Áramlástan feladatgyűjtemény

Az energetikai mérnöki BSc és gépészmérnöki BSc képzések
Áramlástan című tárgyához

10. gyakorlat

Veszteséges taggal kiegészített Bernoulli-egyenelet

Összeállította:

Lukács Eszter

Dr. Istók Balázs

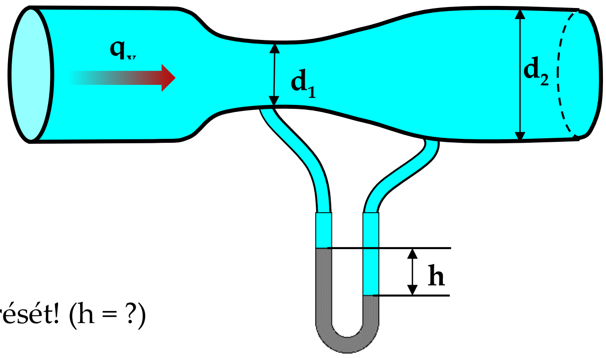
Dr. Benedek Tamás

Fenyvesi Bence

Tokaji Kristóf

TÉRFOGATÁRAM-MÉRÉS VENTURI CSŐVEL

Térfogatáram mérésére Venturi-csövet tervezünk. A Venturi-cső bővülő szakaszának diffúzorhatásfoka 70%. A nyomáskülönbség mérését higanytöltésű U-csöves manométerrel végezzük.
A szállított térfogatáram várhatóan q_v*=1200l/min* lesz, a szállított közeg víz.

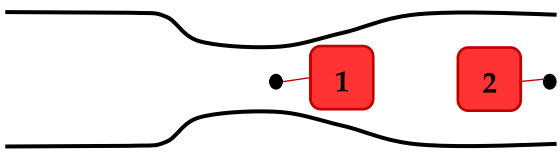


Kérdés: Határozza meg a manométer kitérését! (h = ?)

Adatok: q_v = 1200 l/min; d1 = 100 mm; d2 = 200 mm;
$\rho_{víz}$ = 1000 kg/m³; ρ_{Hg} = 13600 kg/m³; g = 10 N/kg

MEGOLDÁS

Ideális esetben a diffúzoron létrejövő nyomásnövekedés az 1-2 pontok közé, súrlódásmentes közegre felírt Bernoulli-egyenletből határozható meg:



$$(p_2 - p_1)_{id} = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2)$$

Valóságos esetben azonban a súrlódás miatt a diffúzor nem 100%-os hatásfokú, így az általa létrehozott nyomásnövekedés kisebb lesz, mint az ideális.

$$(p_2 - p_1)_{val} = p_2 - p_1 = \eta_d \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \eta_d \frac{\rho}{2} q_v^2 \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right)$$

$$= 0{,}7 \cdot \frac{1000}{2} \cdot \left(\frac{1200 \cdot 10^{-3}}{60}\right)^2 \left(\frac{16}{0{,}1^4\pi^2} - \frac{16}{0{,}2^4\pi^2}\right) = 2128Pa$$

Kontinuitásból:

$$q_v = v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{q_v}{A_1};\ v_2 = \frac{q_v}{A_2}$$

Az U-csöves manométer kitérésénél nem szabad elfeledkeznünk arról, hogy a manométert a berendezéssel összekötő csőben víz van, aminek sűrűségét a higanyéhoz képest nem hanyagolhatjuk el. Írjuk fel a manométer egyensúlyi egyenletét:

$$p_1 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h = p_2 + \rho_{víz} \cdot g \cdot h$$

Ebből számítható a manométer kitérése:

$$h = \frac{(p_2 - p_1)_{val}}{(\rho_{Hg} - \rho_{víz})g} = \frac{2128}{(13600 - 1000) \cdot 10} = \mathbf{17mm}$$

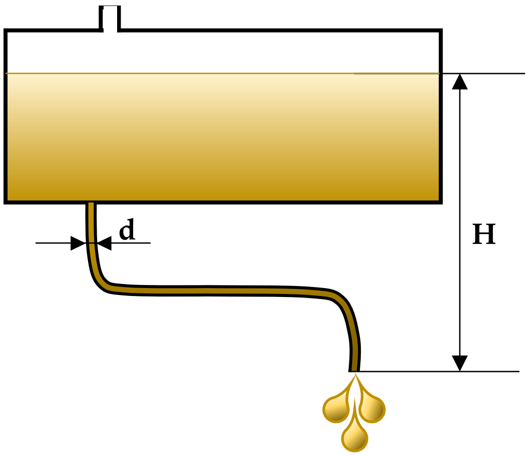
OLAJOZÓ

Egy marógép fejéhez szállítandó olaj előírt mennyisége óránként 2 liter. Ezt egy gravitációs hajtású olajozóval oldjuk meg, aminek jelenleg a kifolyása és tartályában az olaj szintje közötti szintkülönbség *H=0,4m*. A flexibilis cső hossza *l=0,9m*, átmérője d=*6mm*, a görbületek járulékos vesztesége elhanyagolható.

