Áramlástan feladatgyűjtemény

Az energetikai mérnöki BSc és gépészmérnöki BSc képzések
Áramlástan című tárgyához

7. gyakorlat

Impulzustétel

Összeállította:

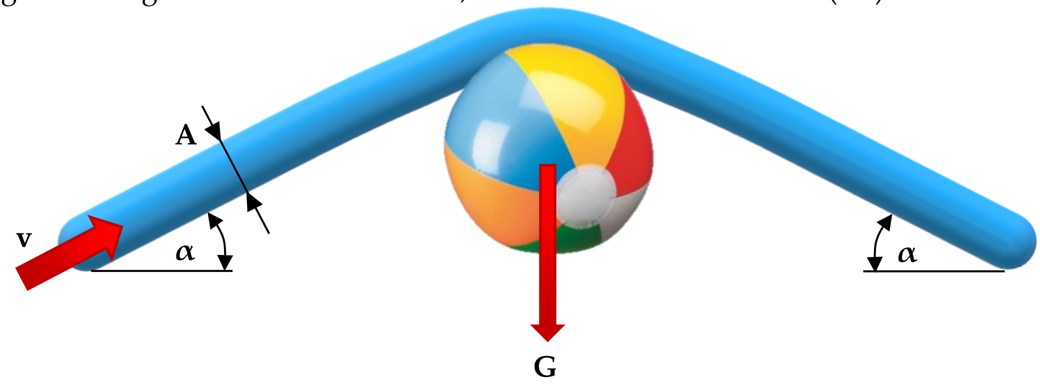
Lukács Eszter

Dr. Istók Balázs

Dr. Benedek Tamás

LABDÁN ELHAJLÓ VÍZSUGÁR

Az ábrán látható balról érkező víz szabadsugár a Coanda-effektus révén hozzátapad a labda felületéhez és azon 2α szöggel eltérül. Az áramvonalak görbültsége miatt a vízsugár és a labda érintkezésénél a nyomás a környezeti nyomáshoz képest lecsökken, melynek következtében a labdára felfelé ható erő ébred. Megfelelő paraméterek esetén ez az erő a labda súlyát képes kompenzálni. A feladat egyszerűsítése érdekében a súrlódástól és a vízsugárra ható gravitációtól eltekintünk, az áramlást síkáramlásnak (2D) feltételezzük.



Kérdés: Mekkora súlyú labdát tud megtartani a vízsugár?

Adatok: v_1=10m/s; ϱ=1000kg/m^3; A=10cm^2; α=15°

MEGOLDÁS

<u>Kezdeti megfontolások</u>: a következőkben bemutatott alapelveket célszerű minden impulzus-tétellel megoldani kívánt feladatra alkalmazni.

Az impulzustétel általános alakja a következőképpen írható fel:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \cdot \underline{v} \cdot dV}_{\text{I}} + \underbrace{\int \underline{v} \cdot \rho \cdot \underline{v} \cdot \underline{dA}}_{\text{II}} = \underbrace{\int \rho \cdot \underline{g} \cdot dV}_{\text{III}} - \underbrace{\int p \cdot \underline{dA}}_{\text{IV}} - \underbrace{\underline{R}}_{\text{V}} + \underbrace{\underline{S}}_{\text{VI}}$$

, ahol I az eredő mozgásmennyiség lokális megváltozása (instacionárius tag), II az impulzus-áram, III a térerősségből származó erő, IV a nyomásból származó erő, V az áramlásban lévő szilárd testre ható erő, VI pedig a súrlódásból származó erő. A következő megfontolásokkal élve az impulzus-tétel jelentősen egyszerűbb alakra hozható:

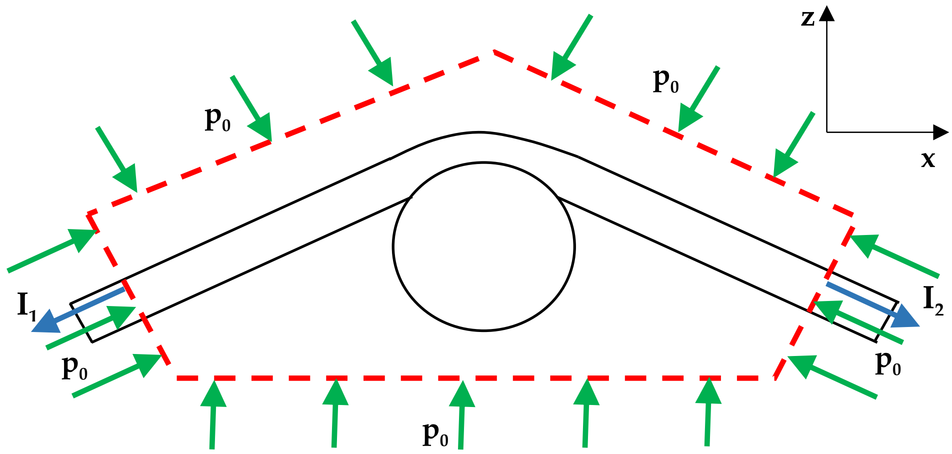
1. Stacionárius az áramlás vagy azzá tudjuk tenni pl. együtt mozgó koordináta-rendszerből vizsgálva a feladatot? Ha igen, *I. tag = 0*. Az ügyesen megválasztott koordináta-rendszert tüntessük fel az ábrán.
2. Rajzoljuk be az ábrába az ellenőrző felületet: (1) ha testre ható erőt keresünk, legyen benne a test (*V. tag*), (2) ahol az ellenőrző felületen keresztül átáramlás van, ott a felület legyen merőleges az átáramlásra.
3. Rajzoljuk be az ábrába az impulzusáram-vektorokat (*II. tag*), melyek
   - nagysága: $I = q_m v = \rho v^2 A$
   - iránya: párhuzamos $\underline{v}$-vel
   - irányítottsága: a zárt ellenőrző felületből mindig **kifelé** mutat

