Áramlástan feladatgyűjtemény

Az energetikai mérnöki BSc és gépészmérnöki BSc képzések
Áramlástan című tárgyához

6. gyakorlat

Bernoulli-egyenlet instacionárius esetben

Összeállította:

Lukács Eszter

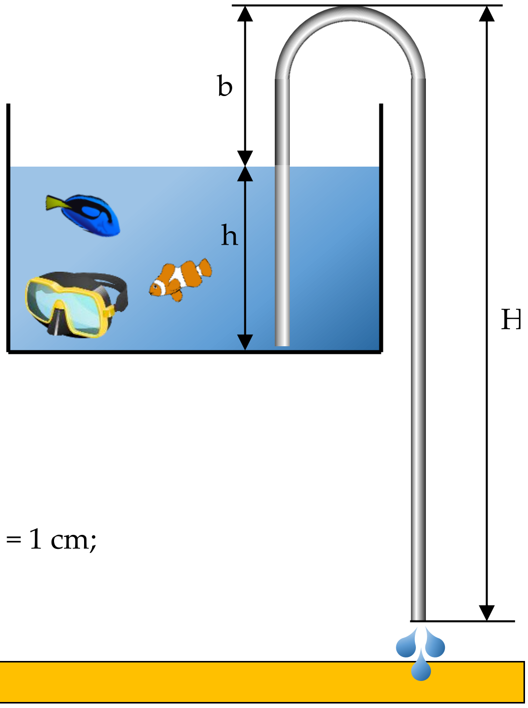
Dr. Istók Balázs

Dr. Benedek Tamás

Tokaji Kristóf

AKVÁRIUM LEÜRÍTÉSE

Egy 1000 literes akváriumban 20 cm magasan áll a víz. A leürítést egy 1 cm átmérőjű, 2,4 m hosszúságú szivornyával (pl. szilikoncsővel) végezzük.

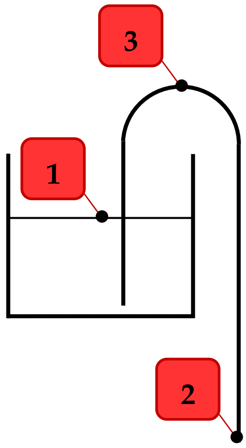


Kérdés: a) Határozza meg a folyadékoszlop gyorsulását a nyitás pillanatában!
b) Becsülje meg állandósult állapotban a leürítéshez szükséges időt!
c) Hogyan tudjuk csökkenteni a leürítéshez szükséges időt?
d) Mi a csőhossz növelésének elvi határa?

Adatok: V = 1000 l; h = 0,2 m; H = 2 m; b = 0,2 m; d = 1 cm;
ϱ = 1000 kg/m^3; $p_0 = 10^5$ Pa; $p_{gőz} = 10^3$ Pa

MEGOLDÁS

a) feladatrész: írjuk fel az instacioner Bernoulli-egyenletet a vízfelszín (1) és a cső kilépő keresztmetszete közé (2):



$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = \rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} + p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

- a gyorsulás iránya 1 → 2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_1 = p_2 = p_0 \leftarrow$ (1) szabadfelszín és (2) szabadkifolyás
- $v_1 = v_2 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- $U_1 - U_2 = g \cdot (z_1 - z_2) = g \cdot (H - b)$
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik. Hirtelen keresztmetszetváltozás esetén a gyorsulásnak szakadása van, ott az integrálást ketté kell bontani.
- a tartályban az áramlási keresztmetszet nagyságrendekkel nagyobb, mint a cső keresztmetszete, ezért a folytonossági tételt felhasználva feltételezhetjük, hogy a tartályban a gyorsulás közel zérus:

$$\rightarrow \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} = a_{cső} \cdot L_{cső} = a_{cső} \cdot (h + b + H)$$

A vízoszlop kezdeti gyorsulása tehát:

$$a_{cső} = \frac{g(H-b)}{(H+b+h)} = \frac{10 \cdot (2 - 0{,}2)}{2 + 0{,}2 + 0{,}2} = \boldsymbol{7{,}5 \frac{m}{s^2}}$$

b) feladatrész: a nyitás követően az áramlás egy kvázistacionárius állapotba áll be, ahol a potenciálkülönbség nem a csőben lévő lokális gyorsulást fogja fedezni, hanem a csőszájánál fellépő konvektív gyorsulást (az akvárium béli 0 sebességről felgyorsul a folyadék a cső béli sebességre). Írjuk fel a stacionárius Bernoulli-egyenletet az 1-2 pontok közé:

$$p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 + \rho U_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \rho U_2$$

- $p_1 = p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadfelszín és szabadkifolyás
- $U_1 - U_2 = g \cdot (z_1 - z_2)$
- $v_1 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_{cső}$ (konti.)

