

M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Áramlástan Tanszék

Áramlástan

Előadásjegyzet Dr. Vad János előadásai alapján

Készítette: Daku Gábor

Közreműködtek: Dénes Csenge Napsugár, Kocsis Bálint, Tomka Botond, Tóth Luca
Lujza

Lektorálta: Dr. Balczó Márton, Dr. Bak Bendegúz, Dr. Balogh Miklós, Dr.
Benedek Tamás, Dr. Farkas Balázs, Dr. Havasi-Tóth Balázs, Dr.
Horváth Csaba, Dr. Istók Balázs, Dr. Suda Jenő, Dr. Sente Viktor

2023. február 13., Budapest

Tartalomjegyzék

1	Folyadékok sajátosságai, fizikai mennyiségek és leírásuk	7
1.1	Szilárd anyagok és folyadékok összehasonlítása.....	8
1.2	Newton-féle viszkozitási törvény	9
1.3	Fizikai mennyiségek.....	11
1.4	Fizikai jellemzők térbeli változékonysága	13
1.5	Folyadékmozgás leírása.....	13
1.6	Erőterek.....	14
1.7	Gáz, gőz, cseppfolyós közeg	17
1.8	Az ideális folyadékmodell.....	20
2	Áramlástan rendszerezése	21
2.1	Hidrosztatika.....	21
2.2	Kinematika	25
2.3	Kinetika.....	31
3	Áramlástan mérések	41
3.1	Nyomásmérés	41
3.2	Térfogatárammérés	42
4	Örvénytételek	45
4.1	Thomson (Lord Kelvin) - tétel	45
4.2	Helmholtz I. tétele	47
4.3	Helmholtz II. tétele.....	48
5	Impulzustétel	50
5.1	Szilárd test az ellenőrző felületen belül.....	52
5.2	Impulzustétel alkalmazása: síklapra ható erő	53
5.3	Csővezeték hirtelen zárása: Allievi-elmélet.....	55
5.4	Impulzusnyomatéki-tétel	58
6	Súrlódásos folyadékok	59
6.1	Nemnewtoni folyadékok, reológiai görbék.....	59
6.2	Newtoni folyadékok súrlódásos mozgásegyenlete	60
6.3	Lamináris és turbulens áramlások – Reynolds-kísérlet	64
6.4	Veszteséges taggal kiegészített Bernoulli-egyenlet	65

7	Hidraulika	66
7.1	Csősúrlódás	66
7.2	Nem körkeresztmetszetű vezeték	72
7.3	Határréteg (Ludwig Prandtl - 1904).....	74
7.4	Rendszerelemek hidraulikai vesztesége	82
8	Gázdinamika	86
8.1	Energiaegyenlet	86
8.2	A hang terjedési sebessége gázokban.....	89
8.3	Kiömlés tartályból	91
8.4	Laval-fúvóka	94
9	Áramlások hasonlósága	96
9.1	Navier-Stokes egyenlet ($\rho = \text{áll.}$, $\mu = \text{áll.}$).....	97
9.2	Kontinuitási egyenlet ($\rho = \text{áll.}$)	98
9.3	Hasonlósági feltételek.....	98
9.4	Dimenziótlan jellemzők szemléletes jelentése.....	101
9.5	Áramlásba helyezett testekre ható erő	101
10	Hivatkozások	110

Jelölésjegyzék

A táblázatban a többször előforduló jelölések elnevezése, valamint a fizikai mennyiségek esetén azok mértékegysége található. Az egyes mennyiségek jelölése – ahol lehetséges – megegyezik hazai és a nemzetközi szakirodalomban elfogadott jelölésekkel.

Latin betűk

Jelölés	Megnevezés, megjegyzés, érték	Mértékegység
A	felületelem-vektor	m^2
<i>A</i>	keresztmetszet	m^2
<i>a</i>	gyorsulás	m/s^2
<i>a</i>	hullámterjedés sebessége közegben (hangsebesség)	m/s
b	binormális egységvektor	1
<i>c</i>	lapáthúrhossz	m
<i>c_e, c_f</i>	ellenállás- és, felhajtóerő-tényező	1
<i>c'_f</i>	helyi dimenziótlan fali súrlódási („skin friction”) tényező	1
<i>c_v, c_p</i>	izochor, izobár fajhő	$J/(kg \cdot K)$
<i>c_p</i>	statikus nyomástényező	1
D	sebességtér deriválttenzora	m/s
<i>d</i>	jellemző méret, átmérő	m
E	Young-féle rugalmassági modulus	Pa
e	érintőirányú egységvektor	1
<i>Eu</i>	Euler-szám	1
F	erő	N
<i>f</i>	frekvencia	Hz
<i>F_e, F_f</i>	ellenállás- és, felhajtóerő	N
<i>Fr</i>	Froude-szám	1
g	térerősség vektor	N/kg
<i>H, h</i>	magasság	m
I	impulzusvektor	$kg \cdot m/s$
í	impulzusáram-vektor	$kg \cdot m/s^2$
i, j, k	<i>x, y, z</i> -irányú egységvektorok	1
<i>i</i>	csatornaesés	1
<i>K, k</i>	konstans	
<i>K</i>	nedvesített kerület	m
<i>k</i>	érdesség-magasság	m
<i>L, l</i>	szakasz hossza, jellemző méret, szárnyfesztáv	m
M	folyadék által a testre kifejtett nyomaték	Nm
<i>m</i>	tömeg	kg

Ma	Mach szám	1
\mathbf{n}	normál irányú egységvektor	1
\mathbf{P}	nyomásból származó erő	N
p	nyomás	Pa
q_m	tömegáram	kg/s
q_v	térfogatáram	m^3/s
\mathbf{R}	folyadékról testre a ható erő	N
R, r	sugár	m
R	specifikus gázállandó (levegő = 287)	$J/(kg \cdot K)$
R_u	univerzális gázállandó = 8,314	$J/(mol \cdot K)$
\mathbf{r}	helyvektor	m
Re	Reynolds-szám	1
\mathbf{S}	súrlódásból származó erő	N
S	siklószám = c_t / c_e	1
\mathbf{s}	vonalelemvektor	m
s_0	folyadékdarab kezdeti pozíciója	m
Str	Strouhal-szám	1
T	abszolút hőmérséklet	K
t	idő	s
Tu	turbulenciafok	1
U	potenciálfüggvény	Nm/kg
u	x -irányú sebességkomponens	m/s
V	térfogat	m^3
V, v_0, v_∞	zavartalan megfúvási sebesség	m/s
\mathbf{v}	sebességvektor	m/s
\mathbf{w}	relatív sebességvektor	m/s
x	x -koordináta	m
y	y -koordináta	m
z	z -koordináta, geodetikus magasság	m

Görög betűk

Jelölés	Megnevezés, megjegyzés, érték	Mértékegység
α	kontrakciós tényező (átfolyási szám)	1
α	megfúvási szög	rad
γ	szögelfordulás	rad
Γ	cirkuláció	m^2/s
δ	falvastagság	m
ΔA	felületelem-vektor nagysága	m^2
$\Delta p'$	nyomásvesztés	Pa
ΔV	térfogatváltozás	m^3

ε	elemi kocka oldalhosszúsága	m
ε	expanziós tényező	1
ε	relatív megrövidülés	1
ζ	veszteségtényező	1
η	hatásfok	1
ϑ	általános szög koordináta	rad
κ	izentrópus kitevő	1
λ	csősúrlódási tényező	1
μ	dinamikai viszkozitás	$kg \cdot m/s$
ν	kinematikai viszkozitás	m^2/s
ν	fajtérfogat	m^3/kg
Π	dimenziótlan jellemző	1
ρ	sűrűség	kg/m^3
σ	nyomófeszültség	Pa
τ	csúsztatófeszültség	Pa
ω	szögsebesség vektor	rad/s

Indexek, kitevők

Jelölés	Megnevezés, értelmezés
\perp	merőleges komponens
∞	végtelen távoli hely (zavartalan áramlás)
*	legszűkebb keresztmetszet
0	kezdeti hely, eredeti állapot
a	tehetetlenségi erőter
b	belső
BC	Borda-Carnot
be	beáramlás
c	centrifugális
Cor	Coriolis
D	diffúzor
din	dinamikus
e	egyenértékű
e	ellen
f	füstgáz
foly	folyadékra vonatkozó
g	erőterből származó
g	zárt görbe
g	gőz
h	határ
id	ideális eset

jell	jellemző
k	külső
k	csőkönyök
ki	kiáramlási
krit	kritikus
lev	levegő
m	modellre (kismintára) jellemző
<i>n</i>	általános hatványkitevő
ö	össz
<i>p</i>	nyomásból származó
R	redukált
s	súrlódási
st	statikus
T	torlópont
t	tehetetlenségi
t	tartály
tol	tólózár
víz	víz
<i>x</i>	<i>x</i> -irányú
<i>y</i>	<i>y</i> -irányú
<i>z</i>	<i>z</i> -irányú

Rövidítések

Jelölés	Megnevezés, értelmezés
ÁV	áramvonal
CFD	numerikus áramlástan (Computational Fluid Dynamics)
HR	határréteg
ISA	International Standard Atmosphere
S	siklószám = c_f / c_e
NY	nyomott oldal
RMS	négyzetes középérték (Root-Mean-Square)
SZ	szívott oldal
VAR	viszkózus alapréteg

1 Folyadékok sajátosságai, fizikai mennyiségek és leírásuk

Mi is az áramlás? Az áramlás nem más, mint nyugvó/mozgó és ezen belül is cseppfolyós/gáznemű folyadékok sajátosságaival, fizikai jellemzőivel foglalkozó mérnöki tudományág, ami tulajdonképpen a mechanika egy részterülete. Talán így elsőre némi meglepetésre adhat okot az, hogy az áramlás szakterületén belül a gáznemű közegeket is folyadékoknak tekintjük, ugyanakkor például a levegő áramlása bizonyos feltételek mellett hasonlóan írható le, mint a vízé.

A mérnöki gyakorlatban számos esetben szembesülhetünk azzal a feladattal, hogy egy adott közeget kell egyik helyről a másikra szállítani (pl. ivóvíz-hálózatok), de akár különféle technológiai folyamatok (pl. élelmiszeripar) esetén is sokszor alkalmazunk különböző folyadékokat. Ahhoz, hogy ezeket megvalósítsuk, áramlási berendezéseket kell építenünk, amelyekhez szorosan kötődik a szilárdtest mechanika, azon belül is a szilárdságtan. Éppen ezért az áramlás gyakran kéz a kézben jár a mechanikával, így a jelen tárgy keretein belül hangsúlyos áramlási vonulat mellett sűrűn fel fog tűnni a szilárdtest mechanika is.

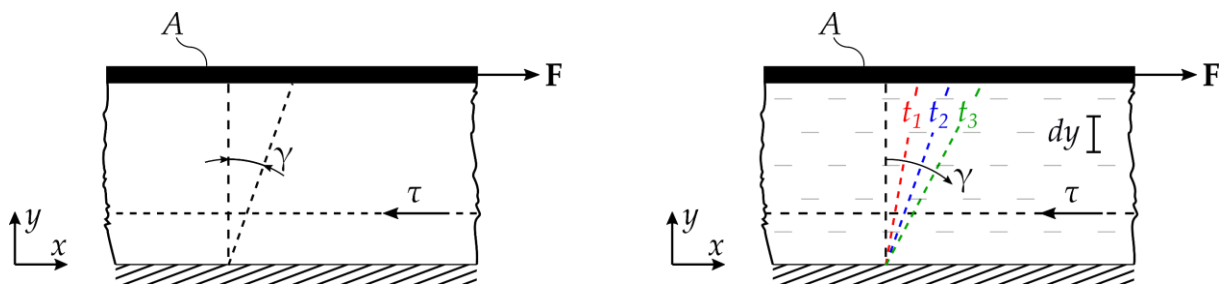


1.1. ábra. Autómotor-hűtőventilátor [1].

Példaként vegyük az **1.1. ábrán** látható motor-hűtőventilátort. Talán elsőre nem is gondolnánk, hogy több évtizednyi áramlási van becsomagolva ebbe. A ránézésre egyszerűnek tűnő áramlástechnikai gépbe. Ugyanakkor a tervezés során több, igen fontos szempontot is szem előtt kell tartanunk. Egyfelől elsődleges feladatunk a megfelelő levegőmennyiség biztosítása, azaz kellően nagy légtechnikai teljesítménnyel kell rendelkeznie a ventilátornak. Mindezt jó hatásfokkal kell tudnia megvalósítania, ezzel minél kevesebb teljesítményt elvonva a hajtástól. Másfelől ezt a lehető legalacsonyabb zajterhelés mellett kell megoldani (sarló alakú ventilátorlapátok). Végül, a motortér korlátolt mérete következtében szükséges a berendezés miniatürizálása is. Annak érdekében, hogy mélyebb betekintést nyerjünk a folyadékok, valamint az áramlás világába, a következőkben tárgyalásra kerülnek a folyadékok fontosabb tulajdonságai és a gyakran előforduló fizikai mennyiségek.

1.1 Szilárd anyagok és folyadékok összehasonlítása

A szilárd testek és a folyadékok közti különbséget egy gondolat kísérlettel szemléltethetjük, melyet az **1.2. ábra** mutat be. Vegyünk egy szilárd lapot, erre rögzítsünk (pl. ragasztással) egy szilárd testet, melyet felülről egy szintén szilárd, vékony lemez határol, melynek jellemző felülete legyen A . A felső lemezre hassunk egy F – lappal párhuzamos – erővel. Mivel oldalirányból nem hat erő erre a szilárd rétegre, így minden metszetében ugyanaz a τ csúsztatófeszültség fog ébredni, melyet ki tudunk fejezni úgy, mint az F erő és a vizsgálatra jellemző A felület hányadosa. Az első fontos tapasztalat, hogy az F erő hatására egy γ szögdeformáció következik be, amely arányos a τ csúsztatófeszültséggel (Hooke-törvény). A másik, hogy amennyiben fokozott deformációnak tesszük ki az szilárd anyagot, akkor az egy idő után elnyíródik, az anyag szerkezete tönkremegy.



1.2. ábra. Szilárd test (bal) és folyadék (jobb) deformációja.