4. Rajzoljuk be az ábrába az nyomásból származó erővektorokat (*IV. tag*), melyek
   - nagysága: $P = pA$
   - iránya: merőleges a felületre
   - irányítottsága: a zárt ellenőrző felületbe mindig **befelé** mutat
5. Vizsgáljuk meg, hogy eltekinthetünk-e a súrlódás hatásától (*VI. tag*)
6. Írjuk fel az impulzus-tételből származó komponens-egyenleteket x, y és z irányba.
7. Ne feledjük, hogy a kontinuitás és a Bernoulli-egyenlet továbbra is jó szolgálatot tehetnek a feladat megoldása során.

Az impulzustétel egyszerűsített formája súrlódásmentes, stacioner esetre a térerő elhanyagolásával a következő alakot ölti:

$$\sum \underline{I} = \sum \underline{P} - \underline{R}$$

Az alábbi ábrán pirossal jelöltük az ellenőrző felületet, kékkel az impulzus-áram vektorokat és zölddel a nyomásvektorokat, valamint feltüntettük a feladatmegoldáshoz használt koordináta-rendszert.



Bernoulli egyenlet az 1 belépő és a 2 kilépő keresztmetszet között:
$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$

- $U_1 \cong U_2$
- $p_1 = p_2 = p_0 \leftarrow$ mert szabad áramlás, és az áramvonalak párhuzamos egyenesek az átáramlási keresztmetszetekben

Ebből következően a sugárban a sebesség állandó:
$v_1 = v_2 = v$

Kontinuitási egyenlet, a belépő és kilépő tömegáram azonos, a víz sűrűsége állandónak tekinthető:
$q_{m,1} = q_{m,2} = q_m;\ \rho = const. \rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$

A Bernoulli-egyenletből láttuk, hogy $v_1 = v_2$, hiszen a nyomás és a potenciál azonos, ezért a vízsugár belépő és kilépő keresztmetszete azonos:
$A_1 = A_2 = A$

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, a súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:
$\sum \underline{I}_i = \sum \underline{P} - \underline{R}$

A nyomás az ellenőrző felületen mindenhol légköri (szabadsugár): $\sum \underline{P} = 0$

Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_1| = q_{m,1} \cdot v_1 = q_m \cdot v$

$I_{1,x} = -q_m \cdot v_{1,x} = -q_m \cdot v \cdot cos\alpha$

$I_{1,y} = 0$

$I_{1,z} = -q_m \cdot v_{1,y} = -q_m \cdot v \cdot sin\alpha$

Az impulzusáram az 2-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_2| = q_{m,2} \cdot v_2 = q_m \cdot v$

$I_{2,x} = q_m \cdot v_{2,x} = q_m \cdot v \cdot cos\alpha$

$I_{2,y} = 0$

$I_{2,z} = q_m \cdot v_{2,y} = -q_m \cdot v \cdot sin\alpha$

Komponens egyenletek:
- x-irány:

$$I_{1,x} + I_{2,x} = -R_x$$

$$R_x = q_m \cdot v \cdot cos\alpha - q_m \cdot v \cdot cos\alpha = 0$$

- y-irány: abban az irányban nincsenek vektorkomponensek
- z-irány:

$$I_{1,z} + I_{2,z} = -R_z$$

$$-R_z = -q_m \cdot v \cdot sin\alpha - q_m \cdot v \cdot sin\alpha = -2 \cdot q_m \cdot v \cdot sin\alpha =$$

$$= -2 \cdot \rho v^2 A \cdot \sin\alpha = -2 \cdot 1000 \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot \sin 15° = -51N$$

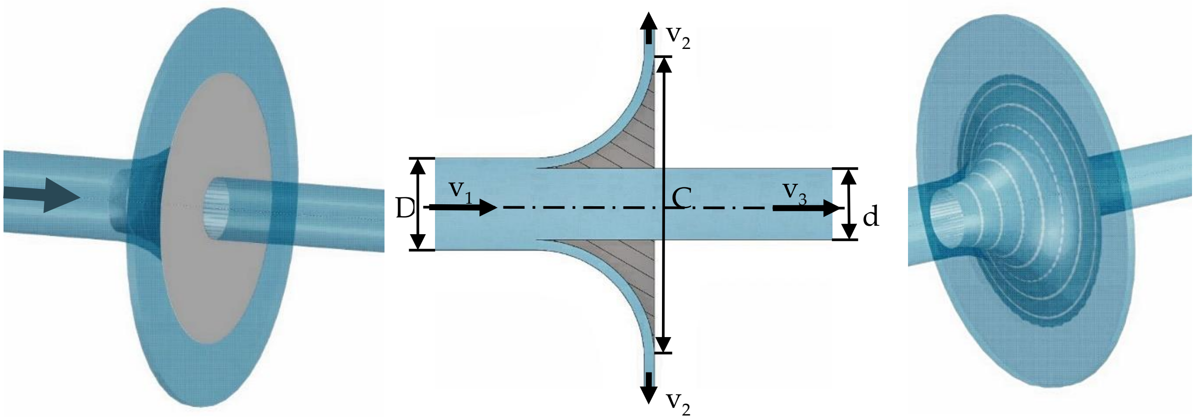
Mivel a labda egyensúlyban van, a rá ható erők eredője 0, tehát $-R_z$ meg fog egyezni a labda súlyával:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-51} \end{bmatrix} \boldsymbol{N}$$

