Áramlástan feladatgyűjtemény

Az energetikai mérnöki BSc és gépészmérnöki BSc képzések
Áramlástan című tárgyához

3. gyakorlat

Hidrosztatika, kontinuitás

Összeállította:

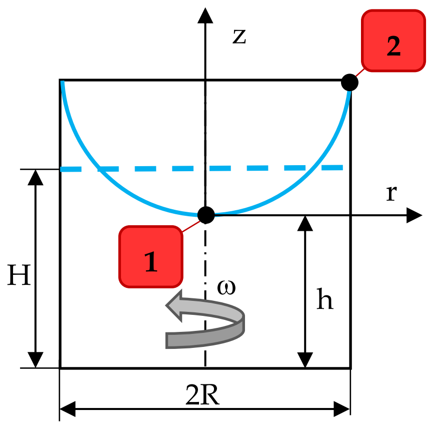
Lukács Eszter

Dr. Istók Balázs

Dr. Benedek Tamás

FORGÓ EDÉNY

Egy henger alakú edényben, nyugalmi helyzetben H magasságig állt a víz. Amikor az edényt középtengelye körül forgatni kezdjük, a vízfelszín alakja megváltozik: a közepén lecsökken, míg a szélén megnő a vízfelszín magassága.



Kérdés: Mekkora szögsebességgel kell forgatni, hogy a közepén h-ig csökkenjen a magasság?

Adatok: h = 0,2 m; H = 0,3 m; R = 0,1 m; $\varrho_{víz}$=1000 kg/m³

MEGOLDÁS

Kezdeti megfontolások:

- a feladat az edénnyel együtt-forgó koordináta-rendszerből tekinthető hidrosztatikai problémának → ekkor a fellépő centrifugális erőtér ($\underline{g_c}$) hatásával számolnunk kell
- Ezért a folyadék felszíne a nehézségi és a centrifugális erőtér együttes hatására másodfokú paraboloid lesz
- Egy másodfokú paraboloid felület a szimmetriatengelyével egybeeső befoglaló henger térfogatát pontosan felezi, ezért a nyugalmi állapothoz képest a felszín lesüllyedése és felemelkedése azonos lesz (ld. Magyarázat)!
- feltételezhető, hogy a folyadék felszínén a nyomás légköri
- az összes folyadék az edényben marad, nem csordul túl a peremen

A hidrosztatika alapegyenlete az 1-2 pontok között, nehézségi és centrifugális erőterek figyelembevételével:

$$p_1 + \rho U_1 = p_2 + \rho U_2 \qquad U = U_n + U_c = gz - \frac{r^2\omega^2}{2}$$

$$p_1 + \rho\left(gz_1 - \frac{r_1^2\omega^2}{2}\right) = p_2 + \rho\left(gz_2 - \frac{r_2^2\omega^2}{2}\right) \qquad r_1 = 0, r_2 = R$$

Mivel az 1-es és 2-es pont is szabad felszínen van: $p_1 = p_2 = p_0$

Egyszerűsítve és ω-ra rendezve:

$$\omega = \sqrt{2\frac{g(z_2 - z_1)}{R^2}} \tag{1}$$

A legnagyobb megengedhető felemelkedés H-h, tehát az (1) egyenlet jobb oldalán a magasság-különbség $(z_2 - z_1)$ maximális értéke ennek a duplája.

$$z_2 - z_1 = 2(H - h) \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletekből a szögsebesség számolható:

$$\omega = \sqrt{2\frac{g(z_2 - z_1)}{R^2}} = \sqrt{4\frac{g(H-h)}{R^2}} = \sqrt{4\frac{10 \cdot (0{,}3 - 0{,}2)}{0{,}1^2}} = \mathbf{20}\,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}} \tag{3}$$

MAGYARÁZAT:

Az (1) egyenletből látszik, hogy ha a (2) pontot a folyadékfelszín tetszőleges sugárhoz tartozó pontjában vesszük fel, annak magassága a sugárral négyzetesen nő, azaz a folyadékfelszín alakja egy másodfokú forgási paraboloid lesz.

