Aufgaben über Gasdynamik

Egy T-65B Xwing Starfighter repülőgép szeli csukott szárnyakkal, *u=200 m/s* sebességgel a *t=0°C* hőmérsékletű felhőket. A repülőgép szárnyának felső pontján a sebesség *20%*-kal magasabb a haladási sebességnél.

Kérdés: a) Határozzuk meg a repülőgép Mach számát, a torlóponti hőmérsékletet, valamint Mach-számot a felső pontban!

b) Becsüljük meg a repülőgép súlyát, ha vízszintes EVEM-et (egyenes vonalú egyenletes mozgást) végez, és a szárny felülete 18m²!

Adatok: $u = 200$ m/s; $u_{SZF} = 1{,}2 \cdot u$; $t = 0°C$; $A_{SZ} = 18 m^2$;
$R = 287$ J/(kgK); $\kappa = 1{,}4$; $p_0 = 1$ bar; $c_p = 1004$ J/(kg/K);

MEGOLDÁS

Kezdeti (általános) megfontolások: amennyiben az áramló közeg összenyomható, - pl. ha a szobahőméréskleten a levegő sebessége nagyobb, mint ~100m/s – a Bernoulli-egyenlet nem használható, helyette az energia-egyenletet alkalmazzuk. Az energia-egyenlet stacionárius, hőszigetelt és súrlódásmentes áramlást feltételezve, valamint a térerő és a helyzeti energia figyelmen kívül hagyásával a következő alakot ölti:

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{v^2}{2}+c_v\right)\rho dV=-\int \underline{v}pd\underline{A}$$

, azaz a gáz mozgási és belső energiájának megváltozása a nyomásból származó erők munkájának következménye. Matematikai és hőtani ismereteket felhasználva a fenti egyenlet a következő, mérnöki számításokban egyszerűbben használható alakra hozható:

$$\int grad\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)\rho\underline{v}dV=0$$

Az egyenlet akkor teljesül, ha $\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)$ vagy az egész vizsgált térrészben, vagy egy áramvonal mentén állandó. Az energia-egyenlet tehát azt fejezi ki, hogy a gáz mozgási energiájának és entalpiájának összege egy áramvonalon állandó, amennyiben az áramlás stacioner, súrlódásmentes és hőszigetelt (azaz izentrópikus). Tovább gondolva, ha az áramlás sebessége nő, akkor hőmérséklete csökken, és fordítva.

Amennyiben $\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)$-t osztjuk cp-vel, definiálhatjuk az össz-, statikus és dinamikus hőmérésékleteket (**Kelvin fokban**!):

$$T_{össz}=T_{st}+T_{din}=T+\frac{v^2}{2c_p}=áll.$$

a) feladatrész

Kezdeti megfontolások:

- az áramlás a géphez rögzített koordinátarendszerből tekintve stacionárius
- a levegő sebessége nagyobb, mint ~100m/s, az energia-egyenlet alkalmazandó

A repülőgép **Mach-száma** a hang terjedési sebességének ismeretében számolható:

$$Ma=\frac{v}{a}=\frac{200}{331}=\mathbf{0{,}6}$$

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{1{,}4\cdot 287\cdot 273}=331\frac{m}{s}$$

- $T=t+273=273K$

A **torlóponti hőmérséklet** kiszámításához írjuk fel az energia-egyenletet egy messzi-messzi pont (M) és a torlópont (T) között.

$$T_M + \frac{v_M^2}{2c_p} = T_T + \frac{v_T^2}{2c_p}$$

- $v_T = 0 \leftarrow$ torlópont
- $T_T = t + 273 = 273K$

A torlóponti hőmérséklet kiszámítható:

$$T_T = T_M + \frac{v_M^2}{2c_p} = 273 + \frac{200^2}{2 \cdot 1004} = \mathbf{293K}$$

Figyeljük meg, hogy a torlópontban a hőmérséklet magasabb, mint a messzi-messzi pontban, melyet alátámaszt korábbi állításunk, miszerint a lassuló áramlás hőmérséklete nő.