Érdekesség, hogy mivel a labda tetején görbült az áramvonal, itt radiális irányban nyomásgradiens alakul ki, azaz a labda vízsugárral érintkező felszínén légköri alatti nyomáseloszlás lesz. Mivel a labda alján a nyomáseloszlás légköri, a nyomáskülönbség fent tartja a sugárban a labdát!

LIKAS TÁRCSA

A mellékelt ábrán látható vízszintes tengelyű, középen *d=70mm* átmérőjű furattal rendelkező hengeres kúpra *D=90mm* átmérőjű, v_1*=15m/s* sebességű alkohol szabadsugár áramlik. A kúp és a rááramló szabadsugár tengelye azonos. A furatban a folyadék a teljes kereszt-metszetet kitölti. A kúp peremén, melynek átmérője *C=300mm*, a folyadék a belépésre merőlegesen irányban távozik.
A folyadékra a súrlódásból és térerősségből származó erőhatások elhanyagolhatók.

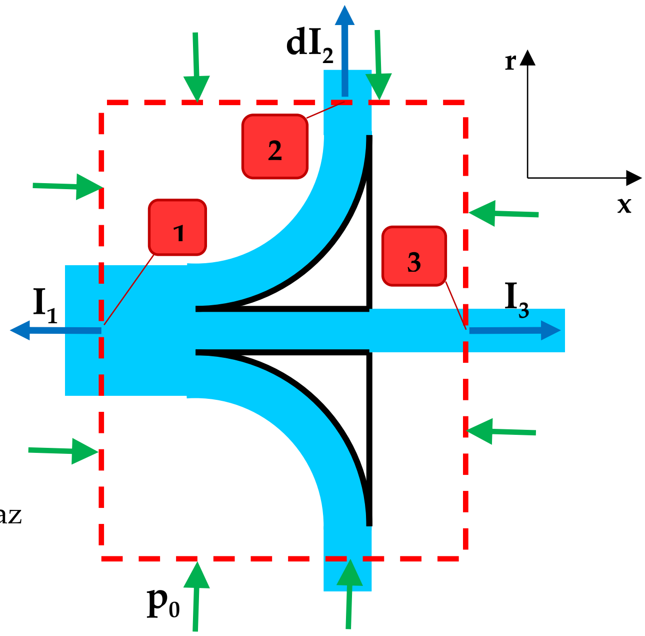


Kérdés:	a) Határozza meg a testre ható erőt! b) Határozza meg a peremen kilépő közeg vastagságát (***b***)!
Adatok:	d = 70 mm; D = 90 mm; C = 300 mm; v_1 = 15 m/s; ϱ =740 kg/m³; p_0 =10^5 Pa

MEGOLDÁS

a) feladatrész:

Rajzoljuk be az ábrába a felvett (henger)koordináta-rendszert, az ellenőrző felületet és az impulzusáram- és nyomásvektorokat!



Bernoulli-egyenlet az 1-2 és 1-3 pontok közé:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_3 + \rho \cdot U_3 + \frac{\rho}{2} \cdot v_3^2$$

- $U_1 \cong U_2 \leftarrow \underline{g}$ elhanyagolva
- $U_1 = U_3$
- $p_1 = p_2 = p_3 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár

$\rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = v$

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$

A nyomás az ellenőrző felületen mindenhol légköri: $\sum \underline{P} = 0$

Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_1| = q_{m,1} \cdot v_1 = q_{m,1} \cdot v$

$I_{1,x} = q_m \cdot v_{1,x} = -q_{m,1} \cdot v$

$I_{1,rad} = 0$

$I_{1,tang} = 0$

Az impulzusáram a 2-es keresztmetszetben:
$\int d\underline{I}_2 = 0$

Az impulzusáram a 3-as keresztmetszetben:
$|\underline{I}_3| = q_{m,3} \cdot v_3 = q_{m,3} \cdot v$

$I_{3,x} = q_m \cdot v_{3,x} = q_{m,3} \cdot v$

$I_{3,rad} = 0$

$I_{3,tang} = 0$

Komponens egyenletek:

- x-irány:

$$I_{1,x} + I_{3,x} = -R_x$$

$$R_x = q_{m,1} \cdot v - q_{m,3} \cdot v = \rho \cdot v^2 \cdot (A_1 - A_3) =$$

$$= 740 \cdot 15^2 \cdot \left(\frac{0{,}09^2\pi}{4} - \frac{0{,}07^2\pi}{4}\right) = 418{,}6\ N$$

- radiális irány: abban az irányban nem történik semmi
- tangenciális irány: abban az irányban nem történik semmi

A tárcsára ható erő tehát:
$R = \mathbf{418{,}6\ N}$

b) feladatrész

A peremen kilépő közeg vastagságának meghatározásához írjuk fel a kontinuitást!