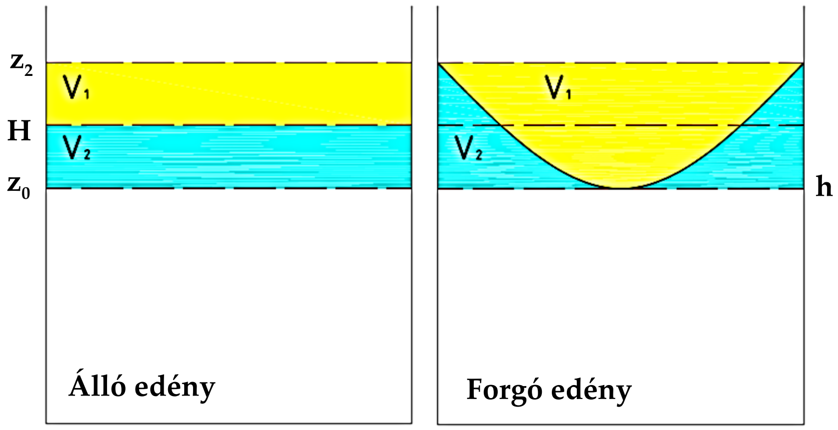
$$z_2 - z_1 = \frac{R^2\omega^2}{2g} \tag{4}$$

Egy $z(r) = k \cdot r^2$ másodfokú forgási paraboloid térfogata a következőképpen számolható:

$$V = \int z dA = \int_0^{2\pi}\int_0^R kr^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi = 2\pi \cdot k \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{R^2\pi \cdot z(R)}{2} \tag{5}$$

Tehát a (3) egyenlet alapján másodfokú forgási paraboloid térfogata az azonos szimmetriatengelyű, őt magába foglaló henger térfogatának fele. Jelen esetben a másodfokú forgási paraboloidunkat magába foglaló hengert $\boldsymbol{V}_1$ térfogatú levegő és $\boldsymbol{V}_2$ térfogatú víz tölti ki az alábbi ábrán látható módon. A térfogata pedig a következőképpen számolható ((6)-egyenlet):

$$V = (z_2 - z_1) \cdot R^2\pi = V_1 + V_2 \tag{6}$$



A forgási paraboloidot felülről levegő tölti ki, melynek térfogata a fentiek alapján:

$$V_1 = \frac{V}{2} \tag{7}$$

A (4) és (5) egyenletekből következően:

$$V_1 = \frac{V}{2} = \frac{(z_2 - z_1)}{2} R^2\pi \tag{8}$$

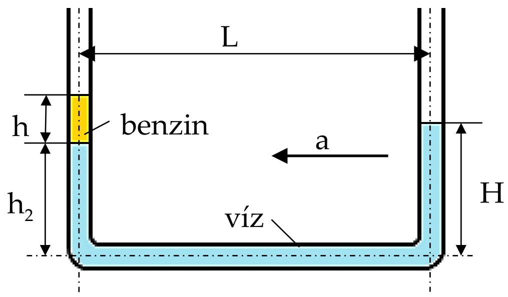
Azaz a felemelkedés és a lesüllyedés mértéke azonos!

GYORSULÓ U-CSŐ

Az ábrán látható üvegcsőben víz és benzin található a bemutatott nyugalmi elrendezésben.

Kérdés: Határozza meg a bal oldali benzinoszlopnak a vízszintes csőszakasz feletti felső szintjét,
a) nyugalmi helyzetben
b) ha az üvegcső **a=3m/s²** gyorsulással mozog a megadott irányban.