Az olaj kinematikai viszkozitása 10^{-4} m^2/s.

Kérdés: Határozza meg, hogy elegendő olajat szállít-e a berendezés!

Adatok: $q_{v,előírt}$ = 2 l/h; H = 0,4 m; d = 6 mm; l = 0,9 m; ϱ_{olaj} = 800 kg/m³; υ_{olaj} = 10^{-4} m²/s; g = 10 N/kg

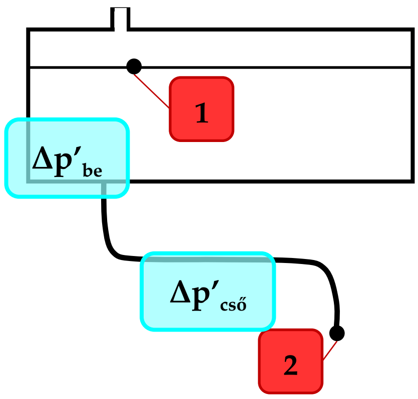


MEGOLDÁS

Írjuk fel a veszteséges Bernoulli-egyenletet a folyadékfelszín (1) és a kiáramlás közé (2).

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \Delta p'$$

- az áramlás iránya 1→2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni a veszteséges tagot, ott az össznyomás kisebb lesz, mint ideális esetben
- $p_1 = p_0$; $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabad folyadékfelszín; szabadsugár
- $U_1 - U_2 = gH$
- $v_1 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_{cső}$ (konti.)



Veszteség keletkezik a csőbe történő beáramlás és a csősúrlódás következtében:

$$\Delta p' = \Delta p'_{be} + \Delta p'_{cső} = \zeta_{be}\frac{\rho}{2}v_2^2 + \lambda\frac{l}{d}\frac{\rho}{2}v_2^2$$

Mind a beömlési, mind a csősúrlódási tényező kiszámításához tudnunk kell, hogy az áramlás lamináris vagy turbulens-e ($Re <> 2300$?). Ehhez azonban ismernünk kellene a csőben kialakuló áramlási sebességet (v_2-t). A következő gondolatmenet alapján járunk el:

1. feltételezzük, hogy a csőben az előírt térfogatáram valósul meg (2 l/h) - kiszámoljuk az előírt térfogatáramhoz tartozó v_2 sebességet és Reynolds-számot, megállapítjuk, hogy az áramlás lamináris vagy turbulens-e
2. Re-szám alapján eldöntjük, hogy milyen képletekkel számoljuk a beömlési és a csősúrlódási veszteséget
3. kiszámítjuk a valóságban létrejött sebességet és térfogatáramot
4. visszaellenőrizzük a valóságban kapott Reynolds-számot (lamináris, turbulens?)

1. Előírt sebesség:

$$v_e = \frac{q_{v,e}}{A} = \frac{4q_{v,e}}{d^2\pi} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{3600 \cdot 0{,}006^2\pi} = 0{,}02\frac{m}{s}$$

Előírt Reynolds-szám:

$$Re_e = \frac{v_e d}{\nu} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}006}{10^{-4}} = 1{,}2$$

2. Mivel $Re < 2300$, az áramlás lamináris, tehát:

$$\zeta_{be} = 1{,}07$$
$$\lambda_{lam} = \frac{64}{Re} = \frac{64\nu}{vd}$$

3. Az 1-2 pontok közé felírt veszteséges Bernoulli egyenlet a következőképpen alakul:

$$\rho g H = \frac{\rho}{2}v_2^2 + \zeta_{be}\frac{\rho}{2}v_2^2 + \lambda\frac{l}{d}\frac{\rho}{2}v_2^2$$
$$0 = \frac{1}{2}v_2^2 + \zeta_{be}\frac{1}{2}v_2^2 + \frac{64\nu}{v_2 d}\frac{l}{d}\frac{1}{2}v_2^2 - \rho g H = v_2^2\left(\frac{1}{2} + \zeta_{be}\frac{1}{2}\right) + v_2\left(\frac{32\nu l}{d^2}\right) - gH$$