Ebből a kiáramlási sebesség:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (z_1 - z_2)}$$

Látható, hogy az áramlás hajtóereje a potenciálkülönbég (szintkülönbség) a két pont között. Beláthatjuk azt is, hogy mivel a szintkülönbség folyamatosan csökken, ahogy ürül a tartály, a kiáramlási sebesség is folyamatosan csökkenni fog. Ez azt is jelenti, hogy továbbra is lesz lokális gyorsulás (lassulás), azonban élhetünk azzal a feltételezéssel, hogy ez a tag elhanyagolható, mivel vízfelszín süllyedési sebessége alapvetően kicsi.

A leürítés elején: $(z_1 - z_2)_e = H - b \rightarrow v_{2,e} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - b)} = 6\ m/s$

A leürítés végén: $(z_1 - z_2)_v = H - b - h \rightarrow v_{2,v} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - b - h)} = 5{,}66\ m/s$

Így az átlagos kiáramlási sebesség:

$$\overline{v}_2 = \frac{\left(v_{2,e} + v_{2,v}\right)}{2} = 5{,}83\ m/s$$

Ebből az átlagos térfogatáram:

$$\overline{q}_v = \overline{v}_2 \cdot A_{cső} = 5{,}83 \cdot \frac{0{,}01^2\pi}{4} = 4{,}58 \cdot 10^{-4}\ \frac{m^3}{s} = 0{,}458\frac{l}{s}$$

És a leürítési idő:

$$T = \frac{V}{\overline{q}_v} = \frac{1000}{0{,}458} = \mathbf{2184{,}5\ s \approx 36 min}$$

A leürítési idő nagyságából és v_2 kismértékű megváltozásából látszik, hogy valóban nem követtünk el számottevő hibát az időfüggő tag elhanyagolásával.

b) feladatrész: ALTERNATÍV MEGOLDÁS

Vezessük be a következő jelöléseket:

- $\alpha = \frac{A_{cső}}{A_{felszín}}$; $(A_{felszín} = \frac{V}{h})$
- $x = z_1 - z_2$

A korábban felírt Bernoulli-egyenlet alapján:

$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot x}$

A kontinuitási egyenlet alapján: $v_1 = \alpha \cdot v_2 = \alpha \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot x}$

Másrészről pedig a felszín v_1 süllyedési sebessége meg fog egyezni a szintkülönbség időegységre eső megváltozásával:

$$-v_1 = -\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot x} = \frac{dx}{dt}$$

Ez egy szétválasztható differenciálegyenlet, amelyet a következő módon oldhatunk meg:

$$\int_0^T dt = -\frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_e^v \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$T = -\frac{2}{\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \left[\sqrt{x}\right]_e^v$$

$x_e = H - b; x_v = H - b - h \rightarrow T = \mathbf{2184,5\ s}$

c) feladatrész: írjuk fel a leeresztéshez szükséges időt paraméteresen (a sebességet a jobb átláthatóság érdekében a kezdeti sebességgel becsüljük):

$$T = \frac{V}{\bar{q}_v} = \frac{V}{\bar{v}_2 \cdot A_{cső}} \approx \frac{V}{\sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho} + 2 \cdot g \cdot (H - b)} \cdot A_{cső}}$$

- a cső keresztmetszetének növelésével ($A_{cső}$)
- a cső lelógó hosszának növelésével ($H - b$)
- a tartálynyomás növelésével ($p_1 - p_0$)
- szivattyú beépítése
- gyorsítjuk felfelé rendszert - ez nagyon elvi (g)

d) feladatrész: a csőhossz növelés elvi határát az jelenti, hogy a legfelső ponton (3) a lecsökkent nyomás hatására elforr a folyadék. Ezen csőhossz meghatározása az 2-3 pontok közé felírt Bernoulli-egyenlettel történhet:

$$p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 = p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- $v_2 = v_3$
- $U_3 - U_2 = g \cdot (z_3 - z_2) = g \cdot H_{max}$
- $p_3 = p_{gőz}$

