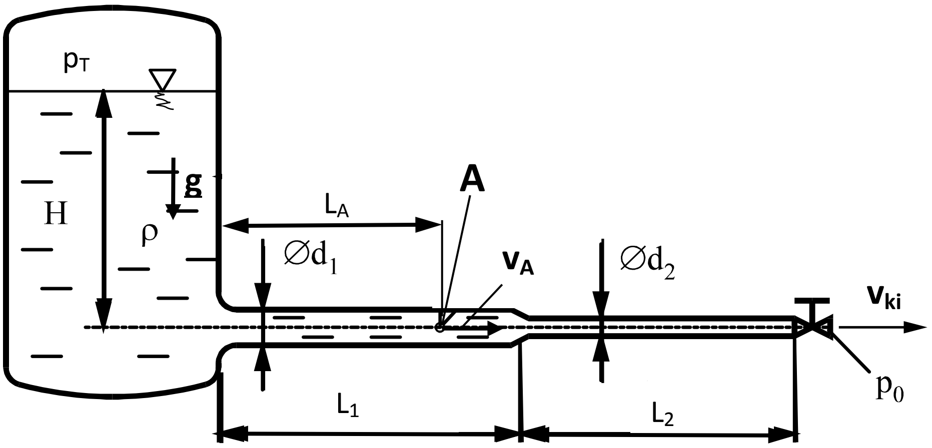
A nyomáskülönbség Δp= $p_{TÁTRALOMNIC}$ — $p_{CSÚCS}$,= 90382Pa — 69673Pa = 20709Pa

Mivel $p_{TÁTRALOMNIC}$ > $p_{CSÚCS}$, így ha kinyitjuk a kupakszelepet, akkor ρ_0=áll. feltételt használva is kintről befelé áramlik a levegő, de nagyobb a nyomáskülönbség, mint izoterm atmoszféra feltétel esetén.

MEGJEGYZÉS: A megoldókulcsban lévő eredmények számértékének fenti, sok tizedesre való kijelzését csak a megoldásuk (részeredmények, elszámolások, kerekítési hibák) ellenőrzése miatt használom, ezt így kijelezni mérnöki szempontból nem helyes, csak nekem segítség a ZH javítás során. A megoldásukat természetesen, mérnöki szempontból „értelmesen", a kerekítési szabályok szerint helyesen kerekített részeredményekkel kapott végeredménnyel is elfogadom.

6. FELADAT (8p)

A vízzel töltött, ismert $p_T = 2 \cdot 10^5$ Pa nyomású zárt felszínű tartályhoz egy vízszintes tengelyű csővezeték csatlakozik. Az ábrán látható „A” pontban a víz v_A=5m/s átlagsebessége ismert.



FELTÉTELEK: stacioner állapot, μ=0, ρ=áll., $A_{Tartály}$>>$A_{cső}$. A csővégi szelep p_0 nyomásra teljesen nyitott, a kilépő keresztmetszete d_2 csőével azonos.

ADATOK: $p_0=10^5$ Pa; g=10 N/kg; $\rho_{víz}=10^3$ kg/m³; L_1=10m; L_2= 10m; L_A= 7m; $\varnothing d_1$= 100mm; $\varnothing d_2$= 50mm

KÉRDÉSEK: Határozza meg a

A) csővégi kiáramlási keresztmetszetben a dinamikus nyomást, $p_{din,ki}$=?

B) tartálybeli vízfelszín magasságát, H=?

C) és az „A” pontbeli statikus és össznyomást! $p_{stat,A}$=?; $p_{ö,A}$=?

MEGOLDÁS

A példában megadott feltételek esetén a Bernoulli-egyenlet az alábbi alakú:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

Ahol az áramvonal két végpontja az „1” és a „2” pont, célszerűen az egyik végpont az a pont, ahol egyetlen keresett ismeretlen mennyiség (p vagy v vagy z) van, a másik pontban pedig mindent ismerünk.
A z=0m referencia szintet bárhova felvehetjük, most legyen z=0m a csőtengelyben.

A)
v_2=20m/s , amely kiszámítható a folytonosság tételéből, hiszen ρ=állandó így a v·A=állandó. ($v_A \cdot A_A = v_{ki} \cdot A_{ki}$)
Ezzel kapjuk: $p_{din,ki} = \frac{\rho}{2} \cdot v_{ki}^2$=200 000Pa.

B)

	„1”=tartály vízfelszín	„ki” jelölt pont kilépésnél (csővég)
p [Pa]	200 000Pa	p_0=100 000Pa
v [m/s]	≈0m/s	v_2=20m/s
z [m]	z_1=H=?	z_2=0m

Rendezve: $p_1 + \rho \cdot g \cdot H = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot v_{ki}^2$

$$H = \frac{p_0 - p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_{ki}^2}{2g} = \frac{100000 - 200000}{10000} + \frac{400}{20} = -10 + 20 = 10m$$

C)

	„A”	ki” jelölt pont kilépésnél (csővég)
p [Pa]	$p_{stat,A}$=?	p_0=100 000Pa
v [m/s]	$p_{din,A} = \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2$=12500Pa, ebből v_A=5m/s	v_2=20m/s
z [m]	z_A=0m	z_2=0m

Az alábbi

$$p_A + \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot z_A = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot v_{ki}^2 + \rho \cdot g \cdot z_{ki}$$

A Bernoulli-egyenletet fenti adatokkal rendezve az ismeretlen p_A nyomásra kapjuk (ez a statikus nyomás „A” pontban)

$$p_A = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot (v_{ki}^2 - v_A^2) = 100000Pa + 500(400 - 25) = 287500Pa$$

Az „A” pontbeli össznyomás pedig:

$$p_{ö,A} = p_{stat,A} + p_{din,A} = p_{stat,A} + \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2 = 287500 + 12500 = 300000Pa$$