A megoldandó másodfokú egyenlet együtthatói:

$$a = \frac{1}{2} + \zeta_{be}\frac{1}{2} = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 1{,}07 = 1{,}035$$
$$b = \frac{32\nu l}{d^2} = \frac{32 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}9}{0{,}006^2} = 80\frac{m}{s}$$
$$c = gH = 10 \cdot 0{,}4 = 4\frac{m^2}{s^2}$$
$$v_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot 1{,}035 \cdot 4}}{2 \cdot 1{,}035} = 0{,}05\frac{m}{s}$$

(A másik érték negatív.)

A kilépő térfogatáram:

$$q_v = v_2\frac{d^2\pi}{4} = 0{,}05\frac{0{,}006^2\pi}{4} = \mathbf{5{,}1\frac{l}{h}} > 2\frac{l}{h}$$

Tehát az előírt térfogatáram megvalósul.

4. Visszaellenőrzés, hogy az áramlás valóban lamináris-e:

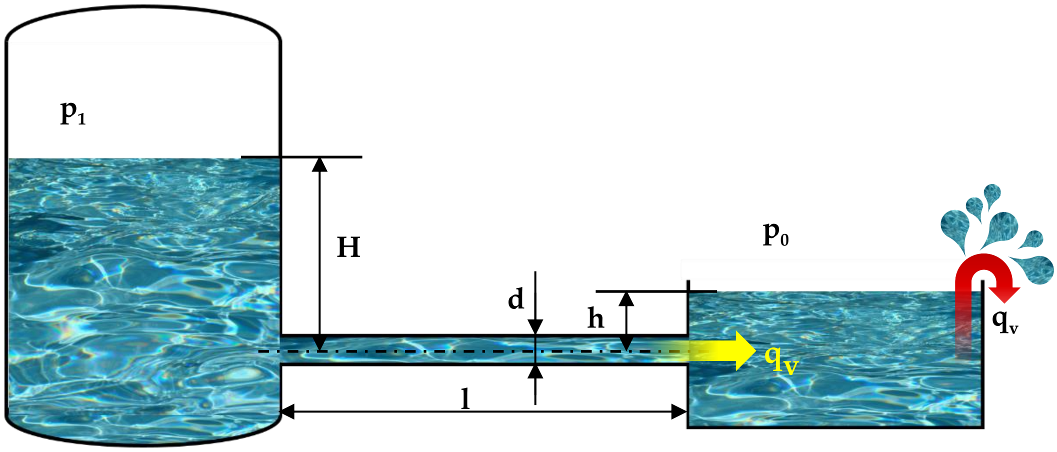
$$Re = \frac{v_2 d}{\nu} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}006}{10^{-4}} = 3 < 2300$$

Tehát az áramlás a megvalósult esetben is lamináris.

TÁPTARTÁLY MÉRETEZÉSE

Egy uszoda medencéjének vízutánpótlását kiegyenlítő tartállyal (hidrofor) biztosítjuk. A táptartályt egyenes csővezeték köti össze a medencével, a csővezeték hidraulikailag simának tekinthető. A medencéből elfolyó q_v vízmennyiség határozza meg, hogy milyen p_1 tápnyomás esetén tartható az állandó vízszint a medencében!

Figyelem: a hidraulikailag sima cső azt jelenti, hogy a fali érdesség nem lóg ki a határréteg lamináris részéből, nem pedig azt, hogy a cső veszteségmentes!



Kérdés: Mekkora p_1 tápnyomás esetén tartható az állandó vízszint a medencében?

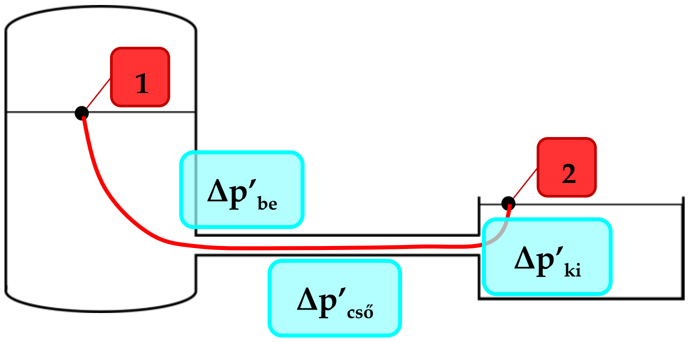
Adatok: $q_v = 5$ l/s; H = 1,2 m; h = 0,8 m; l = 10 m; d = 50 mm; k = 0 mm; $\zeta_{be} = 0,07$;
$\rho_{víz} = 1000$ kg/m³; $\upsilon_{víz} = 1,3 \cdot 10^{-6}$ m²/s; g = 10 N/kg