A **szárny feletti „SZF" pontban kialakuló Mach-szám** kiszámítása az „SZF" pontbéli hangsebesség ismeretében számítható. A hangsebesség számításához írjuk fel az energia-egyenletet M-SZF között:

$$T_M + \frac{v_M^2}{2c_p} = T_{SZF} + \frac{v_{SZF}^2}{2c_p} = T_{SZF} + \frac{(1{,}2v_M)^2}{2c_p}$$

$$T_{SZF} = T_M + \frac{v_M^2}{2c_p} - \frac{(1{,}2v_M)^2}{2c_p} = 273 + \frac{200^2}{2 \cdot 1004} - \frac{(1{,}2 \cdot 200)^2}{2 \cdot 1004} = 264K$$

Az „SZF" pontban kialakuló Mach-szám:

$$Ma_{SZF} = \frac{v_{SZF}}{a_{SZF}} = \frac{1{,}2 \cdot v_M}{\sqrt{\kappa R T_{SZF}}} = \frac{1{,}2 \cdot 200}{\sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 264}} = \mathbf{0{,}74}$$

b) feladatrész

Kezdeti megfontolások:

- amennyiben a repülő EVEM-t végez, a rá ható erők eredője zérus → a szárnyon keletkező felhajtóerő megegyezik a repülőgép súlyával
- a szárnyon keletkező felhajtóerő számításánál feltételezzük, hogy a szárny egésze felett kialakuló áramlási sebesség 20%-kal magasabb, mint a repülőgép haladási sebessége, a szárny alatt (SZA) viszont megegyezik azzal → ezáltal a szárny alatti nyomás és hőmérséklet is megegyezik a messzi-messzi pontbéli értékekkel
  $p_{SZA} = p_M = p_0 = 1bar$
  $T_{SZA} = t_M = t = 0°C$

Izentrópikus állapotváltozás esetén a szárny feletti nyomás a következőképpen számítható:

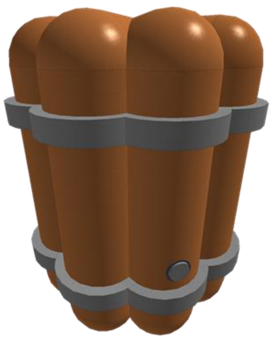
$$p_{SZF} = p_{SZA} \left(\frac{T_{SZF}}{T_{SZA}}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 10^5 \cdot \left(\frac{264}{273}\right)^{\frac{1{,}4}{1{,}4-1}} = 89165Pa$$

A szárnyra ható felhajtóerő a szárny alsó és felső oldala között kialakuló nyomáskülönbség és a szárny felületének szorzataként számítható:

$F_f = (p_{SZA} - p_{SZF}) \cdot A_{SZ} = (10^5 - 89165) \cdot 18 = 195kN$

A repülőgép súlya megegyezik a szárnyra ható felhajtóerővel:
$G = F_f = \mathbf{195kN}$

TIBANNA SZIVÁRGÁS



TIE-vadászunkat hipehajtóművel szereljük fel. A hajtómű hűtőanyaga a Bespin bolygó légkörében bányászott, rendkívül robbanékony tibanna gáz, amelyet egy nagyméretű, túlnyomásos tartályban próbálunk a gázfinomítóból kicsempészni. Elővigyázatlanságunk következményeképp a tartályon egy $1cm^2$-es egyszerű, lekerekített kiömlőnyílás = lyuk keletkezik, melyen keresztül az értékes gáz a szabadba áramlik. A gáz tartálybéli hőmérséklete 30°C.

Kérdés: Határozzuk meg, hogy mekkora a kiáramló gáz tömegárama, ha az ellennyomás és a tartálynyomás hányadosa:

a) $\frac{p_e}{p_t} = 0{,}99$

b) $\frac{p_e}{p_t} = 0{,}6$

c) $\frac{p_e}{p_t} = 0{,}4$

Adatok: $A = 1cm^2$; $p_e = p_0 = 10^5$ Pa; $t_t = 30°C$; $R_g = 287$ J(kg/K); $\kappa = 1{,}4$

MEGOLDÁS

a) feladatrész

Amennyiben $\frac{p_e}{p_t} > 0{,}95$, a nyomásváltozásból adódó sűrűségváltozás kicsi, az áramlás inkompresszibilisnek tekinthető → használható a **Bernoulli egyenlet**. A kiáramló gáz sűrűsége és hőmérséklete közelítőleg azonos a tartálybéli állapottal.

Írjuk fel a Bernoulli-egyenletet a tartály egy tetszőleges pontja és a kiáramlási pont közé:

$$p_t = p_e + \frac{\rho_t}{2} v_{ki}^2$$

A nyomásviszony és a tartálybéli hőmérséklet ismeretében számítható a kiáramlás sebessége:

$$v_{ki} = \sqrt{\frac{2}{\rho_t}(p_t - p_e)} = \sqrt{\frac{2}{p_t} RT_t \cdot p_t \left(1 - \frac{p_e}{p_t}\right)} = \sqrt{2RT_t \left(1 - \frac{p_e}{p_t}\right)}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 287 \cdot 303(1 - 0{,}99)} = 41{,}7 \frac{m}{s}$$

A tartálybéli sűrűség számítása az ideális gáztörvényből:

$$\rho_t = \frac{p_t}{RT_t} = \frac{p_e}{0{,}99RT_t} = \frac{10^5}{0{,}99 \cdot 287 \cdot 303} = 1{,}16 \frac{kg}{m^3}$$