Ezután vegyünk megint egy szilárd lapot, erre vigyünk fel egy vékony folyadékréteget (pl. kenjük meg olajjal), és helyezzünk rá egy lapot, melyre szintén hassunk F erővel. Amennyiben állandó ez az F erő, akkor azt tapasztaljuk, hogy a felső lap mozgásba jön egy u állandó sebességgel. Képzeltben jelöljük ki egy olyan vonaldarabot (pl. vékony tintacsík), amely mindkét lap felületére merőleges. Ez alapján a következő megfigyeléseket tehetjük:

- 1) Ahogy a felső lap egy u állandó sebességű mozgásba jön, a vonaldarab felső pontja mindenkor odatapad a felső laphoz és vele együtt mozog tovább, a vonaldarab alsó pontja pedig egy helyben marad (**1.2. ábra**). Ez a tapasztalat a **tapadás-törvényeként** fogalmazható meg, amely a következőt mondja ki: *szilárd fal közvetlen közelében a folyadék sebessége megegyezik a fal sebességével.*
- 2) **Deformáció valósul meg a folyadékban is**, mely a deformációs sebességgel jellemezhető, ami nem más, mint az egységnyi idő alatt bekövetkező szögelfordulás ($d\gamma/dt$). A tapasztalatazt mutatja – szemben a szilárd anyagokkal –, hogy a deformációs sebesség lesz arányos a τ csúsztatófeszültséggel.
- 3) Egy másik jelentős különbség, hogy a **folyadékok folytonosan és korlátlanul deformálhatók** az általunk alkalmazott mérnöki szemléletben. Mindazonáltal érdemes megjegyezni, hogy bizonyos esetekben a túlzott deformáció hatására a folyadékban előfordulhatnak anyagszerkezettani változások (pl. tejben lévő zsír összeállhat nagyobb darabokba = tejből kiköpüljük a vajat), melyek gátolják a korlátlan deformációt.

A fenti tapasztalatok összefoglalva (1.1. táblázat):

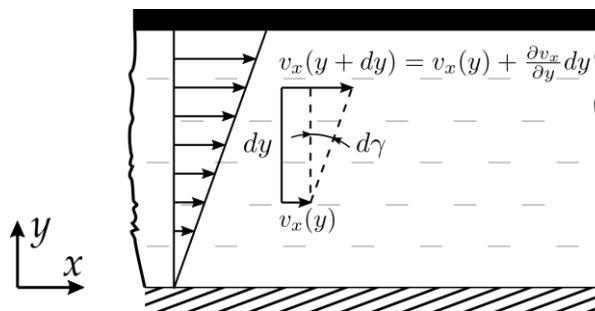
1.1. táblázat. Szilárd anyagok és folyadékok tulajdonságai.

Szilárd	Folyadék
$d\gamma \sim \tau = F/A$ (Hooke-törvény)	$d\gamma/dt \sim \tau$
fokozott igénybevétel \rightarrow tönkremenetel	folyamatos, korlátlan deformáció
	érvényes a tapadás törvénye

1.2 Newton-féle viszkozitási törvény

Az előző alfejezetben láthattuk, hogy a folyadékok tárgyalásánál kulcsfontosságú a deformációs sebesség. Ennek azonban van egy fő alkalmazásbeli korlátja: a szögelfordulás közvetlenül nem, illetve csak nehezen mérhető a folyadékokban. Ebből kifolyólag célszerű a deformációs sebességet például a könnyebben mérhető sebesség jellemzőkkel kifejezni.

Ehhez ragadjunk meg egy kis vonaldarabot a folyadékrétegen belül, továbbá vegyünk fel egy vizsgálati koordináta-rendszert. Az x -tengely mutasson a zárólapokkal párhuzamosan, az y -tengely pedig legyen a lapokra merőleges. Ily módon a folyadékban jelöljük ki egy dy nagyságú folyadékdarabot, és figyeljük meg ennek mozgását (1.3. ábra).



1.3. ábra. Sebességeloszlás a folyadékrétegen belül.

Megállapítható, hogy a folyadék sebessége a folyadékrétegen belül változó, hiszen a tapadás törvényének értelmében az alsó lapnál zérus (álló lap), a felső lapnál pedig u lesz a sebessége. A vonaldarab alsó végpontja egy adott y koordinátához tartozóan $v_x(y)$ sebességgel fog mozogni x -irányba. A felső végpont sebességéhez vegyük a lap alján érvényes $v_x(y)$ sebességet és adjuk hozzá az x sebességkomponens y -irányú változékonyságát $(\partial v_x/\partial y)$ megszorozva a dy helyváltozással.

Vizsgáljuk meg, hogy egy bizonyos dt idő alatt mennyit haladt előre a folyadékdarab felső végpontja az alsó végponthoz képest, vagyis hogy mekkora a $d\gamma$ szögelfordulás. Ehhez a felső végpont elmozdulásból vonjuk le alsó végpontét. Ezen elmozdulás továbbá kifejezhető a dy mint elforgatás kar és a $d\gamma$ szögelfordulás szorzataként:

$$\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) dt - v_x dt = dy d\gamma \quad (1.1)$$

Átrendezés után:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1.2)$$

Tehát a deformációs sebesség úgy írható fel, mint az x -irányú sebességkomponens y szerinti parciális deriváltja, amely a szögelfordulással ellentétben már műszakilag jól megfogható fogalom. Isaac Newton volt az első, aki megállapította, hogy a deformációs sebesség és a csúsztatófezsültség egyenes arányos, ahol az arányossági tényező a közeg dinamikai viszkozitása (ezzel később még részletesebben foglalkozunk), melyet μ -vel jelölünk.

A Newton-féle viszkozitás törvény:

$$\tau_{xy} = \tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1.3.)$$

Mivel a folyadék oldalsó felületén nem hat erő, illetve az atomszférikus nyomásból adódóan kiegyenlítődnek, így minden y folyadékrétegben $\tau(y) = \text{áll.}$ csúsztatófezsültség jellemző. Ez a fenti egyenlet értelmében azt jelenti, hogy $\partial v_x / \partial y = \text{áll.}$, *vagyis az x -irányú sebességkomponens lineárisan változik y függvényében.*

A Newton-féle viszkozitás törvény egyik következménye, hogy *nyugvó folyadékban a súrlódás zérus*, hiszen ha a deformációs sebesség tart a nullához, akkor a csúsztatófezsültség szintén nullához tart. Másik oldalról ez azt is jelenti, hogy ugyan relatív hosszú idő alatt, de akár kis erőhatással is deformálni tudjuk a folyadékot (pl. vízben lévő csónak odahúzása a parthoz). Vagyis erőhatás következtében a newtoni folyadék deformálódik, mozgásba jön. Ez különösen fontos a technológiai közegek mozgatásánál, ahol figyelembe kell venni, hogy mekkora erőhatás szükséges a feladat megvalósításához.

A műszaki életben a technikai folyadékok nagy része eleget tesz a Newton-féle viszkozitási törvénynek, így ezzel összhangban, az ilyen típusú folyadékokat *newtoni folyadékoknak* nevezzük (pl. levegő, víz, olajok). A továbbiakban a newtoni folyadékokra – ha csak erre vonatkozóan külön említést nem teszünk – egyszerűen folyadékokként hivatkozunk.

1.2.1 Viszkozitás

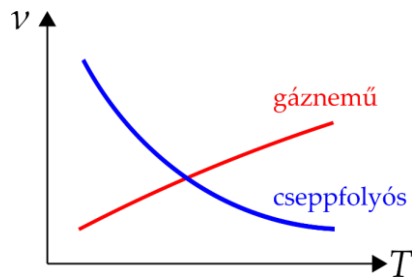
Vizsgáljuk meg, hogy mi az (1.3.) egyenletben szereplő μ dinamikai viszkozitás mértékegysége. Ez könnyen levezethető a következők szerint:

$$[\mu] = [\tau] \left[\frac{\partial y}{\partial v_x} \right] = \text{Pa} \frac{\text{m}}{\text{m/s}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}}{\text{m/s}} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2 \text{m}^2} \frac{\text{m}}{\text{m/s}} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \quad (1.4.)$$

A dinamikai viszkozitás helyett gyakran az úgynevezett kinematikai viszkozitást használjuk, melyet a következőképpen definiálunk:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (1.5.)$$

Érdeemes megvizsgálni hogyan változik a kinematikai viszkozitás a hőmérséklet függvényében gáznemű és cseppfolyós közegek esetén (1.4. ábra):



1.4. ábra. Kinematikai viszkozitás a hőmérséklet függvényében.

Megfigyelhető, hogy gáznemű közegek esetén a kinematikai viszkozitás közel lineárisan nő a hőmérséklet függvényében. Ennek oka, hogy gáznemű közegek esetén a viszkozitás a molekulák ütközéséből ered. Mivel a hőmérséklet növelésével egyre intenzívebbé válik a hőmozgás, egyre sűrűbben ütköznek a gázmolekulák, amely viszkozitásnövekedést eredményez. Szélsőséges esetben előfordulhat, hogy a hőmérséklet növekedéséből származó viszkozitásnövekedés (pl. égéslevegő előmelegítése) figyelmen kívül hagyása, az áramlástechnikai gép tönkremenetelét okozhatja.

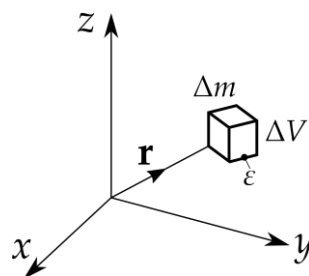
Éppen ellenkező trend figyelhető meg cseppfolyós közegek esetén. Ha ezen közegeket melegítjük a viszkozitásuk csökken. Ez abból eredeztethető, hogy a cseppfolyós közegek sűrűsége jellemzően nagyságrendekkel nagyobb a gázok sűrűségénél ($\rho_{\text{lev}} = 1,2 \text{ kg/m}^3 \gg \rho_{\text{viz}} = 1000 \text{ kg/m}^3$), vagyis cseppfolyós közegekben a molekulák közelebb helyezkednek el egymáshoz képest. Éppen ezért a viszkozitás a molekulák közötti vonzóerőből adódik. Ez a vonzóerő a hőmérséklet növeléséből származó intenzív hőmozgás következtében gyengül, amely a viszkozitás csökkenéséhez vezet. Ennek tipikus alkalmazási példája az olajozórendszerek, ahol a könnyebb keringtetés végett érdemes a közeget előmelegíteni.

1.3 Fizikai mennyiségek

Az áramlástan tárgyalása során elengedhetetlen, hogy bevezessünk bizonyos fizikai mennyiségeket. Ebben az alfejezetben összegyűjtöttük és részletezzük a leggyakrabban előfordulókat.

1.3.1 Sűrűség

Vegyünk fel egy vizsgálati koordináta-rendszert, és a folyadéktérből jelöljük ki egy kis folyadékdarabot, melynek legyen tömege és térfogata rendre Δm és ΔV (1.5. ábra).



1.5. ábra. Sűrűség.

Ezt követően kezdjük el zsugorítani ezt a megfigyelt folyadékdarabot, amíg egy elemi kis folyadékdarabot nem kapunk. Ezáltal egyfelől közelebb kerülünk a megértéshez, másfelől ezt az eljárást alkalmazzuk az ún. numerikus áramlástanban (Computational Fluid Dynamics = **CFD**). Ez egy olyan módszer, amelyben az áramlási teret elemi kis részekre osztjuk fel és ezekre a kis elemi részekre az áramlástan egyenleteinek közelítő megoldásával származtathatók a különböző fizikai mennyiségek (pl. sűrűség, sebesség, hőmérséklet, stb.). A sűrűség matematikai megfogalmazása:

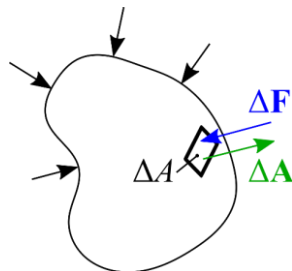
$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \varepsilon^3} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1.6.)$$

Hogy milyen mértékben zsugoríthatjuk a vizsgált térfogatot? Egyrészt legyen sokkal kisebb, mint az áramlási tér, hiszen ez teszi lehetővé, hogy kellően finom felbontással végezzük a számításainkat. Másrészt legyen sokkal nagyobb, mint a molekuláris méret, mivel ez esetben előfordulhat, hogy az egyik pillanatban lenne egy molekula a vizsgált térrészben viszont a másik pillanatban viszont már nem. A sűrűség ingadozna, amelyet mérnöki szempontból nem tekintünk relevánsnak. A sűrűség fontos jellemzője, hogy általában térben és időben is változó ($\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$). Matematikai szempontból a sűrűség egy skalármennyiség, vagyis egyetlen számmal jellemezhető, így egy skalártér írja le.

1.3.2 Nyomás

Képzletben jelöljük ki a folyadéktérben egy zárt térrészt, ezen belül pedig egy felületdarabot, melynek nagysága legyen ΔA (**1.6. ábra**). Vezessük be a felületelem-vektor fogalmát, melynek jelölése $\Delta \mathbf{A}$ és jellemzői a következők:

- nagysága megegyezik magának a felületnek a nagyságával: $|\Delta \mathbf{A}| = \Delta A$
- merőleges a vizsgált felületre,
- a zárt felület irányából mindig kifelé mutat.



1.6. ábra. Nyomás.

A tapasztalat az, hogy nyugvó, illetve súrlódásmentes folyadék esetén a környező folyadéktér által kifejtett erő párhuzamos a felületelem-vektorral, vagy másképp: a környező folyadéktér által kifejtett erő merőleges a felületre. Így a nyomás:

$$p = \lim_{\Delta V \rightarrow \varepsilon^3} \frac{|\Delta \mathbf{F}|}{|\Delta \mathbf{A}|} \quad (1.7.)$$

A nyomás a sűrűséghez hasonlóan szintén skalármennyiség ($p = p(\mathbf{r}, t)$), így skalártérrel írható le.

1.3.3 Sebesség

A sebesség egy vektormennyiség, amit az áramlástanon belül gyakran Descartes-féle koordináta-rendszerben jellemzünk, így három komponensével szokás foglalkozni:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (1.8.)$$

A sebesség mind térben és időben is változékony, mely az előző mennyiségekkel ellentétben matematikailag vektortér segítségével írható le.

1.4 Fizikai jellemzők térbeli változékonysága

Gyakorlati szempontból lényeges, hogy a különféle fizikai jellemzők térben változékonyak lehetnek. Gondoljuk csak bele, ha például egy folyadékdarab valamelyik irányba gyorsul, az azt jelenti, hogy erők hatnak rá. Többek között ilyen erő lehet a nyomásból származó erő, amihez szükséges, hogy a nyomás térben változékony legyen, a nyomásból származó erők ne egyenlítsék ki egymást. A következőkben röviden áttekintjük, hogyan lehet matematikailag kifejezni e térbeli változékonyságot.

1.4.1 Skalárjellemző

Vegyünk fel a folyadéktérben egy derékszögű koordináta-rendszert, legyen az \mathbf{r} helyvektorhoz tartozó pont nyomása p . Tegyük fel, hogy egy elemi kis $d\mathbf{r}$ szakasszal odébb egy dp nyomásváltozás figyelhető meg. Ebben az esetben ez a nyomásváltozás kifejezhető az alábbi módon:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \text{grad } p \cdot d\mathbf{r} \quad (1.9.)$$

ahol $\text{grad } p$ a folyadéktér nyomásgradiense.