Ebből a maximálisan megengedhető csőhossz:

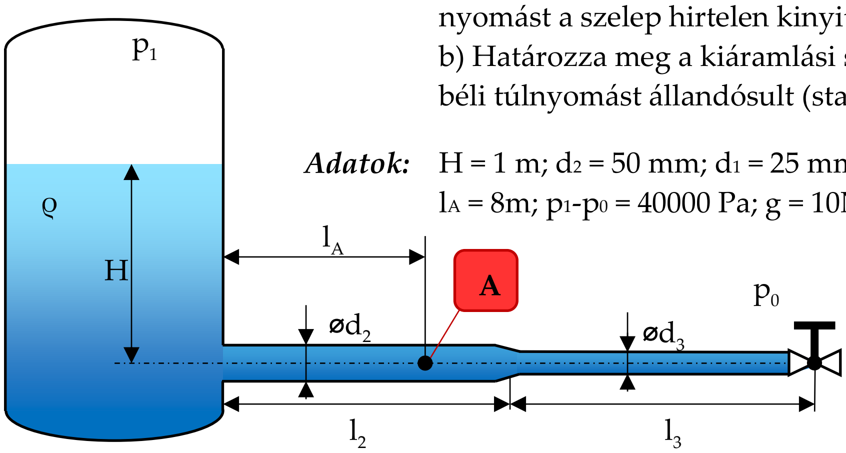
$$H_{max} = \frac{p_0 - p_g}{\rho g} = \frac{10^5 - 10^3}{1000 \cdot 10} = 9{,}9m \;\rightarrow\; L_{max} = H_{max} + b + h = 9{,}9 + 0{,}2 + 0{,}2 = \mathbf{10,3m}$$

LÉPCSŐS KIFOLYÁS TARTÁLYBÓL

A mellékelt ábrán látható zárt tartály *H=1 m* magasságig van vízzel feltöltve. A tartályhoz egy $d_2 = 50$ *mm* és egy $d_3 = 25$ *mm* átmérőjű csőszakasz csatlakozik. A csővégen egy alap-állapotban zárt szelep található. A közeget súrlódásmentesnek, és összenyomhatatlannak feltételezzük.

Kérdés: a) Határozza meg az „A" pont béli gyorsulást és túl-nyomást a szelep hirtelen kinyitásának pillanatában!
b) Határozza meg a kiáramlási sebességet és az „A" pont-béli túlnyomást állandósult (stacioner, t→∞) állapotban!

Adatok: H = 1 m; d_2 = 50 mm; d_1 = 25 mm; l_2 = 12 m; l_3 = 9m; l_A = 8m; p_1-p_0 = 40000 Pa; g = 10N/kg; ϱ = 1000 kg/m³;



MEGOLDÁS

a) feladatrész:

Kezdeti megfontolások:

- mivel a közeg összenyomhatatlan, az „A" pont béli gyorsulás ugyanakkora, mint az l_1 szakasz bármely más pontjában
- a különböző átmérőjű szakaszokon létrejövő gyorsulások között a kontinuitás teremt kapcsolatot
- a Bernoulli-egyenletet A és 3 pontok közé felírva túl sok az ismeretlen (p_A, a_A), ezért célszerű először olyan pontokat választanunk, ahol több adat áll rendelkezésre - például a tartályban lévő folyadék felszíne és a kifolyás

Instacioner Bernoulli-egyenlet a folyadékfelszín (1) és a kifolyás (3) közé:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = \rho \cdot \int_1^3 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} + p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- A gyorsulás iránya 1 → 3, tehát a 3 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_1 - U_3 = g \cdot (z_1 - z_3) = g \cdot H$
- $v_1 = v_3 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos, ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik. Hirtelen keresztmetszetváltozás esetén a gyorsulásnak szakadása van, ott az integrálást ketté kell bontani.
- a tartályban az áramlási keresztmetszet nagyságrendekkel nagyobb, mint a cső keresztmetszete, ezért a folytonossági tételt felhasználva feltételezhetjük, hogy a tartályban a gyorsulás közel zérus.

$$\rightarrow \int_1^3 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} = a_A l_2 + a_3 l_3$$