$q_{m,1} = q_{m,2} + q_{m,3} \rightarrow \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 + \rho_3 v_3 A_3$

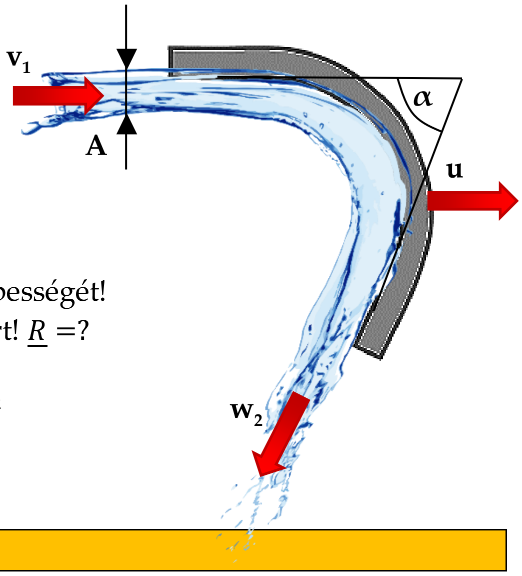
- $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho = const. \leftarrow$ víz összenyomhatatlan
- $v_1 = v_2 = v_3 = v = const. \leftarrow$ Bernoulli-egyenletből számolva

$\rightarrow A_1 = A_2 + A_3 \rightarrow \dfrac{D^2\pi}{4} = bC\pi + \dfrac{d^2\pi}{4}$

A kilépő sugár vastagsága tehát:
$b = \dfrac{D^2 - d^2}{4C} = \dfrac{90^2 - 70^2}{4 \cdot 300} = \mathbf{2{,}67mm}$

MOZGÓ TERELŐLAPRA HATÓ ERŐ

A mellékelt ábrán látható ívelt lapát u=13m/s sebességgel mozog a vízszintes síkban. A lapátra víz szabadsugár áramlik v_1=30m/s sebességgel.
A súrlódásból és a folyadék tömegére térerősségből származó erő elhanyagolható.



Kérdés: a) Határozza meg a kiáramlás abszolút sebességét!
b) Határozza meg a lapátra ható erővektort! $\underline{R}$ =?

Adatok: α = 60°; v_1 = 13 m/s; u = 13 m/s; A = 0,01 m²
ϱ = 1000 kg/m³; p_0 = 10^5 Pa

MEGOLDÁS

a) feladatrész:

A feladat stacionáriussá tétele érdekében a problémát a lapáttal együtt mozgó koordináta-rendszerből vizsgáljuk.

Bernoulli-egyenlet együtt mozgó koordináta-rendszerben a belépés (1) és kilépés (2) egy pontja között:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot w_1^2 = p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot w_2^2$$

- $p_1 = p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár
- $U_1 = U_2 \leftarrow$ vízszintes

Ebből következően a relatív rendszerben felírt belépő és kilépő sebesség nagysága megegyező, értéke az abszolút sebesség és a szállítósebeség különbsége:

$$w_1 = w_2 = v_1 - u = 17\frac{m}{s}$$

A kilépő abszolút sebesség a kilépő relatív sebesség és a szállító sebességösszege:

$$\underline{v_2} = \underline{w_2} + \underline{u} = \begin{bmatrix} w_{2x} \\ w_{2y} \\ w_{2z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_2 \cdot \cos 60° \\ -w_2 \cdot \sin 60° \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \cdot \cos 60° \\ -17 \cdot \sin 60° \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}5 \\ -14{,}7 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

$$|\underline{v_2}| = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 14{,}7^2} = \mathbf{15{,}4}\,\boldsymbol{\frac{m}{s}}$$

b) feladatrész

A **kontinuitási** és a **Bernoulli-egyenlet** alapján a korábbi feladatokban bemutatott módon levezethető a belépő és kilépő keresztmetszetek azonossága:

$q_{m,1} = q_{m,2} = q_m$

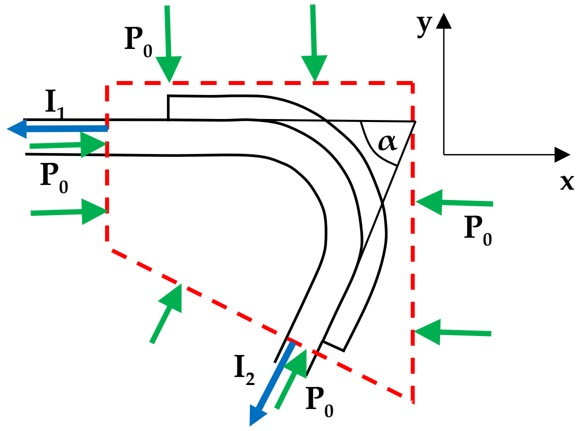
$\rho = const., w_1 = w_2 = w$

$\rightarrow A_1 = A_2 = A$

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$

A nyomás az ellenőrző felületen mindenhol légköri: $\sum \underline{P} = 0$



Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:

$|\underline{I_1}| = q_{m,1} \cdot w_1 = q_m \cdot w$

$I_{1,x} = -q_m \cdot w_{1,x} = -q_m \cdot w$

$I_{1,y} = 0$

$I_{1,z} = 0$

Az impulzusáram az 2-es keresztmetszetben:

$|\underline{I_2}| = q_{m,2} \cdot w_2 = q_m \cdot w$

$I_{2,x} = q_{m,2} \cdot w_{2,x} = -q_m \cdot w \cdot cos\alpha$

$I_{2,y} = q_{m,2} \cdot w_{2,y} = -q_m \cdot w \cdot sin\alpha$

$I_{2,z} = 0$

Komponens egyenletek:

- x-irány:

$$I_{1,x} + I_{2,x} = -R_x$$

$$R_x = q_m \cdot w + q_m \cdot w \cdot cos\alpha = \rho w^2 A \cdot (1 + cos\alpha) =$$

$$= 1000 \cdot 17^2 \cdot 0{,}01 \cdot (1 + 0{,}5) = \mathbf{4335 N}$$

- y-irány:

$$I_{1,y} + I_{2,y} = -R_y$$

$$R_y = 0 + q_m \cdot w \cdot sin\alpha = \rho w^2 A \cdot \sin 60° = 1000 \cdot 17^2 \cdot 0{,}01 \cdot \sin 60° = \mathbf{2503 N}$$

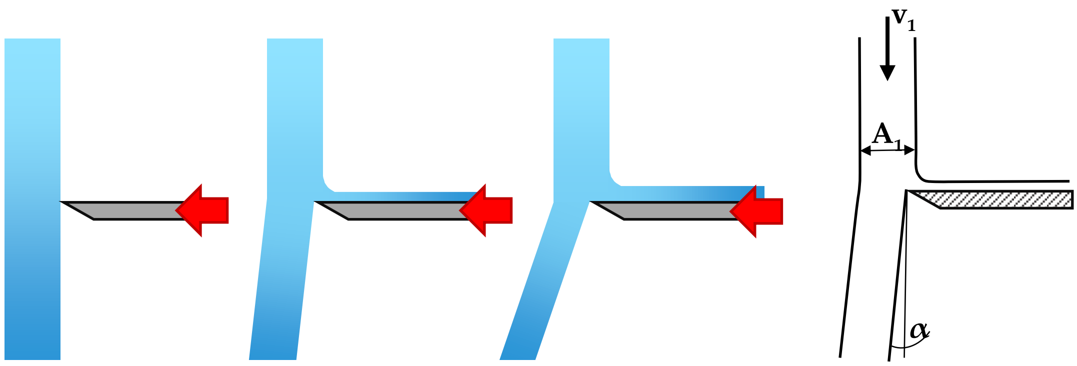
- z-irány: abban az irányban nem történik semmi

A lapátra ható erővektor tehát:

$$\underline{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{4335} \\ \mathbf{2503} \end{bmatrix} \boldsymbol{N}$$

KÉS A VÍZBEN

Amennyiben egy Pelton-turbináról üzemzavar következtében leesik a fékező nyomaték, a járókerék megfut, mely a megnövekedett feszültségek következtében a turbina idő előtti tönkremeneteléhez vezethet. Ennek elkerülésére a lehető leggyorsabban meg kell szüntetnünk a turbina vízrávezetését. A csővezeték hirtelen zárása azonban az Allievi-elmélet értelmében a csövek szétrobbanásához vezethet, így más módszert ajánlatos alkalmazni: a turbina-lapátokra áramló vízsugárba egy vékony lemezélet juttatunk, amely a sugár egy részét a lemezzel párhuzamosan leválasztja. A többi folyadékrész pályája az impulzus-tételből adódóan elhajlik.



Kérdés: Mekkora részét kell a sugárnak leválasztani ahhoz, hogy a többi folyadékrész pályája 5°-kal eltérüljön?
A feladat megoldása során a nehézségi erőtér és a súrlódás hatásától eltekintünk, valamint síkáramlást feltételezünk!

Adatok: $\alpha = 5°$

MEGOLDÁS

Mivel szabadsugarat vizsgálunk, a **Bernoulli-egyenletből** következően a belépő és kilépő sebességek megegyeznek:

$v_1 = v_2 = v_3 = v$

A **kontinuitásból** pedig meghatározható a keresztmetszetek egymáshoz való viszonya:

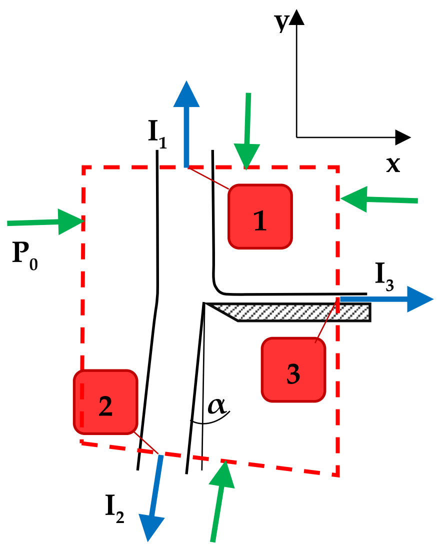
$A_1 \cdot v = A_2 \cdot v + A_3 \cdot v$

$A_1 = A_2 + A_3$

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$\sum \underline{I}_i = \sum \underline{P} - \underline{R}$