1.4.2 Vektorjellemző

Egy folyadékdarab gyorsulása adódhat akár abból is, hogy egy vektorjellemző (pl. sebesség) változik az áramlási tér különböző pontjai között. Hasonlóképpen a skalárjellemzőkhöz, a vektorjellemzők térbeli változékonysága is meghatározható úgy, hogy képezzük az egyes vektorkomponensek gradiensét:

$$d\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \mathbf{D} d\mathbf{r} \quad (1.10.)$$

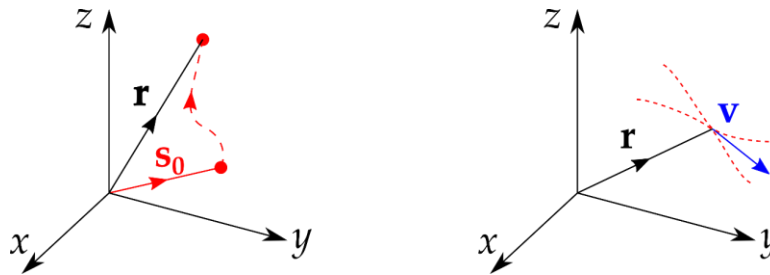
ahol \mathbf{D} a sebességtér deriválttenzora.

1.5 Folyadékmozgás leírása

A folyadékmozgás leírásának szempontjából alapvetően két fő szemléletet tudunk követni a pontos műszaki feladattól függően. Ezek az alábbiak:

1.5.1 Lagrange-féle

Ezt a módszert akkor alkalmazzuk, amikor valamilyen okból számít, illetve szükséges tudni, hogy egy adott folyadékdarab honnan jött, mi az előélete (1.7. ábra). A gyakorlatot tekintve ez a leírás előnyös, ha például egy atomerőmű esetén nukleáris katasztrófa következik be, és szeretnénk megvizsgálni, hogy a felszabaduló radioaktív szennyeződés az atmoszférában hogyan terjed tovább, hova fog eljutni. Ennek ismeretében akár tervezhetővé válik a környező települések evakuációja.



1.7. ábra. Folyadékmozgás leírása: Lagrange-féle (bal), Euler-féle (jobb).

Az áramlási jellemzőket, pl. sebességet a mechanikában megismert módon tudjuk származtatni ($\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$). A Lagrange-féle leírásmód jellegzetessége, hogy az idő (t) mindig megjelenik, mint független változó, nem tudjuk kiküszöbölni az áramlási egyenletekből, vagyis *mindig időfüggő*.

1.5.2 Euler-féle

Amennyiben a feladat jellegéből adódóan nem érdekes számunkra, hogy pontosan honnan jött, illetve, hogy hova fog tartani a vizsgált részecske, akkor az Euler-féle leírásmód használható. A módszer kizárólagos motivációja a tér egy adott pontjában a sebesség nagyságának és irányának meghatározása (1.7. ábra).

Ennek a leírásmódnak a legnagyobb előnye, hogy ha az áramlás *időben állandósult*, ún. *stacionárius* áramlás (nem függ az időtől), akkor a sebesség kifejezhető kizárólag a hely függvényében. Vagyis kiküszöbölhető az idő, mint változó, amely jelentős egyszerűsítésekhez vezet a mérnöki számításaink során. Ez matematikai szempontból a következőt jelenti (1.2. táblázat):

1.2. táblázat. Stacionárius és instacionárius áramlás.

Időben állandósult, stacionárius áramlás	Időfüggő, instacionárius áramlás
$\frac{\partial *}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial *}{\partial t} \neq 0$

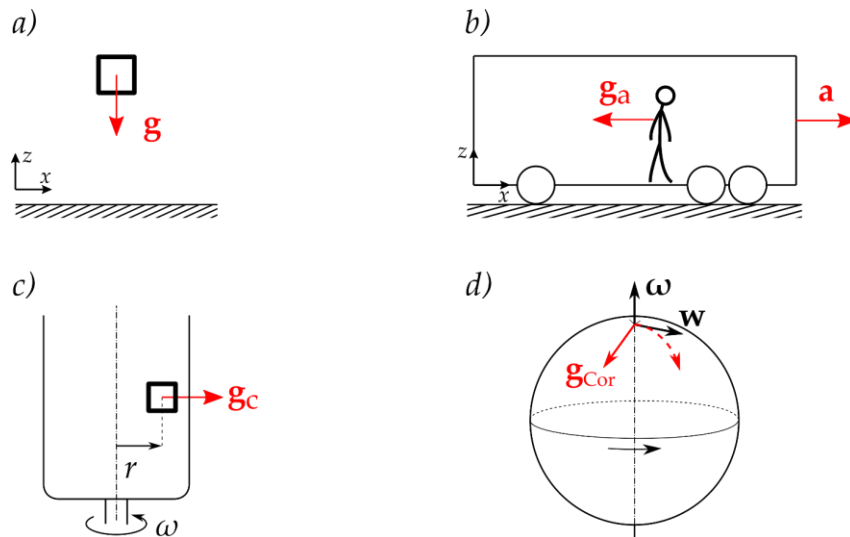
1.6 Erőterek

A folyadékok áramlása során fontos szerepet játszhatnak a rájuk ható erőterek. Ezek szintén vektortérként írhatók le, mivel a tér minden pontjában egy-egy térerősségvektor mutatja meg, hogy az erőteréből fakadóan mekkora erőhatás ér ott egy egységnyi tömegű folyadékreszt. A

térerősség mértékegysége [N/kg]. A következőkben olyan erőtereket, illetve azok folyadékra gyakorolt hatását vizsgáljuk meg, melyek tipikusan előfordulnak áramlástechnikai alkalmazásokban.

1.6.1 Nehézségi erőtér

Amennyiben a vizsgálati koordináta-rendszer megfelel az **1.8. ábrán** láthatóval, úgy a nehézségi erőtérből adódóan egy z-tengellyel párhuzamos, lefelé irányuló erő hat a folyadékra.



1.8. ábra. Erőterek: a) nehézségi b) tehetetlenségi c) centrifugális d) Coriolis.

Számszerűsíteni az erőtereket a *térerősséggel* tudjuk, ami nem más, mint az *egységnyi tömegű folyadékra ható erőtérből származó erő*. Ennek matematikai leírása nehézségi erőtér esetén:

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k} \quad (1.11.)$$

Ezt a köznyelvben gyakran nehézségi gyorsulásnak is nevezik, melynek m/s^2 a mértékegysége, azonban az áramlástan keretein belül – az ennek teljesen megfeleltethető – N/kg jobban illeszkedik a térerősség definíciójához, így a továbbiakban ezt alkalmazzuk. Ehhez kapcsolódóan vezessük be a potenciális erőtér fogalmát. Egy *erőtér potenciális*, ha a térerősségvektorhoz tudunk találni egy olyan U skalárjellemzőt melyre igaz, hogy:

$$\mathbf{g} = -\text{grad}U \quad (1.12.)$$

Ebben az esetben U -t az erőtér potenciálfüggvényének nevezzük. Vizsgáljuk meg a nehézségi erőtér potenciál függvényét (jelen esetben integrálás z szerint és szorzás -1 -gyel):

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \Leftrightarrow U = gz + \underbrace{K}_{=0} \Rightarrow U = gz \quad (1.13.)$$

A számítások során általában a potenciálok különbségével kell számolnunk, így az integrálási konstans önkényesen megválaszthatjuk $K = 0$ -ra.

1.6.2 Tehetetlenségi erőter

Képzeljünk el egy buszt, melyben görkorcsolyával a lábunkon állunk (**1.8. ábra**). Egészen addig, ameddig a busz egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, nem mozdulunk el egyik irányba sem. Ellenben, ha a busz a gyorsulással gyorsulni kezd, a busszal együtt mozgó rendszerben azt érzékeljük, hogy az a gyorsulással ellentétes irányú erőter hat:

$$\mathbf{g}_a = -\mathbf{a} = -a\mathbf{i} \quad \Leftrightarrow \quad U_a = ax \quad (1.14.)$$

Az előző két példa alapján belátható, hogy a potenciálfüggvény képzésénél a negatív előjelre azért szükséges, hogy abba az irányba növekedjen a potenciálfüggvény értéke, amerre a folyadék rész „nehezebben” tud haladni az erőterrel szemben. A nehézségi térerő esetén növekvő z -koordináta irányba kell legyőznünk a nehézségi erőteret (pl. lépcsőzés felfelé). A tehetetlenségi erőter esetén pedig az x -koordináta irányába nő a potenciál, hiszen abba az irányba „nehezebb” haladni (pl. gyorsuló buszon előre fele sétálás).

A tehetetlenségi erőter egyik műszaki életben előforduló példája az élelmiszeripari tejsomagolás, ahol a futószalagon érkező, még nyitott tejesdobozból a tej kilöttyenhet, amennyiben túl nagy a futószalag gyorsulása.

1.6.3 Centrifugális erőter

Megfigyelhető, hogy forgórendszer hatására (pl. ipari szupercentrifugák) a sűrűség különbség elvén egy keverék különféle komponensei szétválaszthatók. Ennek oka, hogy együtt forgó rendszerben megjelenik az ún. centrifugális erőter (**1.8. ábra**), amely minden egyes folyadék részt a sugármentén kifelé terel, ennek térerőssége:

$$\mathbf{g}_c = r\omega^2 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad \Leftrightarrow \quad U_c = -\frac{r^2\omega^2}{2} \quad (1.15.)$$

1.6.4 Coriolis-erőter

Most vegyünk egy olyan forgórendszert, amely esetén valamilyen folyadék-elmozdulás is történik. Erre kiváló példa maga a Föld bolygó. A Föld forog valamekkora ω szögsebességgel, továbbá tegyük fel, hogy az Északi-sark irányából megindul egy légáramlat az egyenlítő felé, ennek relatív sebességét jelölje \mathbf{w} . Külső kényszer híján a levegőrészecskék nem tudnak alkalmazkodni ahhoz, hogy távolodva forgástengelytől elvégezzék az egyre nagyobb és nagyobb kerületi sebességű forgást. Ebből kifolyólag azt tapasztaljuk, hogy a levegőrészecskék lemaradnak a Föld forgásához képest. Ez együtt forgó rendszerben úgy is szemlélhető, mintha egy olyan erőter lenne jelen, ami eltéríti a levegőrészecskéket. Ennek neve Coriolis-erőter, melynek térerőssége:

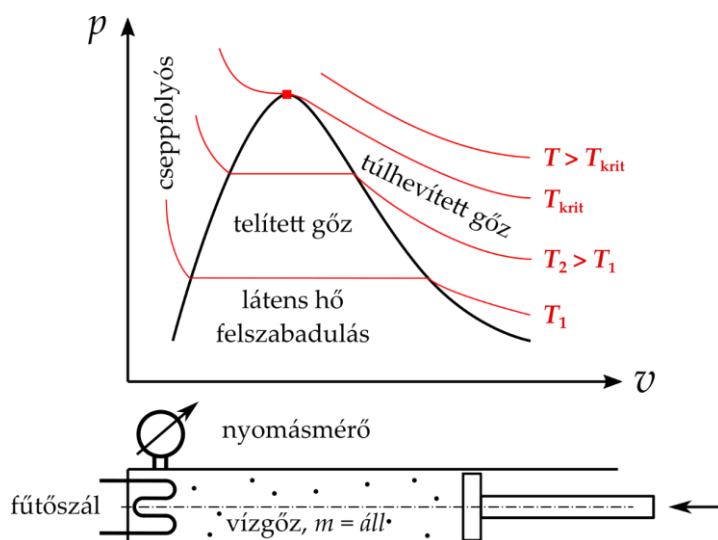
$$\overline{\mathbf{g}}_{\text{Cor}} = 2\mathbf{w} \times \boldsymbol{\omega} \quad (1.16.)$$

Ezzel az erőterrel nem csak a meteorológia foglalkozik, hanem gyakran kell számolnunk hatásával a különféle áramlástechnikai forgógépek esetén is (pl. szivattyúk, ventilátorok, turbinák, stb.). Ehhez az erőterhez nem található potenciálfüggvény, így az előzőkkel ellentétben ez *nem potenciálos erőter*. A számítások során ez nehézséget okoz más erőterek figyelembevételével szemben, azonban bizonyos esetekben kiküszöbölhető.

Ezzel szemben a potenciális erők egyik nagy előnye, hogy az áramlási számítások során a különféle erők hatása összegezhető úgy, hogy összeadjuk a potenciálfüggvényüket. Erre a későbbiekben példákat is fogunk látni.

1.7 Gáz, gőz, cseppfolyós közeg

A folyadékok lehetséges halmazállapotainak megértéséhez nézzük az **1.9. ábra** képeit. Az ábra alján egy munkahenger látható, melynek térfogata egy dugattyúval változtatható, hőmérséklete állandó értéken tartható egy hőcserélő segítségével, nyomását pedig egy nyomásmérő jelzi. A henger belsejében ismert tömegű vízgőz van. A vízgőz tömegének és a henger térfogatának ismeretében számítható a gőz sűrűsége, melynek reciproka a ν fajlagos térfogat.



1.9. ábra. Állapotváltozás hengerben.

Ha a dugattyút mozgatva a gőz fajlagos térfogatát lineárisan csökkentjük, és ennek függvényében a nyomásmérő által jelzett nyomást ábrázoljuk, akkor az **1.9. ábra** diagramján látható $T = \text{áll.}$ görbéket kapjuk. Azt tapasztaljuk, hogy a fajlagos térfogatot csökkentve a nyomás egy darabig növekszik, majd egy ponton a növekedést egy állandó érték váltja fel. Egyúttal vízcseppek jelennek meg a dugattyúban, a fajlagos térfogatot tovább csökkentve egyre nagyobb mennyiségben, miközben ún. látens hő szabadul fel. Míg nem az összes gőz cseppfolyóssá alakul. Ezután a víz további térfogatcsökkenést csak nagy nyomásnövekedéssel visel el, a görbék igen meredek lesznek, mivel a cseppfolyós közegek csak kis mértékben összenyomhatók.