Az 1-3 pontok közé felírt Bernoulli-egyenlet a következő formára egyszerűsödik:

$$p_1 + \rho g H = p_0 + \rho(a_A l_2 + a_3 l_3)$$

A gyorsulások között kapcsolatot teremtő kontinuitási egyenlet:

$$a_A A_2 = a_3 A_3 \qquad a_3 = a_A \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^2 = a_A \left(\frac{50}{25}\right)^2 = 4a_A$$

Ebből „A" pont béli gyorsulás számítható:

$$p_1 + \rho g H = p_0 + \rho(a_A l_2 + 4a_A l_3)$$

$$a_A = \frac{(p_1 - p_0) + \rho g H}{\rho(l_2 + 4l_3)} = \frac{40000 + 1000 \cdot 10 \cdot 1}{1000(12 + 4 \cdot 9)} = \mathbf{1,04} \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s^2}}$$

Az „A" pont béli túlnyomás kiszámításához a gyorsulások ismeretében most már felírhatjuk az instacinoner Bernoulli-egyenletet A-3 pontok közé. Vigyázat: a gyorsulás (*a_2*) ugyan végig azonos a *l_2* jelű csőben, de a lokális gyorsulás miatt a csőben fellépő túlnyomás (*$p_2(x)$*) áramlási irányban folyamatosan csökken.

$$p_A + \rho \cdot U_A + \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2 = \rho \cdot \int_A^3 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} + p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- a gyorsulás iránya A → 3, tehát az A oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_A - U_3 = g \cdot (z_A - z_3) = 0$
- $v_A = v_3 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik. Hirtelen keresztmetszetváltozás esetén a gyorsulásnak szakadása van, ott az integrálást ketté kell bontani.

$$\rightarrow \int_A^3 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} = a_A \cdot (l_2 - l_A) + a_3 l_3$$

Az A-3 pontok közé felírt Bernoulli-egyenlet a korábban felírt kontinuitási egyenlet segítségével a következő formára egyszerűsödik, melyből „A" pont béli túlnyomás számítható:

$$p_A - p_0 = \rho a_A(l_2 - l_A + 4l_3) = 1000 \cdot 1{,}04 \cdot (12 - 8 + 4 \cdot 9) = \boldsymbol{41600 Pa}$$

b) feladatrész:

<u>Kezdeti megfontolások</u>:

- A nyitás követően az áramlás egy stacionárius állapotba áll be, ahol a túlnyomás és a potenciálkülönbség nem a csőben lévő lokális gyorsulást fogja fedezni, hanem a csőszájánál és a szűkületnél a konvektív gyorsulást - a tartály béli 0 sebességről felgyorsul a folyadék a 2-es cső béli sebességre, valamint az 2-es cső béli sebességről a 3-es cső béli sebességre
- mivel az áramlás súrlódásmentes, ezért az „A" pont béli túlnyomás ugyanakkora, mint az l_2 szakasz bármely más pontjában

Írjuk fel a stacionárius Bernoulli-egyenletet az 1-3 pontok közé:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_1 - U_3 = g \cdot (z_1 - z_3) = g \cdot H$
- $v_1 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_3$ (konti.)

Ebből a kifolyási sebesség számítható:

$$v_3 = \sqrt{2 \cdot \frac{p_1 - p_0 + \rho g H}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(40000 + 10 \cdot 1000 \cdot 1)}{1000}} = \mathbf{10\,\frac{m}{s}}$$

Stacionárius Bernoulli-egyenlet az A-3 pontok között:

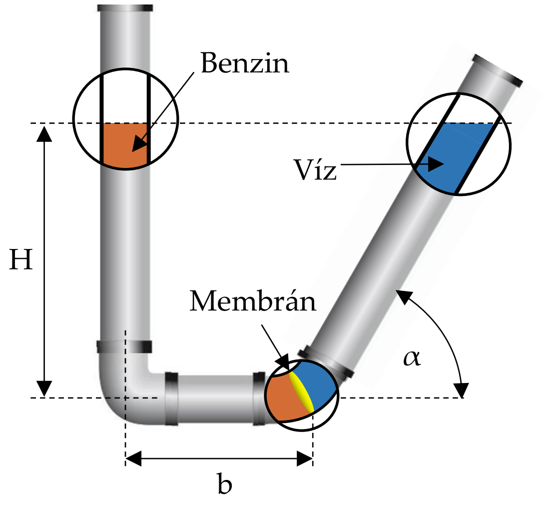
$$p_A + \rho \cdot U_A + \frac{\rho}{2} \cdot v_A^2 = p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_A - U_2 = g \cdot (z_A - z_2) = 0$
- folytonosság: $q_{V,A} = q_{V,3} \rightarrow v_A = v_3 \cdot \frac{A_3}{A_A} = 2{,}5\,\frac{m}{s}$