A nyomás az ellenőrző felületen mindenhol légköri: $\sum \underline{P} = 0$



Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_1| = q_{m,1} \cdot v_1 = q_{m,1} \cdot v$
$I_{1,x} = 0$
$I_{1,y} = q_{m,1} \cdot v$
$I_{1,z} = 0$

Az impulzusáram az 2-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_2| = q_{m,2} \cdot v_2 = q_{m,2} \cdot v$
$I_{2,x} = q_{m,2} \cdot v_{2,x} = -q_{m,2} \cdot v \cdot sin\alpha$
$I_{2,y} = q_{m,2} \cdot v_{2,x} = -q_{m,2} \cdot v \cdot cos\alpha$
$I_{2,z} = 0$

Az impulzusáram az 3-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_3| = q_{m,3} \cdot v_3 = q_{m,3} \cdot v$
$I_{2,x} = q_{m,3} \cdot v_{3,x} = q_{m,3} \cdot v$
$I_{2,y} = 0$
$I_{2,z} = 0$

Komponens egyenletek:

- x-irány: a súrlódás elhanyagolása következtében a késre x-irányban nem hat erő

$$I_{1,x} + I_{2,x} + I_{3,x} = 0$$

$$0 = -q_{m,2} \cdot v \cdot sin\alpha + q_{m,3} \cdot v = \rho v^2 A_2 \cdot \sin\alpha - \rho v^2 A_3 =$$

$$= \rho v^2 (A_1 - A_3) \cdot \sin\alpha - \rho v^2 A_3$$

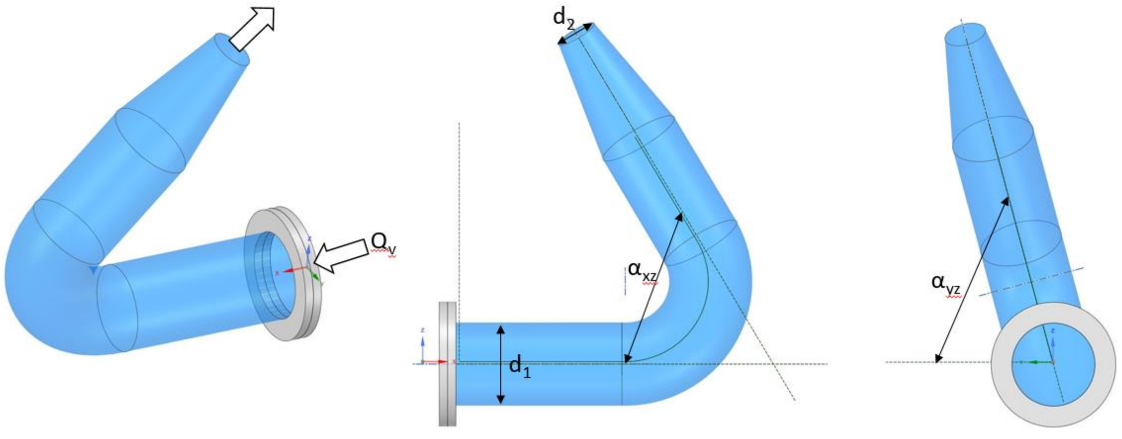
$$(A_1 - A_3) \cdot \sin\alpha = A_3$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{\sin 5°}{1 + \sin 5°} = 0{,}08 = \mathbf{8}\%$$

A sugárnak tehát 8%-át kell leválasztanunk ahhoz, hogy a többi folyadékrész pályája 5°-kal eltérüljön. A jelenlegi feladat szempontjából az y-irányú komponens-egyenlet nem érdekes, a késre ható erő felírásához azonban szükségessé válhat.

CSŐKÖNYÖKRE HATÓ ERŐ

Levegő áramlik ki az ábrán látható, α_{xz} szögben meghajlított és az x tengely körül α_{yz} szöggel elforgatott csőkönyökből a p_0 nyomású szabadba.



XZ sík YZ sík

Kérdés: a) Határozza meg a (p_1-p_0) nyomáskülönbséget! (A magasságkülönbségből adódó nyomásváltozás elhanyagolható.)

b) Határozza meg a karimakötésre ható **R** erőt! (**R**$_x$, **R**$_y$, **R**$_y$)

Adatok: $v_1 = 20$ m/s; $\varrho_{lev} = 1{,}2$ kg/m^3; $d_1 = 100$ mm; $d_2 = 50$ mm; $\alpha_{xz} = 60°$; $\alpha_{yz} = 60°$

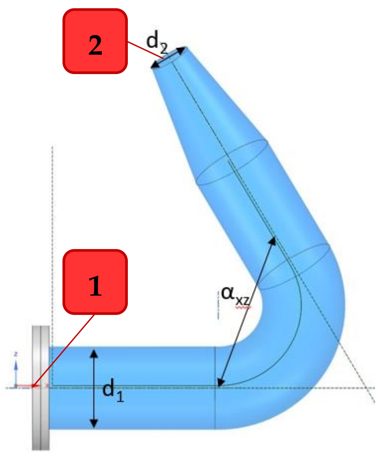
MEGOLDÁS

a) feladatrész

Írjuk fel a Bernoulli-egyenletet a beáramlás (1) és a kiáramlás (2) közé:

$$p_1 + \rho \cdot U_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot U_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