A $T = \text{áll.}$ görbék tehát két helyen törnek meg, a gőz-cseppfolyós fázisátalakuláshoz tartozó legnagyobb, illetve legkisebb ν értéknél. Ha a különböző hőmérsékletre tartozó görbék töréspontjait összekötjük, egy határoló görbét kapunk, melynek van egy maximuma. Ezt a maximumot **kritikus pontnak** nevezzük. A kritikus ponthoz minden anyag esetén egy bizonyos ν_{krit} , p_{krit} , T_{krit} érték tartozik, melyek a közeg fontos jellemzői, táblázatból kinézhető adatok. Amennyiben $T \gg T_{\text{krit}}$ a közeget **gáznak** nevezzük. A határoló görbe alatt a közeg egyszerre van jelen cseppfolyós és gőz halmazállapotban, ahol a gőz telített. A határoló görbétől balra a közeg csak cseppfolyós, attól jobbra pedig gőz halmazállapotú. A kritikus

pontban a gőz halmazállapotú közeg egyből teljesen cseppfolyóssá válik, átmeneti szakasz és látens hő felszabadulása nélkül. T_{krit} feletti hőmérséklet esetén a gőz nem cseppfolyósítható. A $T = \text{áll.}$ görbék ez esetben egy izotermikus hiperbola írja le, azaz a diagram két tengelyének $p \cdot v$ szorzata állandó. Ennek megfelelően, viselkedését az ideális gázra vonatkozó gáztörvény írja le:

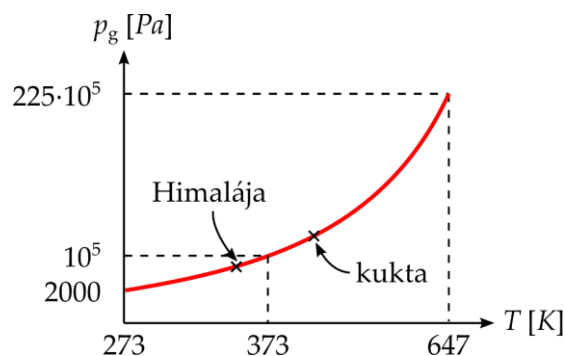
$$pv = \frac{p}{\rho} = RT \quad (1.17.)$$

ahol R a specifikus gázállandó. Értékét az R_u univerzális gázállandó és a közeg M moláris tömegének segítségével határozhatjuk meg:

$$R = \frac{R_u}{M} \quad (1.18.)$$

Az univerzális gázállandó értéke $R_u = 8,312 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$. A specifikus gázállandó értéke levegőre $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. A levegő kritikus hőmérséklete $T_{krit} = 132 \text{ K}$. Mivel a műszaki alkalmazásokban előforduló levegőközegek hőmérséklete jellemzően ennél jelentősen magasabb, a levegőt általában ideális gáznak tekinthetjük. Ezzel szemben a víz kritikus hőmérséklete $T_{krit} = 647 \text{ K}$, vagyis a műszaki alkalmazásoknak megfelelően a vízre általában nem tekinthetünk ideális gázként. Így cseppfolyós, vagy gőz közegként kell számításba vennünk.

Ahogy az **1.9. ábrán** láthattuk, a gőz-cseppfolyós fázisátalakulás egy adott p_g telítési gőznyomáson megy végbe minden hőmérsékleten. Ezt a telítési gőznyomást ábrázolja az **1.10. ábra** a hőmérséklet függvényében. A telítési gőznyomás görbéje, melyet **tenziógörbének** nevezünk, tehát azt ábrázolja, hogy adott hőmérsékleten mekkora nyomáson történik meg a cseppfolyós-gőz fázisátalakulás. Az ábrázolt görbe felett cseppfolyós, alatta gőz halmazállapotú a közeg. A víz forrásával, illetve lecsapódásával kapcsolatos tapasztalatainkat általában alacsony tengerszint feletti magasságon, kb. 10^5 Pa nyomáson szerezzük, így az általunk megszokott forráspont 373 K . Nem ez a helyzet, ha nagyobb tengerszint feletti magasságon, pl. a Himalájában szeretnénk vizet forralni, mivel ekkor az alacsonyabb légköri nyomás miatt már alacsonyabb hőmérsékleten megtörténik a fázisátalakulás. Szintén változik a víz forráspontja, ha főzés során kuktát alkalmazunk. Ekkor az edényben a légkörinél nagyobb nyomás jön létre, így a víz 373 K -nél magasabb hőmérsékleten is cseppfolyós állapotban maradhat.

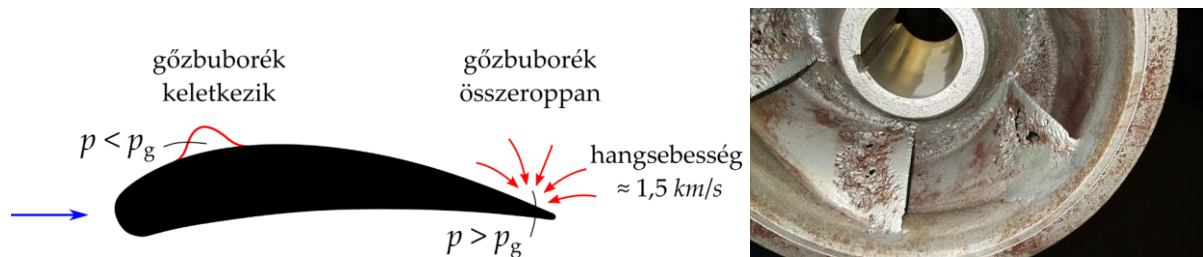


1.10. ábra. Víz tenziógörbéje.

A víz általában véve egy cseppfolyós közeg. Azonban az **1.10. ábra** szerint alacsonyabb hőmérsékleten is gőz halmazállapotúvá alakulhat, amennyiben nyomása jelentősen lecsökken a légköri nyomáshoz képest. Mint azt később látni fogjuk, a közegek áramlása (pl. a sebesség növekedése) akár jelentős nyomáscsökkenéssel járhat, amely műszaki szempontból komoly veszélyt jelenthet.

1.7.1 Kavitáció és elkerülése

Vegyük az **1.11. ábrán** bemutatott esetet, ahol egy lapátprofil keresztmetszetét láthatjuk cseppfolyós közeg áramlásában. Az áramló közeg a lapátprofilhoz érve kikerüli azt, és ennek hatására felgyorsul. A sebességnövekedés miatt a közeg nyomása az adott hőmérsékleten vett p_g gőznyomás alá lecsökken. Így fázisátalakulás történik, a cseppfolyós közegben gőz buborékok alakulnak ki. A kilépőélhez közeledve a sebesség lecsökken, ezért a környezeti nyomás újra a gőznyomás fölé növekszik. Ekkor a gőzbuborékok összeroppannak. Az összeroppanás során a buborékok környezetéből a cseppfolyós közeg hangsebességgel áramlik be, mely víz esetén mintegy $1,5 \text{ km/s}$. Ez a rendkívül nagy sebességű áramlás a lapátprofilnak ütközve akár a keményebb anyagokat, pl. acélt is kikezdeheti.



1.11. ábra. Kavitáció folyamata [2].

A fent leírt folyamat, melyet **kavitációnak** nevezünk, akár hajócsavarokat vagy szivattyú lapátokat is tönkre tehet. Rendkívül fontos ezért, hogy a kavitációt elkerüljük, a közeg nyomását mindig a p_g gőznyomás felett tartjuk. Ezt vagy magának a közeg nyomásának növelésével tudjuk elérni, vagy az áramlási sebesség csökkentésével mérsékelhetjük a nyomáscsökkenést. Szivattyúk esetén az előbbi lehetőséget például úgy valósíthatjuk meg, hogyha a szivattyút mélyebbre helyezük a szivattyúzott közegben. Utóbbit pedig a szivattyú fordulatszámának csökkentésével oldhatjuk meg.

1.3. táblázat. Kavitáció ellenintézkedései.

Közeg nyomásának növelése	Áramlási sebesség csökkentése
szivattyú mélyebbre helyezés	szivattyú fordulatszámának csökkentése

1.8 Az ideális folyadékmodell

A valóságos folyadékok áramlását jellemzően nem a valóságos folyadékok minden ismert tulajdonságát figyelembe véve írjuk le, hanem az ún. *ideális folyadék* segítségével. Az ideális folyadék a valóságosokhoz képest fontos egyszerűsítéseket tartalmaz, melyeket táblázatos formában foglalunk össze (1.4. táblázat).

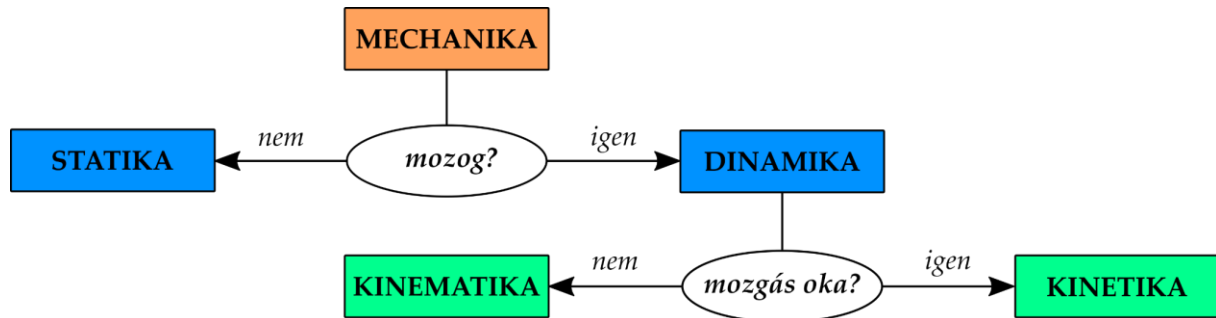
1.4. táblázat. Valóságos és ideális folyadékok.

	Valóságos folyadék	Ideális folyadék
Összenyomhatóság	összenyomható, $\rho \neq \text{áll}$	összenyomhatatlan, $\rho = \text{áll}$
Súrlódás	súrlódásos, $\mu \neq 0$	súrlódásmentes, $\mu = 0$
Anyagszerkezet	molekuláris	kontinuum

Az ideális folyadékmodellel járó egyszerűsítések a számításainkat is jelentősen egyszerűsítik. Ez sok esetben szükséges, hiszen a valóságos folyadék egyenleteinek megoldása a legegyszerűbb problémákra is sok időt vehet igénybe, még a legkorszerűbb számítógépeket használva is. Az egyszerűsítések természetesen elhanyagolásokkal járnak, így a számításaink pontossága is csökken. Ezért fontos tudni, hogy az elhanyagolásokkal mekkora hibát viszünk a számításokba, és az eredményeket ennek megfelelően kell kezelni. Első közelítésben ideális folyadékokkal foglalkozunk, azonban a későbbi fejezetekben a folyadék súrlódását, illetve összenyomhatóságát is figyelembe vesszük.

2 Áramlástan rendszerezése

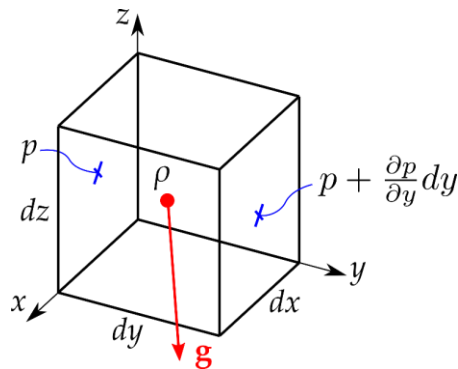
A jegyzet elején említettük, hogy a mechanika és az áramlástan szorosan kapcsolódik egymáshoz. Az áramlástan rendszerezésében is hasonló a mechanikához, melyet a **2.1. ábra** szemléltet. Ebben a fejezetben részletesen tárgyaljuk a diagramon szereplő egyes részterületeket.



2.1. ábra. Áramlástan rendszerezése.

2.1 Hidrosztatika

A hidrosztatika az áramlástanak az a része, ami nyugvó folyadékokkal foglalkozik ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$). Ha a sebesség minden időpillanatban zérus, akkor a csúsztatófeszültség is zérus a Newton-féle viszkozitási törvény értelmében, tehát a súrlódási erők elhanyagolhatók. Vizsgáljuk meg, hogyan alakul az erőegyensúly a folyadék egy elemi kis részére (**2.2. ábra**).



2.2. ábra. A folyadék egy elemi kis részén kialakuló erőegyensúly.

Írjuk fel az elemi kis folyadékrészre ható nyomásból és térerősségből származó y -irányú erőket:

$$p dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz + g_y dx dy dz \rho = 0$$

Az első $p dx dz$ tag pozitív és negatív előjellel is szerepel az egyenlet bal oldalán, így ezzel egyszerűsíthetünk. Valamint a megmaradó két kifejezésben pedig $dx dy dz$ szorzóként szerepel, így ezzel leoszthatunk. A megmaradt kifejezés tehát:

$$g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

A vizsgálatot x és z irányban is elvégezve hasonló egyenleteket kapunk. A három komponensegyenletet vektor formában írhatjuk fel egyetlen egyenletként:

$$\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0 \quad (2.1.)$$

Ez a *hidrosztatika alapegyenlete* differenciál alakban. A hidrosztatika alapegyenlete tehát megmutatja a kapcsolatot az erők hatása és a nyomásváltozás között, melyeknek nyugvó folyadék esetén meg kell egyezniük.

A hidrosztatika alapegyenletét bizonyos körülmények esetén tovább egyszerűsíthetjük. Egyrészt, ha a közeg ρ sűrűsége állandó, akkor értéke deriváláskor konstansként jelenik meg, így bevihető a gradiensen belülre. Másrészt, ha a folyadékra ható erők potenciálosok, akkor az erők tárgyalásánál látottaknak megfelelően felírhatók a potenciálfüggvényük gradienseként $\mathbf{g} = \text{grad } U$. Ezeket felhasználva, a (2.1) egyenletet -1 -gyel leosztva, valamint a két tag deriválását egyszerre elvégezve írható:

$$\text{grad} \left(U + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

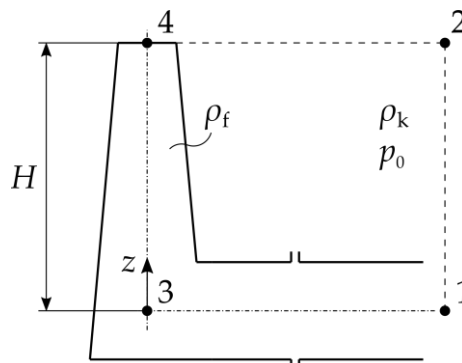
Egy mennyiség deriváltja csak akkor lehet 0, ha a derivált mennyiség állandó. Így írható:

$$U + \frac{p}{\rho} = \text{áll.} \quad (2.2.)$$

Ez a *hidrosztatika egyszerűsített alapegyenlete*, melyet tehát *állandó sűrűségű folyadék és potenciálos erők* esetén kapunk. A hidrosztatika egyszerűsített alapegyenlete két vizsgálati pont között írható fel, melyeknél a (2.2) egyenlet bal oldalán lévő mennyiségek összegének meg kell egyeznie. A különféle gyakorlati példák megoldására ezen egyszerűsített alakot fogjuk használni.

2.1.1 Kémény statikus huzata

Nézzünk egy példát a hidrosztatika alapegyenletének alkalmazására! A **2.3. ábrán** egy kémény látható, melynek magassága H . Határozzuk meg a nyomáskülönbséget a talaj magasságában a kémény külső és belső oldalán a hőmérséklet függvényében! Ehhez a kéményben áramló füstgázt egy pillanatra megállítjuk (a közeget mindenhol nyugvónak feltételezzük).



2.3. ábra. Kémény statikus huzata.