Ebből az „A" pontban fellépő túlnyomás stacionárius esetben:

$$p_A - p_0 = \frac{\rho}{2} \cdot (v_3^2 - v_A^2) = \frac{1000}{2}(10^2 - 2{,}5^2) = \mathbf{46875\ Pa}$$

ELTÉRŐ SŰRŰSÉGŰ ANYAGOK ESETE

<table>
<tr><td colspan="2">Egy D = 6 mm átmérőjű, az ábrán látható kialakítású cső alján membrán található, aminek bal oldalán H = 80 cm magasságú benzin, a jobb oldalán azonos magasságú vízoszlop nyugszik. Mindkét csőszár a légkörre nyitott. A membrán elpattanásakor a folyadékoszlopok az egyensúlyi állapotra törekedve mozgásba jönnek.</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Kérdés:</td><td>Határozza meg a membrán elpattintásakor
a) a vízoszlop gyorsulását!
b) a benzinoszlop gyorsulását!</td></tr>
<tr><td>Adatok:</td><td colspan="2">D = 6 mm; H = 80 cm; b = 30 cm; α = 60°
ϱ_b = 750 kg/m^3; ϱ_v = 1000 kg/m^3; p_0 = 10^5 Pa; g = 10 m/s^2; μ = 0</td></tr>
</table>

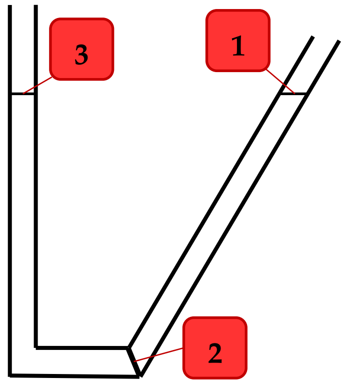
MEGOLDÁS

a) (és b)) feladatrész:

Kezdeti megfontolások:

- mielőtt fejjel rohannánk a falnak, gondoljuk végig, hogy lehet-e a vízoszlopnak és a benzinoszlopnak eltérő gyorsulása!
  …
  Nem! A folyadékoszlopok sem egymásba nem csúszhatnak, sem üres tér nem keletkezhet közöttük. A vízoszlop és a benzinoszlop gyorsulása tehát azonos lesz: $a_{víz} = a_{benzin} = a$
- eddigre már szépen kifejlődött mérnöki érzékünk alapján pedig azt is meg tudjuk mondani, hogy a víz fog megindulni a benzin felé, mert az azonos magasságú (H) vízoszlop nagyobb sűrűsége miatt nagyobb nyomással nehezedik a membránra, mint a kisebb sűrűségű benzin. Figyelem: a vízoszlop alján létrejövő túlnyomás csak a vízfelszín magasságától függ, a csőszár állásszöge nem befolyásolja azt.
- a Bernoulli-egyenletet egyszerűsített formájában csak azonos sűrűségű folyadékokra alkalmazható, azért külön írjuk fel a vízben, és külön a benzinben

Instacionárius Bernoulli egyenlet a vízre a jobb felszín (1) és a membrán (2) közé:



$$p_1 + \rho_v \cdot U_1 + \frac{\rho_v}{2} \cdot v_1^2 = \rho_v \cdot \int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \underline{ds} + p_2 + \rho_v \cdot U_2 + \frac{\rho_v}{2} \cdot v_2^2$$

- a gyorsulás iránya 1 → 2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_1 = p_0 \leftarrow$ szabadfelszín
- $U_1 - U_2 = g \cdot (z_1 - z_2) = g \cdot H$
- $v_1 = v_2 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos, ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik.
  $$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \underline{ds} = a \cdot \frac{H}{\sin\alpha}$$

Ebből a 2 pontban fellépő túlnyomás:

$$p_2 - p_0 = \rho_v \cdot \left(g \cdot H - a \cdot \frac{H}{\sin\alpha}\right) \tag{1}$$