MEGOLDÁS

Írjuk fel a veszteséges Bernoulli-egyenletet az tartályfelszín (1) és a medence felszíne (2) közé:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \Delta p'$$

- az áramlás iránya 1→2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni a veszteséges tagot
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabad folyadékfelszín
- $U_2 - U_1 = g(h - H)$
- $v_1 \approx v_2 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_{cső}$ (konti.)



$$\rightarrow p_1 - p_0 = \rho g(h - H) + \Delta p'$$

Veszteség keletkezik a csőbe történő beáramlás, a csősúrlódás valamint a csőből a medencébe történő kilépés következtében:

$$\Delta p' = \Delta p'_{be} + \Delta p'_{cső} + \Delta p'_{ki} = \zeta_{be} \cdot \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 + \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 + \frac{\rho}{2} v_{cső}^2$$

$$v_{cső} = \frac{4 q_v}{d^2 \pi} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{0,05^2 \pi} = 2,55 \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{v_{cső} d}{\nu} = \frac{2,55 \cdot 0,05}{1,3 \cdot 10^{-6}} \cong 98000$$

Mivel az áramlás turbulens, és a cső hidraulikailag sima, és $2300 < Re < 100000$, ezért a csősúrlódási tényező a Blasius formulával számítható:

$$\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}} = \frac{0,316}{\sqrt[4]{98000}} = 0,018$$

A veszteséges tagokat visszahelyettesítve a Bernoulli-egyenletbe a szükséges tápnyomás:

$$p_1 - p_0 = \rho g(h - H) + \zeta_{be} \cdot \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 + \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 + \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 =$$

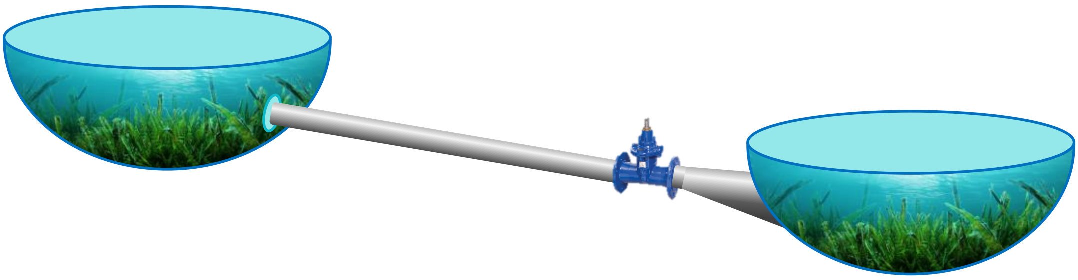
$$= 1000 \cdot 10 \cdot (0,8 - 1,2) + 0,07 \cdot \frac{1000}{2} \cdot 2,55^2 + 0,018 \frac{10}{0,05} \cdot \frac{1000}{2} \cdot 2,55^2 + \frac{1000}{2} \cdot 2,55^2$$

$$= \boldsymbol{11077 Pa}$$

KÉT TÓ

A Gödöllő Környéki Halgazdaság két tavát csővezeték köti össze. A csővezeték hossza *L=20m*, belső átmérője *D=100mm*, belső fala hidraulikailag simának tekinthető. A csővezeték tartalmaz 1db tolózárat (ζ_t) és a csővégen található egy veszteséges diffúzor (η_D), melynek kilépő keresztmetszete a belépő keresztmetszet kétszerese ($A_{ki}/A_{be} = 2$). A felső tó szintje *H=3m*-el magasabban van, mint az alsó.

Figyelem: a hidraulikailag sima cső azt jelenti, hogy a fali érdesség nem lóg ki a határréteg lamináris részéből, nem pedig azt, hogy a cső veszteségmentes!



Kérdés: a) Határozza meg a csövön átáramló térfogatáramot!
b) Határozza meg, hogy milyen tolózár veszteségtényező esetén lesz a térfogatáram az első lépésben meghatározott fele!