A hidrosztatika egyszerűsített alapegyenletének alkalmazásához vizsgálati pontokat szükséges választanunk. Vegyünk fel négy vizsgálati pontot. Az 1 és 2 pontokat vegyük fel a

kéményen kívül, a talaj, illetve a kémény felső pontjának magasságában. A 3 és 4 pontokat a kéményen belül vegyük fel, szintén a talaj, illetve a kémény felső pontjának magasságában. A kérdés az 1 és 3 pont közötti nyomáskülönbség, ám ezek közé a pontok közé a hidrosztatika egyszerűsített alapegyenlete nem írható fel, mivel a két pont között nem állandó a sűrűség. Az egyenletet az 1 és 2, illetve a 3 és 4 pontok közé tudjuk felírni, ahol mind a füstgáz ρ_f , mind a környezet ρ_k sűrűségét állandónak feltételezzük:

$$\frac{p_1}{\rho_k} = \frac{p_2}{\rho_k} + gH \qquad \frac{p_3}{\rho_f} = \frac{p_4}{\rho_f} + gH$$

A 2 és 4 pont nyomása megegyezik, mivel a füstgáz nem áramlik a két pont között. Ezért a fenti egyenletekből p_2 -t és p_4 -et kifejezve írhatjuk:

$$p_1 - \rho_k gH = p_3 - \rho_k gH$$

Ezt átrendezhetjük a keresett nyomáskülönbségre:

$$\Delta p = p_1 - p_3 = gH(\rho_k - \rho_f) = \rho_k gH \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_k}\right)$$

A sűrűséget az ideális gázra vonatkozó gáztörvény segítségével számíthatjuk ki:

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

Felmerül a kérdés, hogy a sűrűség meghatározásánál milyen nyomással számoljunk. A sűrűséget állandónak vettük a kéményen belül, illetve kívül, a nyomás viszont változik a magasság függvényében. Mivel a légköri nyomáshoz képest ez a változás igen kicsiny, több nagyságrenddel kisebb, így ezt a változást elhanyagolhatjuk. A közeg abszolút nyomása közelítőleg megegyezik a légköri nyomással, $p_k \approx p_f \approx p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. A továbbiakban a sűrűség meghatározásánál számolhatunk a légköri nyomással. Nagy légfeszültség alkalmazása esetén az égésénél a füstgáz specifikus gázállandója azonosnak vehető a környezeti levegőével, $R_k \approx R_f = R$. A fentieket behelyettesítve a keresett nyomáskülönbség összefüggésébe kapjuk:

$$\Delta p = \frac{p_0}{RT_k} gH \left(1 - \frac{\frac{p_0}{RT_f}}{\frac{p_0}{RT_k}}\right) = \frac{p_0}{RT_k} gH \left(1 - \frac{T_k}{T_f}\right)$$

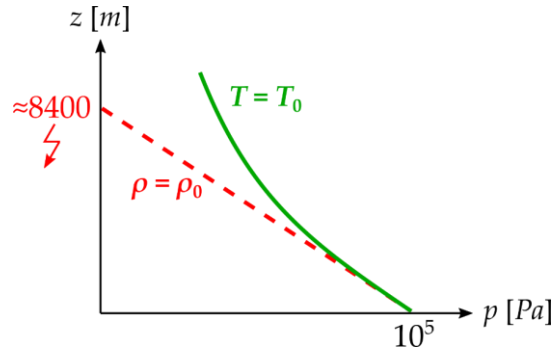
Ez tehát a talajmagasságban, a kémény külső és belső oldalán kialakuló nyomáskülönbség a hőmérséklet függvényében. Az összefüggésből látható, hogy minél nagyobb a füstgáz T_f hőmérséklete, annál nagyobb depresszió jön létre a kémény alján.

2.1.2 Atmoszféra modellek

Az iménti példában azzal a feltételezéssel éltünk, hogy a sűrűség a magasság függvényében állandó. Ez a feltételezés kis tengerszintfeletti magasságok esetén kis hibát okoz, ezért a mérnöki gyakorlatban gyakran élhetünk vele. Viszont nagyobb tengerszint feletti magasságokra alkalmazva a hiba már jelentős lehet. Az International Standard Atmosphere (ISA) szabványosított modell alapján 0 m tengerszint feletti magasságon és 288 K hőmérsékleten a levegő nyomása 101325 Pa. Így a levegő sűrűsége:

$$\rho = \frac{p}{RT} = 1,226 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Amennyiben a levegő sűrűségét állandónak vesszük, és a hidrosztatika alapegyenlete szerint meghatározzuk a nyomáseloszlást a z tengerszint feletti magasság szerint, akkor azt kapjuk, hogy kb. 8400 m -en a légnyomás 0 Pa -ra csökken (ld. **2.4. ábra**). Ez nyilvánvalóan nem igaz, ezért a modell finomítására van szükség.



2.4. ábra. Állandó sűrűségű és izotermikus atmoszféra modellek.

A légkör nyomáseloszlásának pontosabb meghatározását kapjuk, ha nem a ρ_0 sűrűséget, hanem a T_0 hőmérsékletet vesszük állandónak. Ez szintén elhanyagolást jelent, mivel az ISA modell szerint a légkör hőmérséklete kilométerenként 6,5 K -t csökken. A feltételezés a nyomás szempontjából mégis igen jó közelítést ad. Ekkor a hidrosztatika alapegyenletének a differenciál alakját kell használnunk a változó sűrűség miatt:

$$\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0$$

A nyomásváltozás x és y irányba zérus, ezért a vektoregyenletnek elegendő a z koordinátáját vizsgálnunk:

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = 0$$

Ez p -re nézve egy elsőrendű közönséges differenciálegyenlet. ρ helyére behelyettesíthetjük az ideális gáztörvényből kapott összefüggést, majd átrendezzük az egyenletet:

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT_0}$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet, így megoldhatjuk szétválasztás után integrálással:

$$\int_{p_0}^p \frac{1}{p} dp = -\frac{g}{RT_0} \int_0^z dz \Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{g}{RT_0} z$$

Ezt p -re kifejezve a következő összefüggést kapjuk:

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{g}{RT_0} z}$$

Az így kapott nyomáseloszlás görbéjét a **2.4. ábra** mutatja zöld színnel kiemelve. Amennyiben a nyomáseloszlásra ennél pontosabban van szükségünk, olyan modellekkel is számolhatunk, amely a légkör hőmérsékleteloszlását, illetve egyéb tényezőket (pl. páratartalom) is figyelembe veszik.

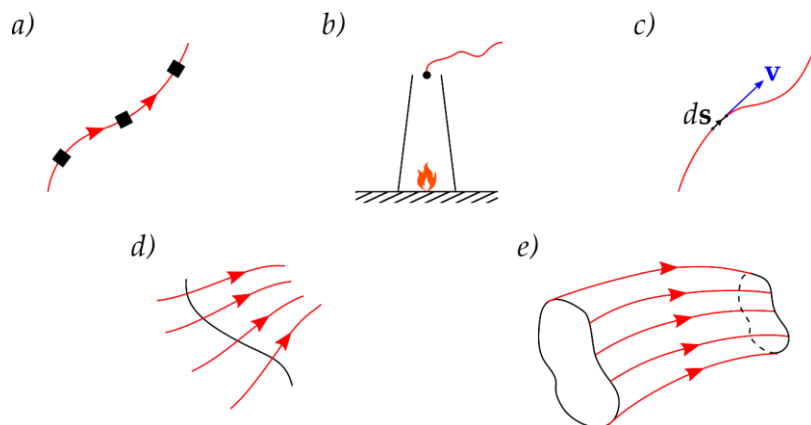
2.2 Kinematika

A hidrosztatikában nyugvó folyadékokkal foglalkoztunk, a vizsgált koordináta-rendszerben a folyadék sebessége zérus volt. Az áramlástan problémák többségében viszont nem tudunk olyan koordináta-rendszert találni, melyben a folyadék sebessége zérus. Az ilyen esetekben hidrodinamikai feladattal állunk szemben. Ahogy a 2. fejezet elején láttuk, a hidrodinamika két részre osztható aszerint, hogy csupán magát a mozgást vizsgálja, vagy az azt kiváltó okokkal is foglalkozik. Előbbi esetben beszélünk kinematikáról, mellyel ebben az alfejezetben foglalkozunk.

2.2.1 A folyadékmozgás szemléltetése

A folyadékmozgás szemléltetéséhez szükséges bevezetni néhány alapdefiníciót (2.5. ábra):

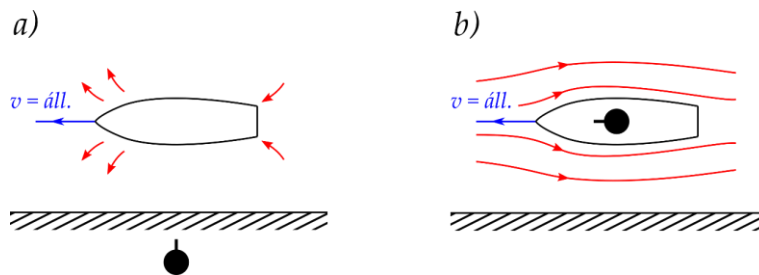
- Pálya:** kiszemelt folyadék rész időben egymás után elfoglalt helyeit összekötő görbe.
- Nyomvonal:** a tér adott pontján áthaladó folyadék részeket összekötő görbe.
- Áramvonal:** minden pontjában érinti a helyi sebességvektort.
- Áramfelület:** az adott görbére illeszkedő áramvonalak összessége. Az áramfelületen keresztül nincs átáramlás.
- Áramcső:** zárt görbére illeszkedő áramfelület.



2.5. ábra. Pálya (a), nyomvonal (b), áramvonal (c), áramfelület (d), és áramcső (e).

2.2.2 Áramlások időbeli változékonysága

Az áramlások további fontos tulajdonsága az időfüggésük. Az áramlások jellemzői mutathatnak időben állandó, illetve időben változó értéket. Előbbi esetben *stacionárius*, utóbbi esetben *instacionárius* áramlásról beszélünk. Az áramlások időfüggése mindig csak egy adott koordináta-rendszerben értelmezhető. Ez fontos, mivel bizonyos esetekben a koordináta-rendszer alkalmas megválasztásával mozgásban lévő folyadékokat is stacionárius módon tudunk leírni, ami jelentősen megkönnyítheti a probléma matematikai kezelését. Erre mutat egy példát a 2.6. ábra.



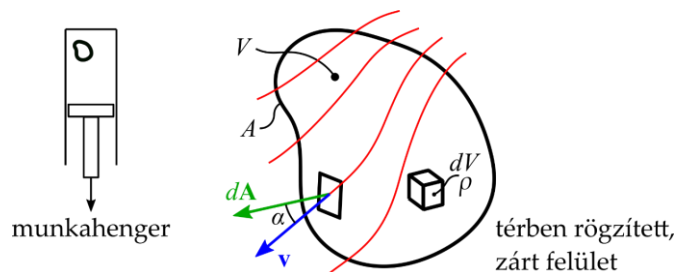
2.6. ábra. Instacionárius (a) és stacionárius (b) áramlás úszó hajó esetén.

Az *a*) esetben a koordináta-rendszert a parton álló megfigyelőhöz rögzítjük. Ebből a nézőpontból a víz áramlása mind térben, mind időben változik. Nézzük például az áramlás v sebességét. Ha a koordináta-rendszer bármely r pontjában vizsgáljuk a sebességet, időben változó értéket kapunk ($\mathbf{v}(r,t)$), tehát instacionárius áramlásról beszélünk.

A *b*) esetben rögzítjük a koordináta-rendszert a hajón utazó megfigyelőhöz. Ekkor a víz áramlása térben változik, időben viszont állandó. Ha az áramlás sebességét nézzük, melyet a mozgó koordináta-rendszerben \mathbf{w} -vel jelölünk, bármely r pontban mindig ugyanazt az értéket kapjuk. Például a hajó orránál mindig ugyanabba az irányba, ugyanakkora sebességgel áramlik a víz. Az áramlás jellemzői időben állandók, így stacionárius áramlásról beszélünk. A **stacionárius áramlások** fontos jellemzője, hogy a 2.2.1 fejezetben taglalt három vonal, **a pálya**, **a nyomvonal** és **az áramvonal egybeesnek**. Ez a tulajdonság rendkívül hasznos, ugyanis gyakran az áramlást jellemző sebességmezőre, azaz az áramvonalakra vagyunk kíváncsiak. Azonban kísérleti úton a pályát vagy a nyomvonalat egyszerűbben tudjuk szemléltetni.

2.2.3 A folytonosság (kontinuitás) tétele

Az anyagmegmaradás a fizika egyik alapvető tétele. Alkalmazása az áramlástanban is rendkívül fontos, és azt a tapasztalatot írja le, hogy egy megfigyelt áramlásban folyadék nem keletkezik, illetve nem tűnik el, hanem időben folytonosan létezik. Ezért nevezik ezt a folytonosság, vagy más szóval a kontinuitás tételének. Ennek az egyszerű, mégis nagyon fontos tételnek a matematikai leírásához nézzük a 2.7. ábrát. Az ábrán egy munkahengert látunk, melynek mozgó dugattyúja áramlást hoz létre a hengerben. Ebben az áramlásban definiálunk egy tetszőleges A zárt felületet, melyet térben rögzítünk.



2.7. ábra. Kontinuitás vizsgálata egy munkahengerben.

Vizsgáljuk az áramlást ennek az A zárt felületnek egy elemi kis részén, melyet a dA felületelem-vektorral írunk le. Az áramlás \mathbf{v} sebességgel áramlik keresztül a dA felületelemen. Határozzuk meg, hogy mennyi folyadék áramlik keresztül a felületelemen! Az időegység alatt átáramló folyadék térfogatát a következő módon határozhatjuk meg:

$$dq_v = \mathbf{v}d\mathbf{A} = |\mathbf{v}||d\mathbf{A}| \cos \alpha \quad (2.3.)$$

q_v skalárisszorzatként skalármennyiséget jelöl, és *térfogatáramnak* nevezzük. A térfogatáram dimenziója [m^3/s]. A folyadéknak nemcsak az időegység alatt átáramló térfogatát, hanem a tömegét is meghatározhatjuk a közeg ρ sűrűségének ismeretében:

$$dq_m = \rho \mathbf{v}d\mathbf{A} \quad (2.4.)$$

q_m szintén skalármennyiség, és *tömegáramnak* nevezzük. A tömegáram dimenziója [kg/s]. Az A zárt felület mentén végig haladva az elemi kis tömegáramok segítségével felírhatjuk az anyagmegmaradást:

$$\int_A \rho \mathbf{v}d\mathbf{A} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.5.)$$

Az egyenlet bal oldalán az A felületen vizsgált összes tömegáram szerepel. Mivel a felületelem-vektor definíciószerűen a felületből kifelé mutat, a *tömegáram kiáramlás* esetén lesz *pozitív*, *beáramlás* esetén pedig *negatív*. Amennyiben az összes tömegáram pozitív, akkor több folyadék hagyja el a vizsgált A felület által körülhatárolt térrészt, mint amennyi belép oda. Negatív összes tömegáram esetén a fordítottja igaz, azaz több folyadék lép be a térrészbe, mint amennyi ki. Mivel a vizsgált V térfogat rögzített, ezért ha a térfogatban található tömeg változik, akkor a sűrűségének is változnia kell. Ezt fejezi ki az egyenlet jobb oldala, ahol a ρ sűrűség időbeli változását integráljuk a vizsgált V térfogaton. Mivel pozitív összes tömegáram esetén a térfogatban lévő folyadék tömege, így sűrűsége is csökken, ezért szükséges egy negatív előjel a jobb oldal elé. Az egyenletet átrendezve kapjuk a *kontinuitás tétel integrál alakját*:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{v}d\mathbf{A} = 0 \quad (2.6.)$$

A felületi integrál tagot a matematikából ismert Gauss–Osztrogradszkij-tétel segítségével térfogati integrállá alakíthatjuk, így a bal oldal két integrál tagját összevonhatjuk:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad (2.7.)$$

Az összevont integrál kifejezés tehát egyenlő zérussal. Mivel a V térfogat tetszőlegesen választottuk meg, ezért minden térfogatrészre teljesülnie kell. Ez pedig csak akkor lehetséges, ha maga az integrálandó kifejezés is egyenlő zérussal. Így kapjuk a *kontinuitás tétel differenciál alakját*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.8.)$$

A kontinuitás tétel differenciál alakja – az integrálás elhagyása következtében – az áramlási tér egy-egy elemi kis térfogatára értelmezhető. A differenciál alakot használják a korszerű áramlástanban igen gyakran alkalmazott numerikus áramlástan szoftverek (CFD), melyekben az áramlási teret kis cellákra bontjuk, és azokra egyesével oldjuk meg a leíró egyenleteket.