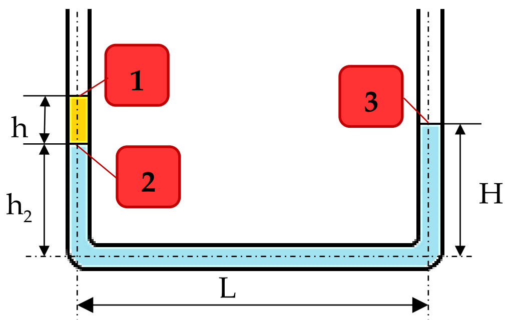
Adatok: h = 18 mm; H = 55 mm; L = 200 mm;
$\varrho_{víz}$ = 1000 kg/m³; ϱ_{benzin} = 700 kg/m³;
g = 10 N/kg; a = 3 m/s²



MEGOLDÁS

a) a folyadékszint meghatározása nyugalmi helyzetben, kezdeti megfontolások:

- a feladat hidrosztatikai probléma, kizárólag a nehézségi erőtér hat
- a pontok felvételekor ügyelnünk kell rá, hogy a hidrosztatika alapegyenletének egyszerűsített formája csak állandó sűrűségű közegek esetén írható fel → külön a benzinben és külön a vízben



Felírva a hidrosztatika alapegyenletét az 1-2 pontok közé a benzinben:

$$p_1 + \rho_b U_1 = p_2 + \rho_b U_2$$

- $p_1 = p_0$
- $U_1 = g z_1;\ U_2 = g z_2 \quad \rightarrow$
  $U_1 - U_2 = g(z_1 - z_2) = gh$

$$p_2 = p_1 + \rho_b (U_1 - U_2) = p_0 + \rho_b g h \tag{1}$$

Felírva a hidrosztatika alapegyenletét a 2-3 pontok közé a vízben:

$$p_2 + \rho_v U_2 = p_3 + \rho_v U_3$$

- a folyadék felszínén a nyomás légköri: $p_3 = p_0$
- $U_2 = g z_2;\ U_3 = g z_3 \quad \rightarrow \quad U_3 - U_2 = g(z_3 - z_2) = g(H - h_2)$

$$p_2 = p_3 + \rho_v (U_3 - U_2) = p_0 + \rho_v g (H - h_2) \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletekből:

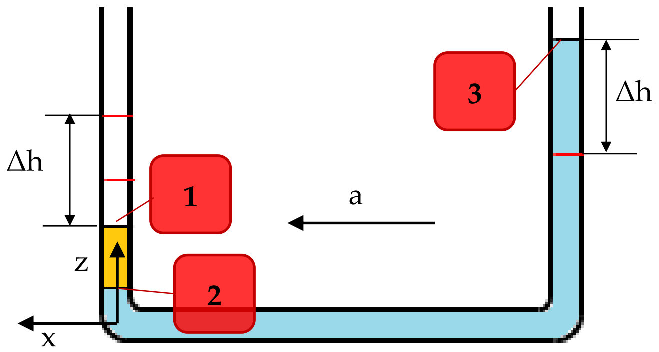
$$p_0 + \rho_b g h = p_0 + \rho_v g (H - h_2) \rightarrow h_2 = \frac{\rho_v H - \rho_b h}{\rho_v} = \frac{1000 \cdot 55 - 700 \cdot 18}{1000} = 42{,}4mm$$

A benzinoszlop vízszintes csőszakasz feletti felső szintje tehát:

$h_2 + h = 42{,}4 + 18 = \mathbf{60{,}4mm}$

b) a vízszint meghatározása gyorsulás esetén, kezdeti megfontolások:

- a feladat az U-csővel együtt gyorsuló koordináta-rendszerből tekinthető hidrosztatikai problémának → tehetetlenségi erőtér ($\underline{g_t}$)
- a koordináta-rendszert az U-cső bal alsó sarkához rögzítjük, az x-tengely a gyorsulás-vektor irányába mutat
- a tehetetlenségi erőtér hatására a jobb oldali szárban Δh-val megemelkedik, míg a bal oldali szárban Δh-val lecsökken a folyadékszint. A felemelkedés és lecsökkenés egyenlősége a kontinuitás és a csőátmérő állandóságának folyománya.
- a benzinoszlop teljes egészében a függőleges szárban marad



Felírva a hidrosztatika alapegyenletét a 2-3 pontok közé a vízben:

$p_2 + \rho_v U_2 = p_3 + \rho_v U_3$

- a folyadék felszínén a nyomás légköri: $p_3 = p_0$
- p_2 az a) feladatrészben leírt módon számítható, mivel a tehetetlenségi erőtér a z-tengely irányában nem végez munkát: $p_2 = p_0 + \rho_b g h$
- $U_2 = g z_2 + a x_2 = g(h_2 - \Delta h)$; $U_3 = g z_3 + a x_3 = g(H + \Delta h) + a(-L)$

A 2-3 pontok közé felírt hidrosztatikai alapegyenlet a behelyettesítés után tehát a következőképpen alakul:

$$p_0 + \rho_b g h + \rho_v\, g(h_2 - \Delta h) = p_0 + \rho_v[g(H + \Delta h) + a(-L)]$$

$$\Delta h = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\rho_b}{\rho_v} h + h_2 - H + \frac{a}{g} L\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{700}{1000} \cdot 18 + 42{,}4 - 55 + \frac{3}{10} \cdot 200\right] = 30mm$$

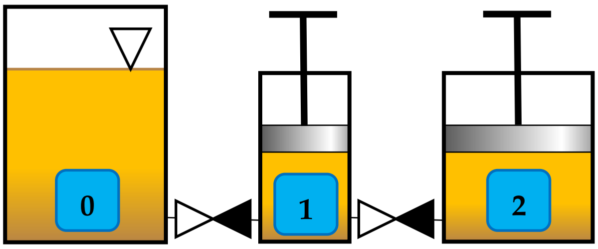
A benzinoszlop vízszintes csőszakasz feletti felső szintje gyorsuló U-cső esetén tehát:

$h_2 + h - \Delta h = 42{,}4 + 18 - 30 = \mathbf{30{,}4mm}$

Az eredményt visszaellenőrizve a benzinoszlop valóban teljes egészében az U-cső függőleges szárában marad.

MUNKAHENGER

Egy hidraulikus emelőben két munkahenger és egy tartály található. A kisebb átmérőjű munkahenger (1) a tartályból (0) szívja és a nagyobb munkahengerbe (2) szállítja az olajat. A visszaáramlást visszacsapó szelepek akadályozzák meg.



Kérdés: a) Mekkora lesz a nagyobb munkahenger sebessége abban az esetben, ha a kisebb munkahenger v_1 sebességgel mozog lefele?
b) A lökethosszok (l) ismeretében határozza meg, hányszor kell a kisebb hengert működtetni a nagyobb teljes kimozdításához!
c) Mekkora erőt ad le a nagyobb munkahenger, ha a kisebbiket F_1 erővel nyomjuk?

Adatok: $d_1 = 10$ mm; $d_2 = 60$ mm; $l_1 = 90$mm; $l_2 = 90$mm; $v_1 = 6$ mm/s; $F_1 = 100$ N

MEGOLDÁS

a) Kontinuitás összenyomhatatlan közeg esetén ($\rho = áll.$):

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$v_1 \frac{d_1^2 \pi}{4} = v_2 \frac{d_2^2 \pi}{4}$$

$$v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{10}{60}\right)^2 = \mathbf{0,17\frac{mm}{s}}$$

b) Egy működtetéssel benyomott mennyiség:

$$V_1 = l_1 \cdot A_1 = l_1 \frac{d_1^2 \pi}{4} = 90 \cdot \frac{10^2 \pi}{4} = 7069 mm^3$$

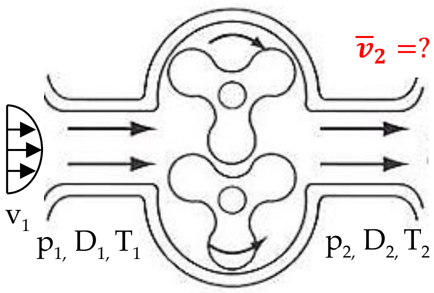
A szükséges működtetések száma:

$$n = \frac{V_2}{V_1} = \frac{l_2}{l_1}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \frac{90}{90}\left(\frac{60}{10}\right)^2 = \mathbf{36}$$

c) A hengerekben a hidrosztatikából származó nyomáskülönbségeket elhanyagolva a nyomás állandó:

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = p_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} = F_1 \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 100 \left(\frac{60}{10}\right)^2 = \mathbf{3600 N}$$

<table>
<tr><th colspan="3">KOMPRESSZOR</th></tr>
<tr><td colspan="2">Levegő nyomásának növelésére kompresszort használunk, melynek szívócsövében 7-edfokú paraboloid írja le a sebesség eloszlását.</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>Kérdés:</td><td>Az ismert adatok alapján határozzuk meg a nyomócsőben az átlagos sebességet!</td></tr>
<tr><td>Adatok:</td><td>p_1 = 1 bar; p_2 = 3,5 bar; D_1 = 180 mm;
D_2 = 90 mm; T_1 = 300K; T_2 = 380K;
R = 287J/(kgK); $v_{max,1}$ = 30 m/s; n = 7</td></tr>
</table>

MEGOLDÁS

A kontinuitás alapján a tömegáram állandó, a szívó- és nyomócsonkon megegyezik:

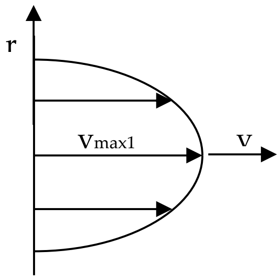
$$q_m = \overline{v}_1 \rho_1 A_1 = \overline{v}_2 \rho_2 A_2$$

- $\overline{v}_1$ és $\overline{v}_2$ rendre a szívó- és nyomócsonkon kialakuló átlagsebességek
- A_1 és A_2 rendre a szívó- és nyomócsonk-keresztmetszetek: $A = \frac{D^2\pi}{4}$
- a sűrűség az ideális gáztörvényből: $\rho = \frac{p}{RT}$

$$q_m = \overline{v}_1 \cdot \frac{p_1}{RT_1} \cdot \frac{D_1^2\pi}{4} = \overline{v}_2 \cdot \frac{p_2}{RT_2} \cdot \frac{D_2^2\pi}{4}$$

$$\overline{v}_2 = \overline{v}_1 \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

A $\overline{v}_1$ átlagsebesség kiszámításához írjuk fel a sebességprofilra jellemző 7-edfokú parabola általános képletét és a hozzá tartozó peremfeltételeket:



$$v = a + b \cdot r^n$$

- $r = 0 \;\rightarrow\; v = v_{max} \;\rightarrow\; a = v_{max}$
- $r = R \;\rightarrow\; v = 0 \;\rightarrow\; 0 = v_{max} + b \cdot R^n \;\rightarrow b = -\frac{v_{max}}{R^n}$

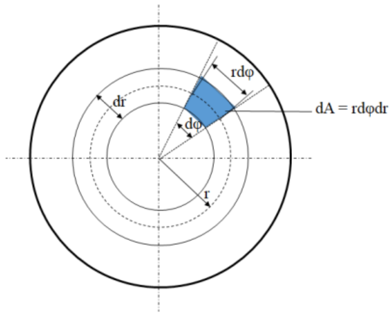
$$v = v_{max} - v_{max} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n = v_{max} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]$$

A csőben kialakuló térfogatáram:

$$q_V = \int vdA = \int_0^R v \cdot 2\pi r \cdot dr = \int_0^R v_{max} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right] \cdot 2\pi r \cdot dr = v_{max} \cdot 2\pi \cdot \int_0^R \left[r - \frac{r^{n+1}}{R^n}\right] \cdot dr$$

$$= v_{max} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{n+2} \cdot \frac{r^{n+2}}{R^n}\right]_0^R = v_{max} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{R^2}{2} - \frac{1}{n+2} \cdot \frac{R^{n+2}}{R^n}\right]$$

$$= R^2\pi \cdot v_{max}\left[\frac{n}{n+2}\right] = A \cdot v_{max}\left[\frac{n}{n+2}\right]$$



Ebből az átlagsebesség a szívócsőben:

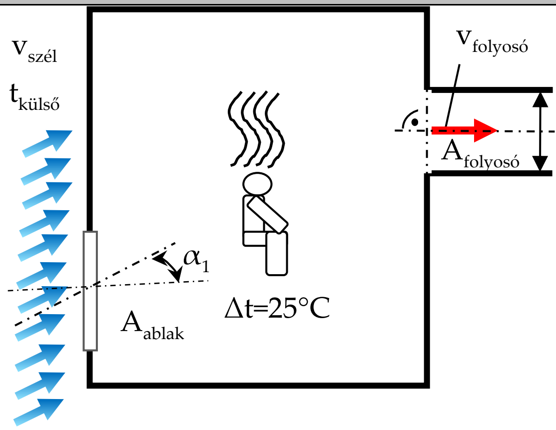
$$\overline{v}_1 = \frac{q_v}{A_1} = v_{max}\left[\frac{n}{n+2}\right] = 30 \cdot \left[\frac{7}{7+2}\right] = 23{,}3\frac{m}{s}$$

Átlagsebesség a nyomócsőben a kontinuitás alapján:

$$\overline{v}_2 = \overline{v}_1 \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = 23{,}3 \cdot \frac{1}{3{,}5} \cdot \frac{380}{300} \cdot \left(\frac{180}{90}\right)^2 = \mathbf{33{,}8}\,\boldsymbol{\frac{m}{s}}$$

K.1.50.

A K.1.50. előadóterem téglalap alakú nyitott ablakán 45°-os szögben fúj be a hűvös, őszi szél. A teremben ülő 100 hallgató és a fűtés miatt a levegő 25°C-os hőmérséklet-növekedés után a folyosóra áramlik ki.
A folyosó a terem falára merőleges tengelyű, téglalap keresztmetszetű csatornának tekinthető. A terem mindenhol máshol zárt.



Kérdés: Határozza meg:
a) a beáramló levegő térfogatáramát!
b) a termen átáramló levegő tömegáramát!
c) a folyosón áramló levegő térfogatáramát!
d) a folyosón áramló levegő átlagsebességét!

Adatok: $A_{ablak} = 6m \times 3m$; $A_{folyosó} = 2m \times 2m$; $\alpha = 45°$; $t_{külső} = 10°C$; $\Delta t = 25°C$; $v_{szél} = 3km/h$; $R = 287J/(kgK)$; $p_0 = 1$ bar

MEGOLDÁS

a) az ablakon beáramló szél térfogatárama, figyelembe véve a ferde megfúvást:

$$q_{v,szél} = v_{szél} \cdot A_{ablak} \cdot \cos\alpha = \frac{3}{3{,}6} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ = \mathbf{10,6}\,\frac{\boldsymbol{m^3}}{\boldsymbol{s}}$$

b) a tömegáram számításához szükséges a beáramló levegő sűrűségének számítása, mely az ideális gáztörvényből:

$$\rho_{szél} = \frac{p_0}{R \cdot T_{szél}} = \frac{10^5}{287 \cdot 283} = 1{,}23\,\frac{kg}{m^3}$$

A termen átáramló tömegáram:

$$q_m = q_{v,szél} \cdot \rho_{szél} = 10{,}6 \cdot 1{,}23 = \mathbf{13,1}\,\frac{\boldsymbol{kg}}{\boldsymbol{s}}$$

c) a folyosón áramló levegő térfogatáramához szükséges a kiáramló levegő sűrűsége (a tömegáramok megegyeznek):

$$\rho_{ki} = \frac{p_0}{R \cdot (T_{szél} + \Delta T)} = \frac{10^5}{287 \cdot (283 + 25)} = 1{,}13\,\frac{kg}{m^3}$$

$$q_{v,folyosó} = \frac{q_m}{\rho_{ki}} = \frac{13{,}1}{1{,}13} = \mathbf{11,2}\,\frac{\boldsymbol{m^3}}{\boldsymbol{s}}$$

d) a folyosón áramló levegő átlagsebessége:

$$v_{folyosó} = \frac{q_{v,folyosó}}{A_{folyosó}} = \frac{11{,}6}{2 \cdot 2} = \mathbf{2,9}\,\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$$