Adatok: H = 3 m; $L_{cső}$ = 20 m; $d_{cső}$ = 100 mm; k = 0 mm; ζ_t = 1,5; ζ_{be} = 0,07; η_D = 0,8;
A_{ki}/A_{be} = 2; $\rho_{víz}$ = 1000 kg/m^3; $\upsilon_{víz}$ = 10^{-6} m^2/s; g = 10 N/kg

MEGOLDÁS

a) feladatrész

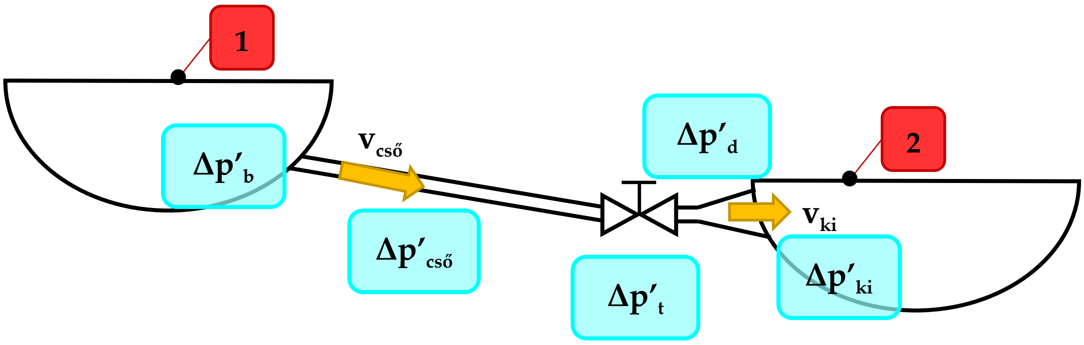
Írjuk fel a veszteséges Bernoulli-egyenletet a két tó felszíne közé (1-2):

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \Delta p'$$

- az áramlás iránya 1→2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni a veszteséges tagot
- $p_1 = p_2 = p_0 \leftarrow$ szabad felszín
- $U_1 - U_2 = gH$
- $v_1 \approx v_2 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_{cső}$ (konti.)

$\rightarrow gH = \Delta p'$

Veszteség keletkezik a csőbe történő beáramlás, a csősúrlódás, a tolózár, a diffúzor valamint a csőből az alsó tóba történő kilépés következtében:



$$\Delta p' = \Delta p'_{be} + \Delta p'_{cső} + \Delta p'_{tolózár} + \Delta p'_{diff} + \Delta p'_{ki}$$
$$= \zeta_{be}\frac{\rho}{2}v_{cső}^2 + \lambda\frac{L_{cső}}{D_{cső}}\frac{\rho}{2}v_{cső}^2 + \zeta_t\frac{\rho}{2}v_{cső}^2 + (1-\eta_{diff})\frac{\rho}{2}\left(v_{cső}^2 - v_{ki}^2\right) + \frac{\rho}{2}v_{ki}^2$$

- $v_{ki} = \frac{v_{cső}}{2} \leftarrow \frac{A_{ki}}{A_{be}} = 2$ (konti.)

A veszteséges tagokat visszahelyettesítve a Bernoulli-egyenletbe kifejezhető a folyadék csőbéli sebessége:

$$gH = \zeta_{be}\frac{\rho}{2}v_{cső}^2 + \lambda\frac{L_{cső}}{D_{cső}}\frac{1}{2}v_{cső}^2 + \zeta_t\frac{1}{2}v_{cső}^2 + (1-\eta_{diff})\frac{1}{2}\left(v_{cső}^2 - \frac{v_{cső}^2}{4}\right) + \frac{v_{cső}^2}{8}$$

$$2gH = v_{cső}^2\left(\lambda\frac{L_{cső}}{D_{cső}} + \zeta_t + (1-\eta_{diff})\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0{,}07\right)$$

$$v_{cső} = \sqrt{\frac{2gH}{\lambda\frac{L_{cső}}{D_{cső}} + \zeta_t + (1-\eta_{diff})\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0{,}07}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 3}{\lambda\frac{20}{0{,}1} + 1{,}5 + (1-0{,}8)\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0{,}07}}$$
$$= \sqrt{\frac{60}{200\lambda + 1{,}97}}$$

Mivel λ értéke függ a Reynolds-számtól, az pedig a sebességtől, és az egyenletrendszert nem tudjuk zárt alakban megoldani, ezért **iterációs eljárásra lesz szükségünk**. Legyen a csősúrlódás tényező kiinduló értéke 0,02! (Ez tetszőleges, de ez van a Moody diagram közepén!)