- $U_1 \cong U_2 \leftarrow$ a különbség elhanyagolható
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabadsugár
- $v_2 = v_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = 80\,\frac{m}{s} \leftarrow$ kontinuitás, a sűrűség változása elhanyagolhatóan kicsiny



XZ sík

Fentiek alapján a keresett nyomáskülönbség:

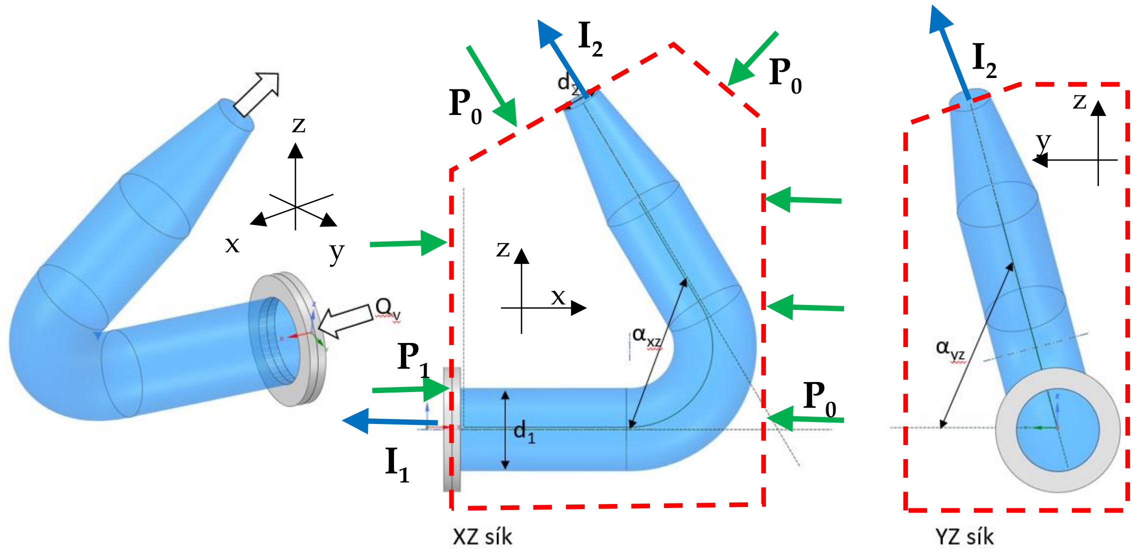
$$p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1{,}2}{2}(80^2 - 20^2) = \boldsymbol{3600 Pa}$$

b) feladatrész

Rajzoljuk be az ábrába az ellenőrző felületet valamint az impulzusáram- és nyomás-vektorokat!

Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$$



A nyomás csak az 1-es felületen nem légköri, ezért csak ott lesz nyomásból származó erő:
$|\sum \underline{P}| = (p_1 - p_0) \cdot A_1$

Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:
$|\underline{I_1}| = q_{m,1} \cdot v_1 = q_m \cdot v_1$
$I_{1,x} = -q_m \cdot v_{1,x} = -q_m \cdot v_1$
$I_{1,y} = 0$
$I_{1,z} = 0$

Az impulzusáram az 2-es keresztmetszetben:
$|\underline{I_2}| = q_{m,2} \cdot v_2 = q_m \cdot v_2$
$I_{2,x} = q_m \cdot v_{2,x} = -q_m \cdot v_2 \cdot cos\alpha_{xz}$
$I_{2,y} = q_m \cdot v_{2,y}$=$q_m \cdot v_2 \cdot sin\alpha_{xz} \cdot cos\alpha_{yz}$
$I_{2,z} = q_m \cdot v_{2,z}$=$q_m \cdot v_2 \cdot sin\alpha_{xz} \cdot sin\alpha_{yz}$

A tömegáram: $q_m = A_1 \cdot \rho \cdot v_1 = 0{,}188 \frac{kg}{s}$

Komponens egyenletek:

- x-irány:

$I_{1,x} + I_{2,x} = |\sum \underline{P}| - R_x$
$R_x = q_m \cdot v_1 + q_m \cdot v_2 \cdot cos\alpha_{xz} + (p_1 - p_0) \cdot A_1 =$

$$0{,}188 \cdot 20 + 0{,}188 \cdot 80 \cdot \cos 60° + 3600 \cdot \frac{0{,}1^2 \pi}{4} = 39{,}58\ N$$

- y-irány:

$I_{1,y} + I_{2,y} = -R_y$
$R_y = 0 - q_m \cdot v_2 \cdot sin\alpha_{xz} \cdot cos\alpha_{yz} = -0{,}188 \cdot 80 \cdot \sin 60° \cdot \cos 60° = -6.53\ N$

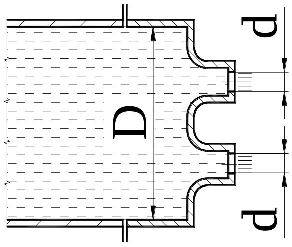
- z-irány:

$I_{1,z} + I_{2,z} = -R_z$
$R_z = 0 - q_m \cdot v_2 \cdot sin\alpha_{xz} \cdot sin\alpha_{yz} = -0{,}188 \cdot 80 \cdot \sin 60° \cdot \sin 60° = -11.31\ N$