Instacionárius Bernoulli egyenlet a benzinre a membrán (2) és a bal felszín (3) közé:

$$p_2 + \rho_b \cdot U_2 + \frac{\rho_b}{2} \cdot v_2^2 = \rho_b \cdot \int_2^3 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \underline{ds} + p_3 + \rho_b \cdot U_3 + \frac{\rho_v}{2} \cdot v_3^2$$

- a gyorsulás iránya 2 → 3, tehát a 3 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadfelszín
- $U_3 - U_2 = g \cdot (z_3 - z_2) = g \cdot H$
- $v_3 = v_2 = 0 \leftarrow$ a kezdeti időpillanatban még áll a folyadék
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik.
  $$\int_2^3 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \underline{ds} = a \cdot (H + b)$$

Ebből a 2 pontban fellépő túlnyomás:

$$p_2 - p_0 = \rho_b \cdot [g \cdot H + a \cdot (H + b)] \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletetek alapján a folyadékoszlopok gyorsulása számítható:

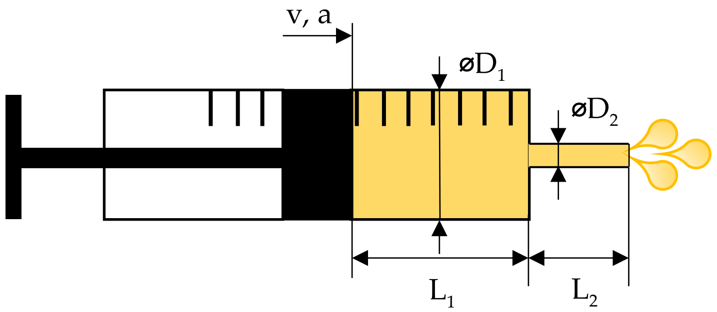
$$a = \frac{(\rho_v - \rho_b) g H}{\rho_b (H + b) + \rho_v \frac{H}{\sin\alpha}} = \frac{(1000 - 750) \cdot 10 \cdot 0{,}8}{750 \cdot (0{,}8 + 0{,}3) + 1000 \frac{0{,}8}{\sin 60°}} = \mathbf{1{,}14 \frac{m}{s^2}}$$

FECSKENDŐ

Egy vízzel töltött fecskendő dugattyúja v sebességgel és a gyorsulással mozog az ábrán jelölt irányba.

Kérdés: Határozza meg a mozgatáshoz szükséges erőt!

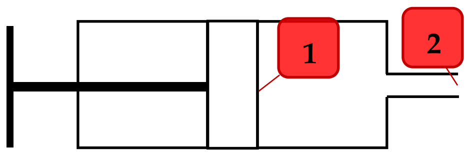
Adatok: v = 0.4 m/s; a = 1 m/s²; D_1 = 50 mm; L_1 = 200 mm; D_2 = 10 mm; L_2 = 80 mm; ϱ = 1000 kg/m³



MEGOLDÁS

Írjuk fel az instacioner Bernoulli-egyenletet az alábbi ábrán jelölt 1-2 pontok közé:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = \rho \cdot \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} + p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$



- a gyorsulás iránya 1 → 2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni az időfüggő tagot
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadkifolyás
- $U_1 - U_2 = g \cdot (z_1 - z_2) = 0$
- ahol az áramlási keresztmetszet azonos ott a folytonossági tétel alapján a gyorsulás végig állandó, azaz az integrál egy szorzássá egyszerűsödik. Hirtelen keresztmetszetváltozás esetén a gyorsulásnak szakadása van, ott az integrálást ketté kell bontani.

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \underline{ds} = a_1 L_1 + a_2 L_2$$

A kontinuitást felhasználva a sebességre és a gyorsulásra:

$$v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \qquad a_2 = a_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

A dugattyú két oldalán fellépő nyomáskülönbség kiadódik:

$$p_1 - p_0 = \rho \cdot \left[a_1 \cdot \left(L_1 + L_2 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right) + \frac{v_1^2}{2} \cdot \left(\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right)\right]$$
$$= 1000 \cdot \left[1 \cdot \left(0{,}2 + 0{,}08 \cdot \left(\frac{50}{10}\right)^2\right) + \frac{0{,}4^2}{2} \cdot \left(\left(\frac{50}{10}\right)^4 - 1\right)\right] = 52120\ Pa$$

Amelyből a kifejtendő erő nagysága számolható:

$$F = A_1 \cdot (p_1 - p_0) = \frac{0{,}05^2 \pi}{4} \cdot 52120 = \mathbf{102.3\ N}$$