$$\lambda' = 0{,}02;\ v'_{cső} = \sqrt{\frac{60}{200\cdot 0{,}02 + 1{,}97}} = 3{,}17\frac{m}{s};\ Re' = \frac{v_{cső}D_{cső}}{\nu} = \frac{3{,}17\cdot 0{,}1}{10^{-6}} = 317000$$

$$\lambda''(Moody - diag.) = 0{,}015;\ v''_{cső} = 3{,}41\frac{m}{s};\ Re'' = 341000 \rightarrow \epsilon = 8\%$$

$$\lambda''' = 0{,}014;\ v'''_{cső} = 3{,}485\frac{m}{s};\ Re'' = 348500 \rightarrow \epsilon = 2\%$$

$$\lambda^{IV} = 0{,}0135;\ v_{cső}^{IV} = 3{,}52;\ Re^{IV} = 352000 \rightarrow \epsilon = 1\%$$

A csőben kialakuló térfogatáram tehát:

$$q_v = v_{cső}^{IV}\cdot\frac{D_{cső}^2\pi}{4} = \mathbf{27{,}7}\,\frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{s}}$$

b) feladatrész: a tolózár zárásával (azaz veszteségtényezőjének növelésével) a térfogatáram csökkenthető. Az beállítandó térfogatáram, ezáltal pedig a csőben kialakuló sebesség az eredetinek a fele.

$$q_{v,b} = \frac{q_v}{2} = \frac{28{,}7}{2} = 14{,}25\frac{l}{s} \rightarrow v_{cső,b} = \frac{q_{v,b}}{A} = 1{,}82\frac{m}{s}$$

Írjuk fel az a) feladatrészben is felírt veszteséges Bernoulli-egyenletet, ezúttal az új sebességgel:

$$2gH = v_{cső,b}^2\left(\lambda_b\frac{L_{cső}}{D_{cső}} + \zeta_{t.b} + \left(1-\eta_{diff}\right)\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0{,}07\right)$$

A tolózár veszteségtényezője kifejezhető:

$$\zeta_{t.b} = \frac{2gH}{v_{cső,b}^2} - \left(\lambda_b\frac{L_{cső}}{D_{cső}} + \left(1-\eta_{diff}\right)\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

A csősúrlódási tényező a Reynolds-számból és a Blasius-formulából számítható:

$$Re_b = \frac{v_{cső,b}D_{cső}}{\nu} = \frac{1{,}82 \cdot 0{,}1}{10^{-6}} = 182000 \rightarrow \lambda_b\,(Blasius) = 0{,}015$$

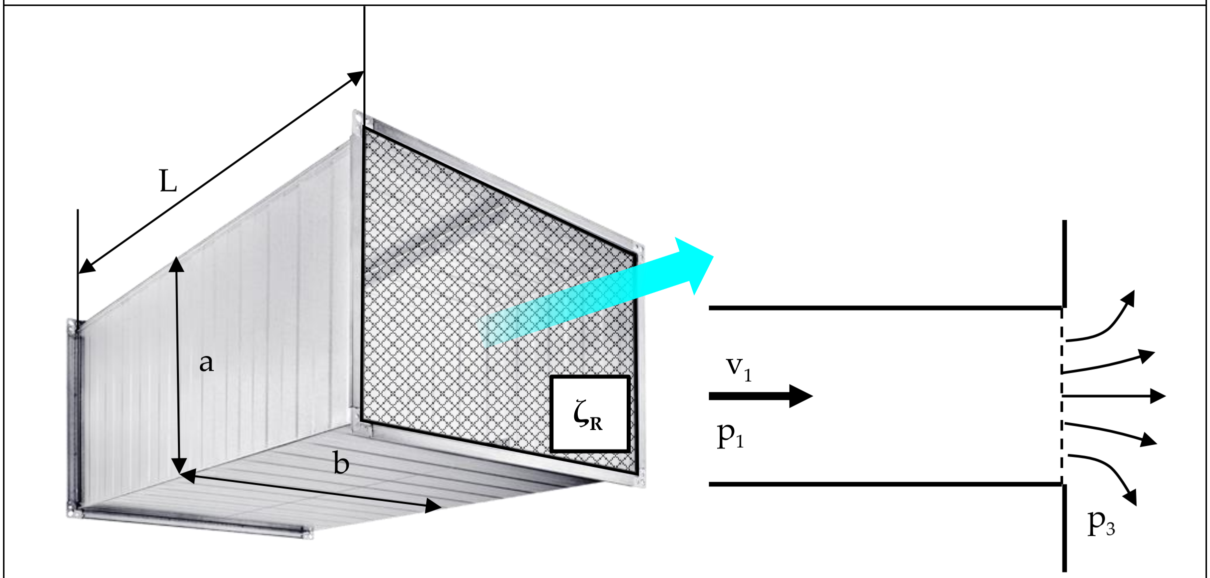
A tolózár beállítandó veszteségtényezője ahhoz, hogy a térfogatáram a felére csökkenjen:

$$\zeta_{t.b} = \frac{2gH}{v_{cső,b}^2} - \left(\lambda_b\frac{L_{cső}}{D_{cső}} + \left(1-\eta_{diff}\right)\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0{,}07\right)$$

$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 3}{1{,}82^2} - \left(0{,}015\frac{20}{0{,}1} + (1-0{,}8)\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0{,}07\right) = \mathbf{14{,}71}$$

LÉGCSATORNA RÁCCSAL

Az ábrán látható téglalap keresztmetszetű, *0,5 mm* fali érdességű *12 m* hosszúságú csatornán keresztül levegőt szállítunk egy p_3 nyomású helyiségbe. A csatorna kilépő keresztmetszetében található rács veszteség-tényezője $\zeta_R = 0{,}6$.



Kérdés:	Határozza meg a $p_1 - p_3$ statikus nyomáskülönbséget!
Adatok:	L = 12 m; a = 0,3 m; b = 0,5 m; k = 0,5 mm; ζ_R = 0,6; v_1 = 8 m/s; ϱ_{lev} = 1,2 kg/m^3; $\upsilon_{víz} = 15 \cdot 10^{-6}$ m^2/s

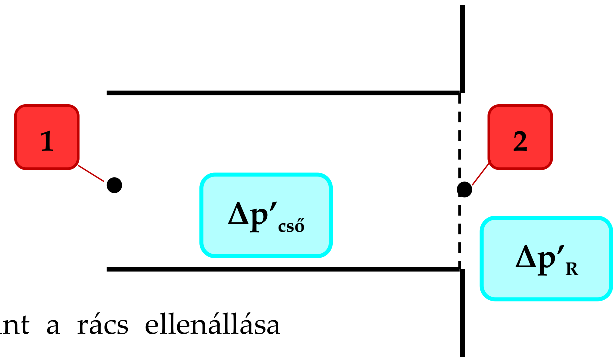
MEGOLDÁS

Írjuk fel a veszteséges Bernoulli-egyenletet az 1-2 pontok között:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \Delta p'$$

- $p_2 = p_3 \leftarrow$ szabadsugár
- $U_2 - U_2 = 0$
- $v_1 = v_2 = v \leftarrow A_1 = A_2;\ \rho_1 = \rho_2$

$$\rightarrow p_1 - p_3 = \Delta p'$$



Veszteség keletkezik a csősúrlódás, valamint a rács ellenállása következtében:

$$\Delta p' = \Delta p'_{cső} + \Delta p'_{rács} = \lambda \frac{L}{d_e} \frac{\rho}{2} v^2 + \zeta_R \frac{\rho}{2} v^2$$

A veszteséges tagokat visszahelyettesítve a Bernoulli-egyenletbe kifejezhető a keresett nyomáskülönbség:

$$p_1 - p_3 = \lambda \frac{L}{d_e} \frac{\rho}{2} v^2 + \zeta \frac{\rho}{2} v^2$$

A csősúrlódási tényező meghatározáshoz **szükséges a *Reynolds-szám* és a *d/k* viszony** meghatározása. Mivel a csövünk nem kör keresztmetszetű, ám a feladatmegoldáshoz használt Moody-diagram csak kör keresztmetszetű csövekre érvényes, ezért bevezetjük a hidraulikailag egyenértékű csőátmérő fogalmát. A hidaulikailag egyenértékű átmérő megmutatja, hogy mekkora átmérőjű, kör keresztmetszetű csőnek lenne azonos fali csúsztatófeszültség mellett ugyanakkora nyomásesése azonos hosszon, mint az adott, jelen esetben téglalap keresztmetszetű csőnek. Ez a következőképpen számolható:

$$d_e = \frac{4A}{K} = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5}{2(0{,}3+0{,}5)} = 0{,}375m$$