Stacionárius áramlás esetén az idő szerinti derivált zérus. Így ebben az esetben a (2.8) egyenlet tovább egyszerűsödik:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.9.)$$

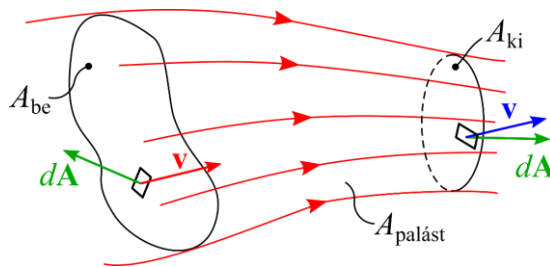
Azaz stacionárius áramlás esetén az összes tömegáram zérus, nincsen q_m tömegáramforrás. Cseppfolyós közeg esetén, illetve kis sebességű, állandó hőmérsékletű, légnemű áramlásokban gyakran élhetünk azzal az egyszerűsítéssel, hogy a sűrűséget állandónak vesszük. Ebben az esetben ρ a deriválásból kiemelhető, majd leoszthatunk vele, így a (2.8) egyenlet még egyszerűbb alakban írható fel:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (2.10.)$$

Vagyis állandó sűrűségű közeg esetén az összes térfogatáram zérus, nincsen az áramlásban q_v térfogatáram-forrás sem. A (2.10.) egyenlet mind stacionárius, mind instacionárius esetben igaz. A kontinuitás tétel igen fontos tétele az áramlástannak. Általában gyakorlati számításokban is egyszerűen használható, és minden körülmény között teljesül. Segítségével például meghatározhatjuk egy repülőgép hajtómű kompresszor fokozata után az áramlás sebességmezőjét, vagy egy kompresszor által szállított tömegáramot.

2.2.4 A kontinuitás tételének alkalmazása áramcsőre

Alkalmazzuk a kontinuitás tételét a 2.2 fejezet elején definiált áramcsőre! Ehhez vegyünk egy stacionárius áramlást, amelyben a 2.8. ábrán látható módon definiáljunk egy áramcsövet, amelyet az $A_{\text{palást}}$ felület jelöl, illetve az A_{be} és A_{ki} belépő-, illetve kilépő felületeket.



2.8. ábra. Áramvonalakból álló áramcső.

Írjuk fel ezekre a felületekre a kontinuitás tételt! Mivel az áramlásnak nem elemi kis részeit, hanem egy nagyobb felületét vizsgáljuk, a (2.6.) egyenletben bevezetett integrál alakot kell használnunk. Tekintve, hogy az áramlás stacionárius, az időfüggő tagot elhagyhatjuk, az integrálandó felületet pedig felbonthatjuk az általunk definiált részfelületekre:

$$\int_A \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_{A_{\text{be}}} \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} + \int_{A_{\text{ki}}} \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} + \int_{A_{\text{palást}}} \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = 0 \quad (2.11.)$$

Mivel az áramcső oldala áramfelület, ezért definíció szerint nincsen rajta átáramlás. Az $A_{\text{palást}}$ felületen keresztül áramló tömegáram zérus, így az egyenlet bal oldalán az utolsó tag szintén elhagyható. A skaláris szorzást és az integrálást elvégezve a bal oldal első két tagja felírható:

$$-\rho_{\text{be}} \bar{v}_{\text{be}\perp} A_{\text{be}} + \rho_{\text{ki}} \bar{v}_{\text{ki}\perp} A_{\text{ki}} = 0$$

ahol a \bar{v}_{\perp} az adott felületre merőleges, a felületen átlagolt sebességeket jelölik.

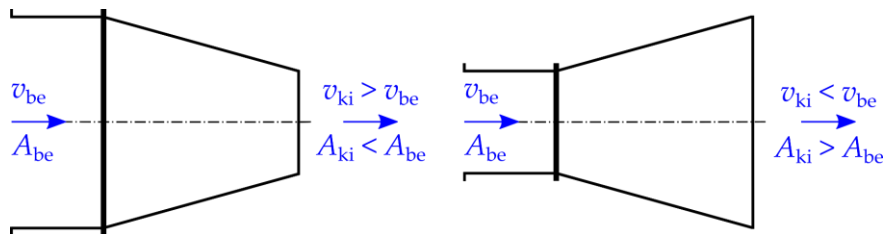
Az egyenletet átrendezve:

$$\rho_{be} \bar{v}_{be\perp} A_{be} = \rho_{ki} \bar{v}_{ki\perp} A_{ki} \Rightarrow q_{m,be} = q_{m,ki} \quad (2.12.)$$

Tehát a ki- és belépő tömegáram megegyezik egymással. Mivel a ki- és belépő keresztmetszeteket tetszőlegesen vettük fel, így elmondható, hogy stacionárius esetben az áramcső bármely keresztmetszetében a tömegáram azonos. Amennyiben a közeg sűrűsége állandó, a (2.12.) egyenlet tovább egyszerűsödik:

$$\bar{v}_{be\perp} A_{be} = \bar{v}_{ki\perp} A_{ki} \Rightarrow q_{v,be} = q_{v,ki} \quad (2.13.)$$

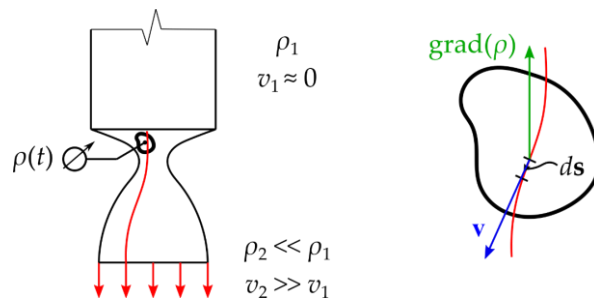
A (2.13.) egyenlet alkalmazására nyújt egy példát a **2.9. ábra**. Állandó sűrűség esetén a térfogatáram állandó, így az áramlás sebessége fordítottan arányos a keresztmetszettel. Konfúzor esetén a keresztmetszet csökken az áramlás irányába, így a sebesség növekszik. Diffúzor esetén pedig a keresztmetszet nő, így a sebesség csökken.



2.9. ábra. A kontinuitás tétele konfúzor (bal) és diffúzor (jobb) esetén.

2.2.5 Jellemzők lokális és konvektív megváltozása

A **2.10. ábra** egy rakétahajtóművet illusztrál. A hajtómű felső részében található a nyugvó üzemanyag, melyre nagy sűrűség jellemző. Az üzemanyag égése során a sűrűsége jelentősen lecsökken, a sebessége pedig megnő, létrehozva ezzel a hajtósugarat. A sugár sűrűségét mérjük az ábrán látható pontban. Kérdés, hogy hogyan határozhatjuk meg a sűrűségmezőt?



2.10. ábra. Sűrűségváltozás rakétahajtómű kiáramlásánál.

A hajtósugár időben változik, az áramlás instacionárius, ezért a sűrűség mind térben, mind időben változik, $\rho(\mathbf{r},t)$. A $d\rho$ változást ekkor az alábbi módon tudjuk leírni:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \text{grad}(\rho) ds$$

ahol dt az eltelt idő, ds pedig az áramlás irányába mutató vektor. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát dt -vel!

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad}(\rho) \frac{ds}{dt}$$

Mivel ds az áramlás irányába mutató vektor, ds/dt megegyezik a vizsgált pontban a \mathbf{v} sebességgel:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\text{grad}(\rho) \quad (2.14.)$$

A *teljes deriváltat*, tehát kettő tag összegeként írhatjuk fel. Az első tag a vizsgált jellemző idő szerinti deriváltja. Instacionárius áramlást vizsgálva ez a tag akkor is megváltozik, ha az áramlást folyamatosan ugyanazon a helyen vizsgáljuk. Ezért ezt a tagot *lokális megváltozásnak* nevezzük. Stacionárius áramlások esetén ez a tag zérus.

A második tag az áramlás sebességének és a vizsgált jellemző hely szerinti deriváltjának szorzata. Ez a tag azt a változást fejezi ki, hogy a közeg eltérő sűrűségű helyre áramlik. Ezért ezt a tagot *konvektív megváltozásnak* nevezzük. Konvektív megváltozás nemcsak instacionárius, hanem stacionárius esetben is felléphet. Például a vizsgált **2.10. ábrán** a fúvóka mentén stacionárius áramlás, azaz állandó hajtósugár esetén is változik a sűrűség, melyet ekkor egyedül a konvektív tag eredményez.

A fenti példában a sűrűség megváltozását vizsgáltuk, de a (2.14.) egyenletben bemutatott felbontás nem korlátozódik a sűrűségre. A teljes derivált lokális és konvektív tagra való felbontása bármely skalárjellemző esetén hasonló alakban tehető meg, ezért érdemes ezt alaposan elsajátítani.

2.2.6 Folyadék rész gyorsulása

Az előző alfejezetben skaláris jellemzők megváltozását írtuk fel. A sebesség viszont vektorjellemző. Ennek a megváltozása úgy írható le, hogy azt az 1.3.3. fejezetben látottakhoz hasonlóan skalárjellemzőkre bontjuk. A $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ sebességtér teljes deriváltja:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{grad}(v_x) \\ \text{grad}(v_y) \\ \text{grad}(v_z) \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (2.15.)$$

Melyben a gradienseket magában foglaló vektor a sebességtér deriválttenzora, így a (2.15.) egyenlet rövidebb alakban:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{D}\mathbf{v} \quad (2.16.)$$

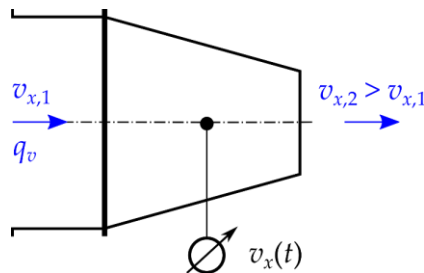
A sebesség teljes deriváltja, azaz a folyadék teljes gyorsulása, tehát szintén felírható egy idő- és egy hely szerinti derivált összegeként, melyeket az előzőekhez hasonló módon a folyadék lokális- és konvektív gyorsulásának nevezünk. A konvektív gyorsulás tagot matematikai átalakításokkal tovább bonthatjuk. Ezen jegyzetben az átalakításnak csak az eredményét közöljük, a teljes levezetésért további szakirodalmat ajánlunk az olvasó figyelmébe pl. [3]:

$$\mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{D}^T\mathbf{v} + (\mathbf{D} - \mathbf{D}^T)\mathbf{v} = \text{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \mathbf{v} \times \text{rot}(\mathbf{v}) \quad (2.17.)$$

A konvektív gyorsulásnak ez a felbontása a későbbiekben segítségünkre lesz. A gyorsulás Newton II. törvénye alapján az erővel arányos mennyiség, így ennek felírása átkalauzol minket a kinematikából a kinetika világába, mellyel a következő fejezetben foglalkozunk.

2.2.7 Áramlás konfúzorban

Nézzünk egy példát a folyadék lokális és konvektív gyorsulására! A 2.11. ábra a már korábban is látott konfúzort ábrázolja, melyben víz áramlik. A konfúzor egy adott pontján mérjük az áramlás $v(t)$ sebességét.



2.11. ábra. Folyadék rész gyorsulása konfúzorban.

Amennyiben a q_v térfogatáram változik, azaz instacionárius az áramlás, a rögzített mérőműszerről leolvasható sebesség is változni fog. Az itt leolvasható sebesség változása a folyadék lokális gyorsulásának következménye. Stacionárius esetben a műszerről leolvasható sebesség nem változik, a lokális gyorsulás zérus.

Emellett, a kontinuitás tételének következtében a sebesség a konfúzor keresztmetszetével fordítottan arányosan változik. Ha a műszert az áramlás irányába előre vagy hátra mozgatjuk, a leolvasható sebesség szintén változik. Ha a vizsgálatot állandó q_v térfogatáram mellett végezzük el, akkor a leolvasott sebesség változása csak a folyadék konvektív gyorsulásának következménye. Konvektív gyorsulás természetesen instacionárius áramlás esetén is fellép, ám ekkor a műszer mozgatásával kapott változó sebesség a lokális- és a konvektív gyorsulás együttes eredménye.

2.3 Kinetika

2.3.1 Euler-egyenlet

Ahogy a 2. fejezet elején láttuk, a kinematika mellett a hidrodinamika másik része a kinetika, amely a folyadék mozgását az azt kiváltó okokkal, a rájuk ható erőkkel együtt vizsgálja. Erőhatásokkal a hidrosztatika témakörében is foglalkoztunk már, és megállapítottuk, hogy a folyadékokra erőterekből, illetve nyomásból származó erők hathatnak. A hidrosztatikában a folyadékokra ható erők összege zérus volt, ezért a (2.1.) egyenlet jobb oldalán $\mathbf{0}$ szerepelt. Amennyiben a folyadékokra ható erők összege nem zérus, Newton II. törvénye értelmében az egyenlet jobb oldalán a folyadék gyorsulása szerepel. A (2.16.) és (2.17.) egyenletek behelyettesítésével:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \text{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (2.18.)$$

A (2.18.) egyenletet *Euler-egyenletnek*, vagy *mozgásegyenletnek* nevezzük, és Newton II. törvényének alkalmazását jelenti egy elemi folyadékrezsre. Az egyenlet tömegegységre vonatkozik, dimenziója $[N/kg]$. Hangsúlyozzuk, hogy vizsgálataink egyelőre ideális folyadékokra korlátozódnak, azaz súrlódásmentes áramlásokat vizsgálunk. A (2.18.) egyenletre is érvényes ez az egyszerűsítés, a súrlódásból származó erőket nem veszi figyelembe.

A mozgásegyenlet az áramlástan egyik legalapvetőbb egyenlete. A mozgásegyenlet megoldására épülnek a korszerű CFD szoftverek is. A legkorszerűbb szoftverek persze a súrlódás hatásával is számolnak, ám ez jelentősen megnöveli a számításidőt. Így sok esetben – amennyiben ez mérnöki szempontból elfogadható mértékű hibát vezet be a számításokba – a súrlódásmentes egyenleteket oldják meg. Amennyiben a vizsgált közeg sűrűsége állandó, a mozgásegyenletben négy ismeretlen van: a p nyomás és v_x, v_y, v_z sebességkomponensek. A (2.18.) egyenlet egy vektoregyenlet, mely három skalár egyenletet eredményez az x, y és z irányokban. A négy ismeretlen meghatározásához szükséges egy negyedik egyenlet is, melyet a kontinuitás tétel szolgáltat.