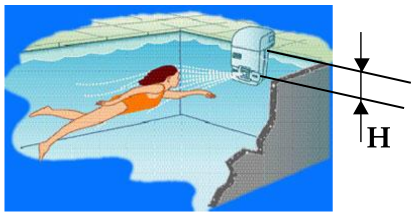
$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{39{,}58^2 + 6{,}53^2 + 11{,}31^2} = \mathbf{41{,}7\ N}$

BADUSPORT

A mellékelt ábrán látható Badu Jet Sport ellenáramoltatót egy medence vízszintje alá *H=0,5m* mélységbe építették be. A ellenáramoltató *D=400mm* átmérőjű tartályfedelébe vízszintes elrendezésben 2 darab *d=40mm* belső átmérőjű fúvókát építettek. A fúvókát együttesen q_v=75m³/h térfogatáramú vizet szállítanak. (A súrlódásból és a folyadék tömegére a térerősségből származó erő valamint az áramlási sebesség a tartályfedélben elhanyagolható.)



Kérdés: a) Határozza meg a túlnyomást a tartályfedél belsejében!
b) Határozza meg a fúvókára ható erővektort! ***R** = ?*



Adatok: H = 0,5 m; D = 400mm; d = 40 mm; q_v = 75m³/h;
ϱ = 1000 kg/m³; p_0 = 10^5 Pa; g = 10 N/kg

MEGOLDÁS

a) feladatrész:

A kilépő sugarak sebessége a térfogatáramból és a geometriából számítható:

$$v_s = \frac{q_v}{2 \cdot d^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{75/3600}{2 \cdot 0{,}04^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = 8{,}29\ m/s$$

A tartályban a sebesség szintén a térfogatáramból és geometriából számolva:

$$v_t = \frac{q_v}{D^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{75/3600}{0{,}4^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = 0{,}166 \frac{m}{s}$$

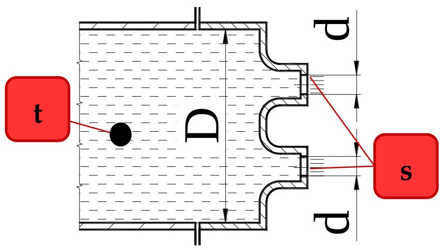
Tehát tényleg elhanyagolhatóan csekély itt a sebesség! Benne van a feladatban!

A nyomásviszonyok meghatározásához írjuk fel a Bernoulli-egyenletet a tartály és a kilépő vízsugarak közé:

$$p_t + \rho \cdot U_t + \frac{\rho}{2} \cdot v_t^2 = p_s + \rho \cdot U_s + \frac{\rho}{2} \cdot v_s^2$$

- $U_t = U_s$

$$\rightarrow p_t - p_s = \frac{\rho}{2} \cdot (v_s^2 - v_t^2) = \frac{1000}{2} \cdot (8{,}29^2 - 0{,}166^2)$$
$$= 34356\ Pa$$



A kilépő sugarak szabadsugarak, tehát a nyomásuk meg fog egyezni a környezet nyomásával, H mélységben a túlnyomással:

$$p_s - p_0 = \rho \cdot g \cdot H = 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 5000\ Pa$$

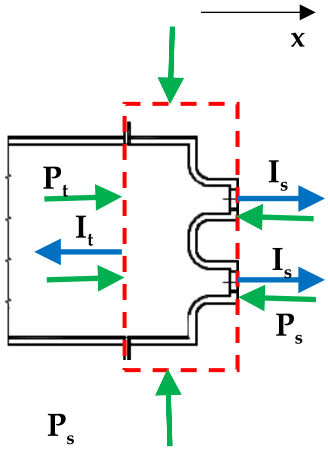
$$\rightarrow p_t - p_0 = 39356\ Pa$$

Az impulzustétel stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$\sum \underline{I}_i = \sum \underline{P} - \underline{R}$

A nyomás a tartály keresztmetszetében nem egyenlő a környezeti nyomással, ezért a nyomásból származó erő:

$|\sum \underline{P}| = (p_t - p_s) \cdot A_t$



Az impulzus-áram az tartály keresztmetszetében:

$|\underline{I}_t| = q_m \cdot v_t$

$I_{t,x} = -q_m \cdot v_{t,x} = -q_m \cdot v_t$

$I_{t,y} = 0$

$I_{t,z} = 0$

Az impulzus-áram a sugarak keresztmetszetében:

$|\underline{I}_s| = 2 \cdot \frac{q_m}{2} \cdot v_s = q_m \cdot v_s$

$I_{s,x} = q_m \cdot v_{s,x} = q_m \cdot v_s$

$I_{s,y} = 0$

$I_{s,z} = 0$

A tömegáram: $q_m = \frac{q_v}{\rho} = \frac{75/3600}{1000} = 2{,}1 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{s}$

Komponens-egyenletek:

Csak az x iránnyal kell foglalkozni, mert a többi irányban minden 0.

$I_{t,x} + I_{s,x} = |\sum \underline{P}| - R_x$

$R_x = (p_t - p_s) \cdot A_t + q_m \cdot (v_t - v_s) = 34356 \cdot \frac{0{,}4^4 \pi}{4} + 2{,}1 \cdot 10^{-5} \cdot (0{,}166 - 8{,}29) = \mathbf{4316\ N}$