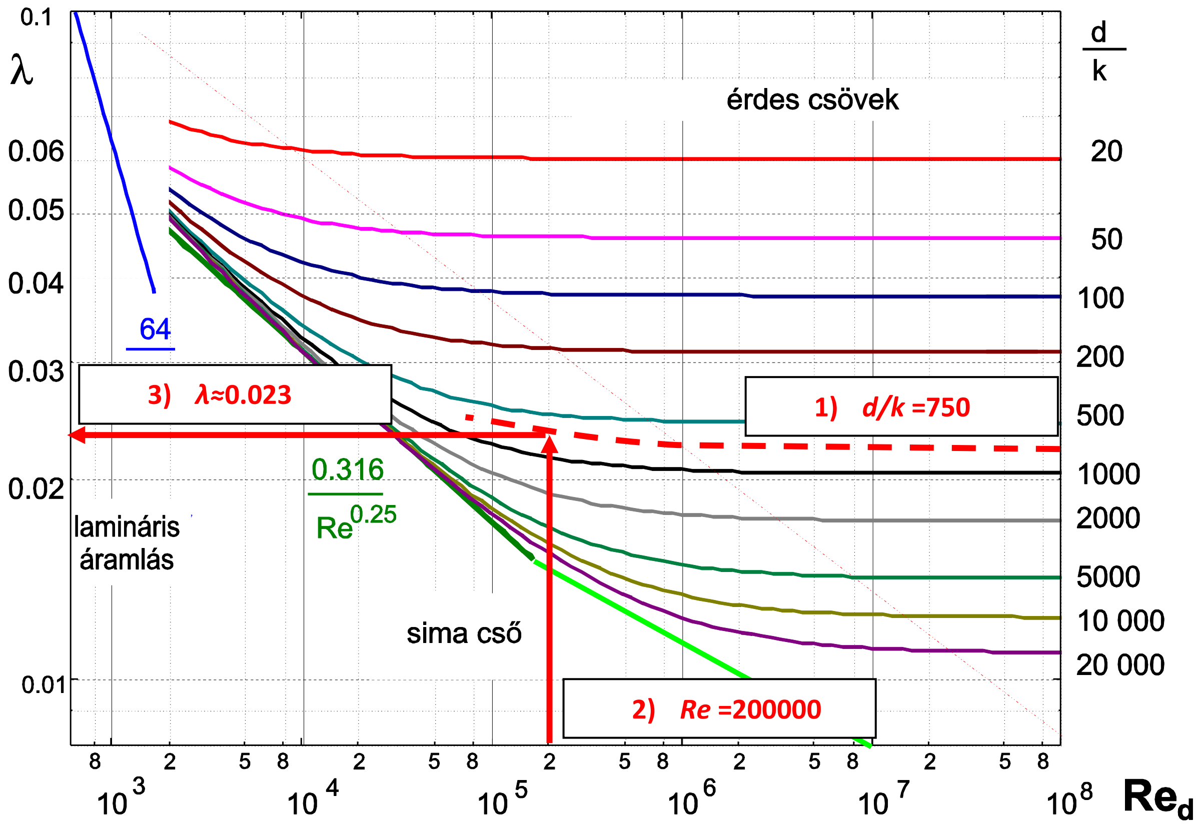
Az egyenértékű átmérő alapján számítható a Reynolds-szám és a relatív érdesség (d/k):

$$Re = \frac{vd_e}{\nu} = \frac{8 \cdot 0{,}375}{15 \cdot 10^{-6}} = 200000$$

$$\frac{d_e}{k} = \frac{0{,}375}{0{,}5 \cdot 10^{-3}} = 750$$

Ezekből az adatokból a csősúrlódási tényező a Moody-diagram segítségével a következő módon határozható meg:

1) az adott ***d/k*** értékhez tartozó vonal megkeresése jobb oldali ordinátán, ha nincs a diagramon „szemmel behúzzuk"
2) az adott ***Re*** felvetítése a ***d/k*** vonalunkra
3) az ehhez a ponthoz tartozó csősúrlódási tényező leolvasása a bal oldali ordinátáról



Tehát a csősúrlódási tényező, és abból a keresett nyomáskülönbség:

$\lambda = 0{,}023$

$$p_1 - p_3 = \lambda \frac{L}{d_e}\frac{\rho}{2}v^2 + \zeta\frac{\rho}{2}v^2 = 0{,}023 \cdot \frac{12}{0{,}375} \cdot \frac{1{,}2}{2} \cdot 8^2 + 0{,}6 \cdot \frac{1{,}2}{2} \cdot 8^2 = \mathbf{51}\boldsymbol{Pa}$$