2.3.2 Bernoulli-egyenlet

Az Euler-egyenlet egy differenciálegyenlet, melyet számpéldák során sok esetben nem tudunk egyszerűen alkalmazni. Ezért szükséges egy olyan egyenlet, mellyel könnyebben tudunk számolni. Ehhez írjuk fel a (2.18.) egyenlet integrálját megfelelően kiválasztott 1-es és egy 2-es vizsgálati pontok közé! A két pont közötti utat a ds vonalelemek jelölik ki.

$$\underbrace{\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} ds}_{\text{I.}} + \underbrace{\int_1^2 \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) ds}_{\text{II.}} - \underbrace{\int_1^2 \mathbf{v} \times \text{rot}(\mathbf{v}) ds}_{\text{III.}} = \underbrace{\int_1^2 \mathbf{g} ds}_{\text{IV.}} - \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) ds}_{\text{V.}} \quad (2.19.)$$

A (2.19.) egyenletet *Bernoulli-egyenletnek* nevezzük, amely tehát az Euler-egyenlet vonalmenti integrálja. Az egyenlet egyes tagjait római számokkal jelöltük. Ezeket egyesével kezelve, matematikai átalakításokkal és fizikai megkötésekkel egyszerűsíthetjük. Vizsgáljuk meg a tagokat sorban!

Az **I. tag** egy idő szerinti derivált, ami stacionárius áramlás esetén zérus. Ha stacionárius áramlást vizsgálunk, az I. tagot elhagyhatjuk:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} ds = 0$$

A **II. tag** egy mennyiség térbeli deriváltjának térbeli integrálja. A matematikai műveleteket elvégezve az 1-es és 2-es pont béli behelyettesítési értékek különbségét kapjuk:

$$\int_1^2 \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) ds = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}$$

Mivel a $v^2/2$ egyenlő a fajlagos mozgási energiával, ezért a II. tag fizikai jelentése az egységnyi tömegre eső mozgási energia megváltozása. A **III. tag** egy összetett kifejezés, amelyet nehéz számítani, így arra törekszünk, hogy ha csak lehet ezt a tagot elhagyhassuk.

$$\int_1^2 \mathbf{v} \times \text{rot}(\mathbf{v}) ds = 0$$

Vegyük sorra, hogy milyen esetekben lehet ez a tag zérus:

- a) $\mathbf{v} = \mathbf{0}$: az egyik triviális megoldás, hogy ha a keresztszorzat egyik tagja $\mathbf{0}$, ám ekkor nincs mozgás, így *hidrosztatikai* példát kapunk vissza.
- b) $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$: a másik triviális megoldás, hogy ha a keresztszorzat másik tagja $\mathbf{0}$. Ekkor az áramlás *rotációmentes*, azaz az áramlásban a folyadék részek nem forognak. Létezik ilyen áramlás, ám ez egy szigorú megkötés, ami sok esetben nem teljesül. Ezért egy általánosabb feltétel szükséges.
- c) $\mathbf{v} \parallel \text{rot } \mathbf{v}$: ebben az esetben a sebesség és a rotációvektor párhuzamosak egymással. Ilyen áramlás alakulhat ki például egy lefolyóban, ahol a folyadék részek dugózúzószerű pályát írnak le. Ekkor mind a sebesség, mint a rotáció vektor lefelé mutat. Az ilyen áramlásokat *Beltrami áramlásnak* nevezzük. Műszaki alkalmazásban erre igen nehéz példát találni.
- d) $ds \parallel \text{rot } \mathbf{v}$: a vizsgált kifejezés akkor is $\mathbf{0}$ lesz, ha az integráláshoz használt ds vonalakat úgy választjuk meg, hogy a helyi rotáció vektor minden pontjában az érintője legyen. Az ilyen vonalat *örvényvonalnak* nevezzük. Ám az örvényvonalak általában nehezen azonosíthatók, így gyakorlati alkalmazásra szintén nem alkalmas.
- e) $ds \parallel \mathbf{v}$: a vizsgált kifejezést úgy is $\mathbf{0}$ -vá tehetjük, ha az integrálás ds vonalát úgy választjuk meg, hogy a helyi sebességvektor legyen minden pontjában a vonal érintője. A 2.2 fejezet elején leírtaknak megfelelően az ilyen vonalakat nevezzük *áramvonalaknak*. Tehát amennyiben a Bernoulli egyenletet egy áramvonal mentén írjuk fel, a III. tag értéke $\mathbf{0}$, ezért elhagyhatjuk. Az áramvonal menti integrálás feltételét jelentősen könnyebben teljesíthetjük, mint az a)-d) pontok feltételeit. Például egy csőáramlást vizsgálva a tapasztalatok alapján állíthatjuk, hogy a csővezeték tengelye áramvonal lesz. A gyakorlatban ezért a Bernoulli-egyenletet áramvonal mentén szokás felírni, így a számításaink jelentősen egyszerűsödnek.

A *IV. tag* az erőkerek folyadékra kifejtett hatását fejezi ki. Ha a folyadékra ható erőkerek potenciálosok, akkor az erőkerek tárgyalásánál látottaknak megfelelően felírhatók potenciálfüggvényük gradiensének segítségével. Ekkor, a II. taghoz hasonló módon egy térbeli deriválást és egy térbeli integrálást látunk, melyeket elvégezve az 1-es és 2-es pont béli behelyettesítési értékek különbségét kapjuk:

$$\int_1^2 \mathbf{g} ds = - \int_1^2 \text{grad}(U) ds = -[U_2 - U_1]$$

Nézzük az **V. tagot**. Ha a ρ sűrűség állandónak tekinthető az integrálási vonal mentén, akkor a deriválás szabályai szerint bevihető a gradiensen belülré. A műveletek elvégzése után:

$$-\int_1^2 \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) ds = -\int_1^2 \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) ds = -\left[\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right]$$

Ha a sűrűséget nem állandónak, hanem a nyomás függvényének tekintjük, akkor szintén egyszerűsíthető az V. tag:

$$-\int_1^2 \frac{1}{\rho(p)} \text{grad}(p) ds = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho(p)}$$

Mindazonáltal cseppfolyós közeg, vagy kis áramlási sebességű légnemű közeg esetén általában teljesül, hogy $\rho = \text{áll.}$, így élhetünk ezzel a kikötéssel. Az egyes tagok megvizsgálása után vegyük végig még egyszer, hogy milyen elhanyagolásokat, kikötéseket tettünk eddig:

- az áramlás súrlódásmentes,
- az áramlás stacionárius,
- az integrálást áramvonal mentén hajtjuk végre,
- a folyadékra ható erők potenciálisok,
- a folyadék sűrűsége állandó.

Amennyiben ezek a feltételek fennállnak, a (2.19.) egyenlet az alábbi módon egyszerűsödik:

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = -[U_2 - U_1] - \left[\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right] \Rightarrow \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + U_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + U_2$$

Mivel nem tettünk kikötést arra vonatkozóan, hogy az áramvonal mentén hol helyezkedik el az 1-es és a 2-es pont, ezért az összefüggésnek bármely két pontra igaznak kell lennie. Vagyis:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U = \text{áll.} \quad (2.20.)$$

Ez a **Bernoulli-egyenlet egyszerűsített alakja**. A bal oldalon lévő három tag összege tehát állandó. Az első tag a folyadék nyomásából, a második tag a folyadék mozgásából, a harmadik pedig a folyadék helyzetéből származó, egységnyi tömegre vonatkozó energiát fejezi ki. A három tag összege a folyadék teljes energiáját adja meg, amely a (2.20.) egyenlet alapján állandó, így a Bernoulli-egyenlet egyszerűsített alakja az **energiamegmaradást** fejezi ki. Az egyenlet bal oldalán lévő három tag összegét **Bernoulli-összegnek**, vagy **Bernoulli-entalpiának** nevezzük.

2.3.3 Repülőgép példája (X-15)

Alkalmazzuk az egyszerűsített Bernoulli-egyenletet egy repülőgép példáján. Képzeld el, hogy egy repülőgép mozog egy bizonyos w_∞ utazási sebességgel. Szeretnénk stacionárius módon leírni az áramlást, ezért a repülőgéppel együtt mozgó rendszerben vizsgáljuk a jelenséget. Ennek következtében úgy tekinthető, mintha a nyugvó légtér részecskéi egy w_∞

relatív sebességgel mozognának a repülőgép felé. Távolságban a repülőgéptől, a nyugvó légtérben legyen a nyomás p_∞ , továbbá vegyünk fel egy áramvonalat a távoli pont és a repülőgép orrpontja között. Azt tapasztaljuk, hogy a repülőgép orrához érve a levegő felütközik azon, így kialakul egy ún. torlópont. A torlópontban a levegő sebessége zérus, vagyis a repülőgép orra megállítja az áramló közeget (2.12. ábra).



2.12. ábra. Bernoulli-egyenlet repülőgép példáján [4].

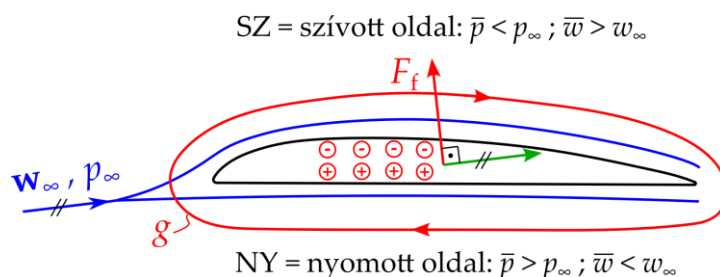
Amennyiben egy nyomásmérő-műszerrel mérnénk a nyomást, úgy a távoli pont nyomása az ún. **statikus nyomásnak** felelne meg (p_∞), ami nem más, mint a zavartalan áramlás nyomása. A torlópontban ugyanakkor egy torlóponthoz tartozó nyomás, vagy másnéven **össznyomás** (p_0) mérhető, ami pedig a megállított közeg nyomása.

E két pont közötti áramvonalon felírva a Bernoulli-egyenletet adódik, hogy:

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} w_\infty^2 = p_0 = \text{állandó} \quad (2.21.)$$

A bal oldal második tagját **dinamikus nyomásnak** nevezzük. Tehát a (2.21.) egyenlet alapján a statikus nyomás, illetve a dinamikus nyomás összege megegyezik az össznyomással, amely áramvonal mentén állandó. Ez megfeleltethető az energiamegmaradás törvényének.

A fentiekre építve, vizsgáljuk meg, hogyan működik egy repülőgép szárnya, avagy ezzel teljesen analóg módon egy áramlástechnikai forgógép lapátja. A szárny elsődleges célja, hogy felhajtóerőt – megfűvési sebességre merőleges irányú erőt – generáljon, ezzel a levegőben tartva a repülőgépet. A 2.13. ábrán látható egy repülőgép szárnymetszete. Ahogy érkezik a közeg w_∞ sebességgel (a „ ∞ ” index azt jelzi, hogy távol vagyunk a szárnytól, a szárny előre hatása már nem érvényesül). Vagyis zavartalan áramlást feltételezünk, ahol legyen helyileg a statikus nyomás p_∞ .



2.13. ábra. Szárnymetszet működése.

Hogyan tud felhajtóerőt előállítani a szárny? Logikus, hogy a szárny felső oldalán valahogyan szívó hatás kellene megjelenjen, ennek megfelelő a szárnymetszet felső oldalát szívott oldalnak (SZ) nevezzük. Illetve éppen ellenkező hatást szeretnénk elérni a másik

oldalán: tehát a környezeti nyomáshoz képest legyen túlnyomás, ennek megfelelően ezt nyomott oldalnak (**NY**) hívjuk. A depresszió következtében a szívott oldalon az átlagos nyomás kisebb lesz, mint a zavartalan p_∞ nyomás. Ez a Bernoulli–egyenlet (gravitáció hatását elhanyagoljuk) értelmében azt fogja eredményezni, hogy a szívott oldalon az áramlási sebesség nagyobb átlagosan, mint a szárnytól távol érvényes w_∞ sebesség. Éppen ellentétes a helyzet a nyomott oldalon, vagyis itt az áramlási sebesség átlagosan kisebb, mint a w_∞ sebesség. Tehát a szívott oldalon fel kell gyorsítanunk, a nyomott oldalon pedig le kell lassítanunk a közeget.

Ehhez kapcsolódik egy nagyon fontos fogalom, a **cirkuláció** (Γ). Ami nem más, mint egy zárt görbe mentén vett vonalintegrálja a sebességnek:

$$\oint_g \mathbf{w} ds \equiv \Gamma \quad (2.22.)$$

A g -vel jelölt, óra járásával megegyező irányítottágú zárt görbe mentén vett vonalintegrál (**2.13. ábra**) pozitív lesz, hiszen a szívott oldalon – ahol a sebességvektor és g görbe irányítottága megegyezik (pozitív irány) – nagyobbak a sebességek, a nyomott oldalon (negatív irány) pedig kisebbek. Azaz, ha azt szeretnénk, hogy egy test körüli áramlás felhajtóerőt hozzon létre, akkor biztosítani kell, hogy a test körül a cirkuláció zérustól eltérő, pozitív számérték legyen. Ezt megfelelően megválasztott szárnyprofillal és megfúvási szöggel tudjuk elérni.

2.3.4 Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben

Vizsgáljunk meg egy autó karosszériája körül kialakuló nyomáseloszlást (**2.14. ábra**).



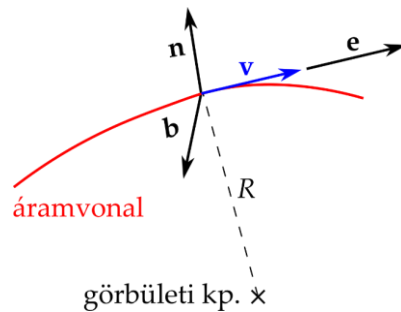
2.14. ábra. Autó karosszériáján kialakuló nyomáseloszlás [5].