A kiáramló térfogatáram:

$$q_m = \rho_t v_{ki} A = 1{,}16 \cdot 41{,}7 \cdot 10^{-4} = \mathbf{4{,}8 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{s}}$$

b) feladatrész

Amennyiben $0{,}95 > \frac{p_e}{p_t} > 0{,}53$, a kiáramlás **izentrópikus**. A kiáramlás sebessége hang-sebesség alatti, a kiáramló közeg sűrűsége, és hőmérséklete az izentrópikus állapotváltozást leíró összefüggésekből számolható. A gáz a kilépésnél környezeti nyomásra expandál. A Bernoulli-egyenlet nem érvényes, helyette az **energia-egyenletet** használjuk:

Írjuk fel az energia-egyenletet a tartály egy tetszőleges pontja és a kiáramlási pont közé:

$$T_t = T_{ki} + \frac{v_{ki}^2}{2c_p}$$

A nyomásviszony és a tartálybéli hőmérséklet ismeretében számítható a kiáramlás sebessége:

$$v_{ki} = \sqrt{2c_p(T_t - T_{ki})} = \sqrt{2\frac{\kappa R}{\kappa - 1}T_t\left(1 - \frac{T_{ki}}{T_t}\right)} = \sqrt{2\frac{\kappa R}{\kappa - 1}T_t\left(1 - \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}$$

$$= \sqrt{2\frac{1{,}4 \cdot 287}{1{,}4 - 1}303\left(1 - 0{,}6^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}}\right)} = 287\frac{m}{s}$$

- $c_p = \frac{\kappa R}{\kappa-1}$
- $\frac{T_{ki}}{T_t} = \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$

A kiáramló gáz sűrűsége az inzetrópikus állapotváltozásból számítható:

$$\rho_{ki} = \rho_t\left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_t}{RT_t}\left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_e}{0{,}6RT_t}\left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{10^5}{0{,}6 \cdot 287 \cdot 303}0{,}6^{\frac{1}{1{,}4}} = 1{,}33\frac{kg}{m^3}$$

A kiáramló térfogatáram:

$$q_m = \rho_{ki}v_{ki}A = 1{,}33 \cdot 287 \cdot 10^{-4} = \mathbf{38 \cdot 10^{-3}\frac{kg}{s}}$$

c) feladatrész

Amennyiben $\frac{p_e}{p_t} < 0{,}53$, tehát a nyomásviszony az ún. kritikus nyomásviszonynál kisebb, a kiáramló gáz sebessége eléri a hangsebességet. A kiáramlási keresztmetszetben expanziós hullámon keresztül csökken a nyomás a környezeti nyomásra. Az expanziós hullám veszteséget okoz, emiatt az energiaegyenlet és az adiabatikus közelítés nem használható! Amennyiben a nyomás viszony kisebb, mint a kritikus nyomásviszony, akkor a legszűkebb keresztmetszetben az áramlási sebesség meg fog egyezni a lokális hangsebességgel (és így egyszerű lekerekített kiömlőnyílás esetén nem is tudjuk tovább gyorsítani az áramlást a nyomásviszony csökknetésébvel) kiáramló gáz hőmérséklete és sűrűsége a kritikus állapotra vonatkozó egyenletekből számítható. A legszűkebb keresztmetszetre érvényes dolgokat * kitevővel jelöljük:

$$\frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{p}{p_t}\right)_{krit} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \approx 0{,}53$$

$$\frac{T^*}{T_t} = \left(\frac{T}{T_t}\right)_{krit} = \frac{2}{\kappa + 1} \approx 0{,}83$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)_{krit} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \approx 0{,}63$$

A kiáramlás sebessége a helyi hangsebességgel megegyező, a kritikus hőmérséklet ismeretében számítható:

$$v_{ki} = a^* = \sqrt{\kappa R T^*} = \sqrt{\kappa R T_t \frac{2}{\kappa + 1}} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 303 \cdot \frac{2}{1{,}4 + 1}} = 319 \frac{m}{s}$$

A kiáramlás sűrűsége a kritikus állapotra vonatkozóan:

$$\rho_{ki} = \rho^* = \rho_t \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = \frac{p_e}{0{,}4 R T_t} \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = \frac{10^5}{0{,}4 \cdot 287 \cdot 303} \left(\frac{2}{1{,}4 + 1}\right)^{\frac{1}{1{,}4 - 1}}$$
$$= 1{,}82 \frac{kg}{m^3}$$

A kiáramló térfogatáram:

$$q_m = \rho_{ki} v_{ki} A = 1{,}82 \cdot 319 \cdot 10^{-4} = \mathbf{58 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{s}}$$