Távol a karosszériától legyen p_0 a környezeti nyomás. A karosszéria elején helyileg túlnyomás jön létre, mivel megnövekedett nyomás szükséges ahhoz, hogy a levegő részecskéket ezen a görbült áramvonalon tartsa. Ennek gyakorlati jelentősége, hogy emiatt ezen a helyen szokás bevezetni a szellőzőlevegőt az utastérbe. A görbült áramvonalak következtében az autó tetején egy szívóhatás jelenik meg. Ennek kompenzálásra alkalmaznak az autó hátsó részén ún. spoilereket, melynek következtében túlnyomás alakul ki, ami igyekszik leszorítani az autó hátulját talajhoz. Hogyan lehet áramlástanilag igazolni a fenti kísérleti tapasztalatokat? Az Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben való felírásával, amely stacionárius esetben a térerők elhanyagolásával a következőképpen írható:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{Dv} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \Rightarrow \mathbf{Dv} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (2.23.)$$

Vegyünk fel egy speciális koordináta-rendszert (**2.15. ábra**) egy görbült áramvonal mentén. Mivel az áramvonal definíció szerint minden egyes pontjában érintőleges a

sebességvektorra, így ennek megfelelően tudunk értelmezni egy *érintő irányú egységvektort* (**e**). Továbbá görbült áramvonal révén fel tudunk venni egy adott ponthoz tartozóan egy görbületi sugarat (*R*) és egy hozzá tartozó görbületi középpontot. Ez a sugárirányú koordináta kijelöli az áramvonalra merőleges irányt, melyet a *normális irányú egységvektorral* jellemzünk (**n**). Még egy harmadik koordináta irányt is szükséges kijelölni, ezt a jobbkéz szabály alapján tehetjük meg, vagyis az érintő, illetve a normális irányú egységvektor vektoriális szorzataként állítható elő az ún. *binormális irányú egységvektor* (**b**). Ezen három vektor alkotja az ún. kísérő triédert, melyek kijelölik a továbbiakban alkalmazott természetes koordináta-rendszert. Írjuk fel az Euler-egyenletet ebben koordináta-rendszerben!

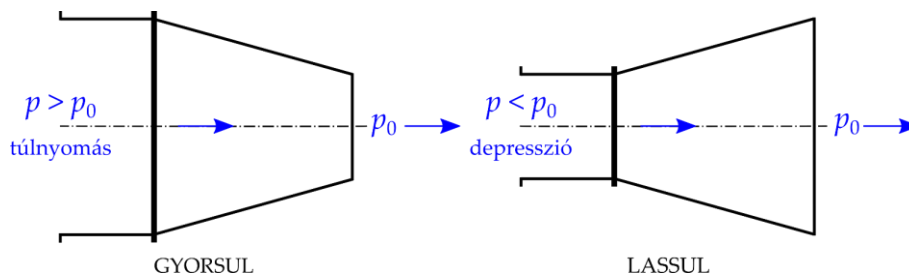


2.15. ábra. Áramvonal természetes koordináta-rendszerben.

Az érintő-irányú komponens:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial e} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial e} = -\rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial e} \quad (2.24.)$$

Vizsgáljuk meg a fenti szemléletben egy konfúzort, illetve egy diffúzort (2.16. ábra).



2.16. ábra. Áramlás konfúzoron (bal), diffúzoron (jobb) keresztül.

Konfúzor esetén az áramlás irányába gyorsulni fog a közeg, így a fenti egyenlet értelmében muszáj, hogy csökkenjen a közeg nyomása. Ennek következménye, hogy szabad kifúvás esetén a belépésnél túlnyomást kell biztosítani, hogy fenntartsuk az áramlást. Ezzel szemben a diffúzor lassítja a közeget az áramlás irányába, így a statikus nyomásnak növekednie kell. Ez fogja eredményezni, hogy szabad kifúvás esetén depresszió alakul ki a belépésnél, amely akár képes megszívni, és ezáltal "rásegíteni" az őt megelőző rendszerre.

Diffúzor esetén azonban fel kell hívni a figyelmet egy másik fontos jelenségre, mely a következő: a fal közeli folyadékrészeket nem csak az áramlás irányába növekvő statikus nyomás, hanem a fali súrlódás is fékezi. Ennek hatására a folyadékrészek hajlamosak lesznek megállni, sőt akár visszafelé áramolni! Erről a későbbiekben még bővebben lesz szó.

Most nézzük a normális-irányú komponenst! Fontos megjegyezni, hogy a centripetális gyorsulás következtében ebben az esetben is van a folyadékreszeknek gyorsulása:

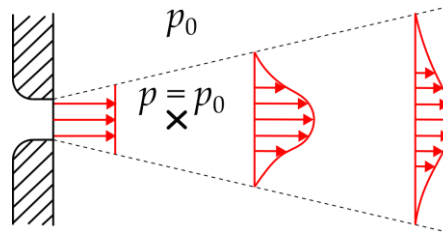
$$-\frac{v^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \Rightarrow \rho \frac{v^2}{R} = \frac{\partial p}{\partial n} \quad (2.25.)$$

Ebből az alábbi fontos megállapításokat tehetjük (2.1. táblázat):

2.1. táblázat. Euler-egyenlet normális-irányú komponense.

$R > 0: \frac{\partial p}{\partial n} > 0$	$R \rightarrow \infty: \frac{\partial p}{\partial n} \rightarrow 0$
Görbült áramvonalak mentén a görbületi középponttól távolodva a statikus nyomás nő	Párhuzamos áramvonalak esetén az áramvonalakra merőleges irányba a statikus nyomás nem változik

Utóbbi egyik további fontos következménye, hogy egy szabadsugár esetén, ahol jó közelítéssel párhuzamosak az áramvonalak, a szabadsugár belsejében a nyomás megegyezik a környezeti p_0 nyomással.

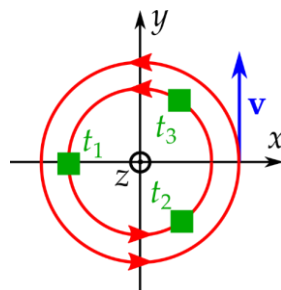


2.17. ábra. Szabadsugár.

A teljesség igényével a binomiális irányba nincs gyorsulás, így ebbe az irányba nem változik a statikus nyomás.

2.3.5 Potenciális („szabad”) örvény – pl. tornádó

Az előzőekben görbült áramvonalakról volt szó, a következőkben pedig ennek egy speciális esetét, az ún. potenciális örvényt tárgyaljuk. Sok esetben így modellezhetők a különféle örvényjelenségek, pl. a természetben előforduló tornádók, forgószelek, vagy a háztartási lefolyóknál kialakult áramlások, de ide tartozik a műszaki életben jelenlévő ciklonok is.



2.18. ábra. Potenciális örvény (pl. tornádó metszetei).

Vizsgáljuk meg az áramlási viszonyokat! Ehhez koncentrikus kör alakú áramvonalakat, továbbá síkáramlást feltételezünk. Utóbbi a következőt jelenti matematikailag:

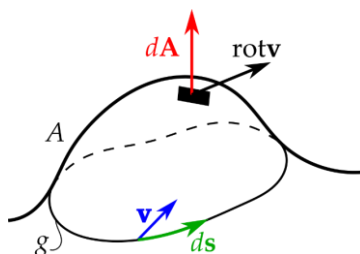
$$v_z = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

Vagyis bármelyik metszetben vizsgáljuk az áramképet, ugyanazt az áramlást látjuk. A görbült áramvonalak következtében a tornádó közepében (forgástengely) hatalmas depresszió van jelen, ez fejt ki a tornádó pusztító hatását. További fontos tapasztalat, hogy távolabb a forgástengelytől bár kör alakú áramvonalakon mozog a közeg, de az egyes a folyadékreszek nem fordulnak el (**2.18. ábra**), vagyis rotációmentes az áramlás:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega} = 0$$

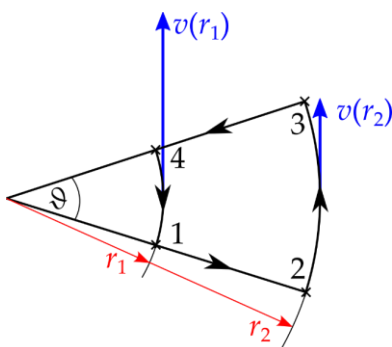
Nézzük meg a potenciális örvény sebességeloszlását, ehhez pedig elevenítsük fel a Stokes-tételt (**2.19. ábra**):

$$\int_A \text{rot } \mathbf{v} \, d\mathbf{A} = \oint_g \mathbf{v} \, ds \equiv \Gamma \quad (2.26.)$$



2.19. ábra. Stokes-tétel.

Képzeltében ragadjunk ki egy kis darabot az áramképből és nagyítsuk ki (**2.20. ábra**), majd alkalmazzuk a Stokes-tételt.



2.20. ábra. Szabad-örvény egy kis része.

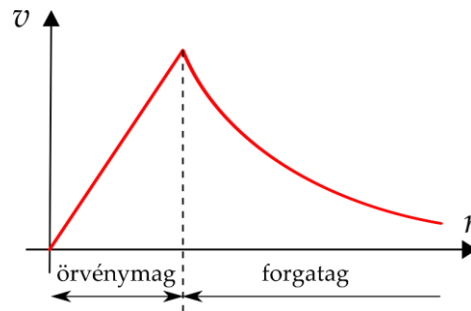
A rotációmentességből következik, hogy a (2.26.) egyenlet bal oldala zérus, melyből pedig az, hogy az egyenlet jobb oldala is zérus. Tehát az örvénymentesség cirkulációmentességet is fog jelenteni. Vagyis a **2.20. ábra** alapján a cirkuláció a következőképpen írható, felhasználva, hogy a sebességek konstansok az ívhossz mentén:

$$\Gamma = 0 = \int_1^2 \underline{\mathbf{v}} \, ds + \int_2^3 \mathbf{v} \, ds + \int_3^4 \underline{\mathbf{v}} \, ds + \int_4^1 \mathbf{v} \, ds = v(r_2)r_2\vartheta - v(r_1)r_1\vartheta = 0 \quad (2.27.)$$

Ebből adódik, hogy:

$$vr = \text{áll.} \Rightarrow v \sim \frac{1}{r} \quad (2.28.)$$

A (2.28.) egyenlet alapján belátható, hogy a potenciális örvénynek szingularitása van az origóba. Ez azt jelentené, hogy a sebesség ebben a pontban "elszál" végtelenbe. Azonban a természet ezt nem képes megvalósítani, így van egy határ ameddig az ún. forgatag (szabad-örvény) terjed. Ezen a határon belül, a forgástengely közelében kialakul egy örvénymag, amely merevtest-szerű forgással jellemezhető. Ezt a modellt *Rankine-féle örvénymodellnek* (2.21. ábra) nevezzük.



2.21. ábra. Rankine-féle örvénymodell.

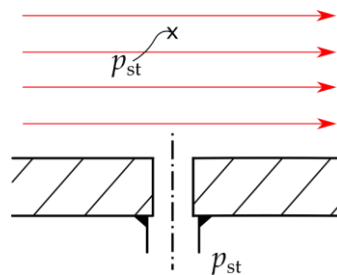
3 Áramlástan mérések

A műszaki életben fontos, hogy a különböző áramló folyadékok mennyiségét mérni tudjuk, hiszen gyakran ezekért a folyadékokért a felhasználónak fizetnie kell. Elegendő körbe nézni a háztartásban, ahol megtalálható a vízóra, gázóra vagy akár a villanyóra, bár ez utóbbi nem a klasszikus áramlástan tématerülete.

3.1 Nyomásmérés

3.1.1 Statikus nyomás

Definíció szerint a statikus nyomás a zavartalan közegben uralkodó nyomás. A kérdés az, hogy például egy belső, csőáramlás esetén (3.1. ábra) milyen úton tudjuk megzavarás nélkül megmérni a belső statikus nyomást.

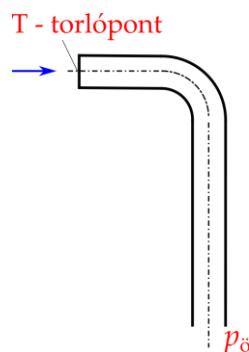


3.1. ábra. Zavartalan áramlás fal mellett.

Ha feltételezzük, hogy párhuzamos áramvonalak vannak jelen, akkor az Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben felírt, normális-irányú komponenséből következik, hogy az áramvonalakra merőlegesen nem változik a nyomás. Tehát az ábrán látható módon a belső p statikus nyomást ki tudjuk vezetni egy statikus *nyomásmegcsapolás* segítségével.

3.1.2 Össznyomás

Az össznyomás definíció szerint a megállított közeg nyomása, vagy másnéven a torlóponthi nyomás. Ebből kifolyólag ennek méréséhez meg kell állítani a közeget, melyre alkalmas az ún. Pitot-cső (3.2. ábra).



3.2. ábra. Pitot-cső.

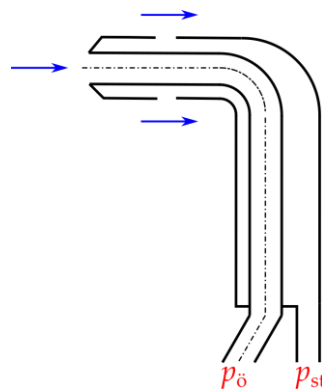
A *Pitot-csővet* behelyezve az áramlásba, az orrán egy torlóponthi alakul ki, és ennek megfelelően a helyi össznyomás kivezethető a cső végén.

3.1.3 Dinamikus nyomás

Ha ismert a statikus nyomás és az össznyomás is egy adott mérési pontban, akkor a Bernoulli-egyenlet alapján származtatható a dinamikus nyomás, abból pedig kifejezhető az áramlási sebesség az alábbiak szerint:

$$p_{\text{din}} = p_{\text{ö}} - p_{\text{st}} = \frac{\rho}{2} v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{\rho} p_{\text{din}}} \quad (3.1.)$$

A gyakorlatban a mérési pontban sokszor nem garantálhatók a párhuzamos, egyenes áramvonalak. Éppen ezért ilyen esetekre szükségesszerű vált kidolgozni egy olyan speciális mérőeszközt, amellyel helyileg megmérhető mind a statikus, mind az össznyomás, ezáltal pedig meghatározható a dinamikus nyomás. Ezt a speciális eszközt **Prandtl-csőnek** nevezzük (3.3. ábra), ami nem más, mint egy statikus nyomásmérő szondába ágyazott Pitot-cső. Ezzel a szabványban rögzített geometriájú mérőeszközzel a helyi áramlási sebesség akár néhány százalék pontossággal megmérhető.



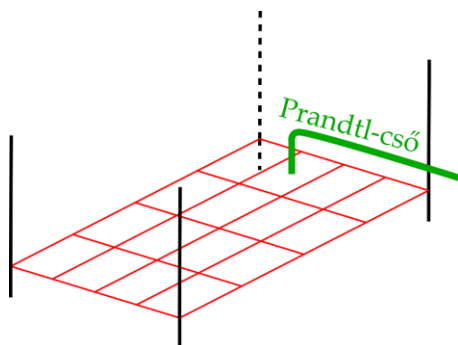
3.3. ábra. Prandtl-cső.

3.2 Térfogatárammérés

3.2.1 Sebességmérésre visszavezetett

Induljunk ki a térfogatáram definíciójából, ami a sebesség felületi integrálja. Ez a felületi integrál úgy közelíthető, hogy kiválasztunk egy mérés-technikai szempontból célszerű áramlási keresztmetszetet, mely legyen a domináns áramlási irányra merőleges. Ezután osszuk fel dA_i elemi területekre azt, és helyileg mérjük meg az egyes részterületek súlypontjában a merőleges $v_{i\perp}$ sebességkomponenst. E kettőt összeszorozva, majd összegezve a teljes felületen adódik a térfogatáram:

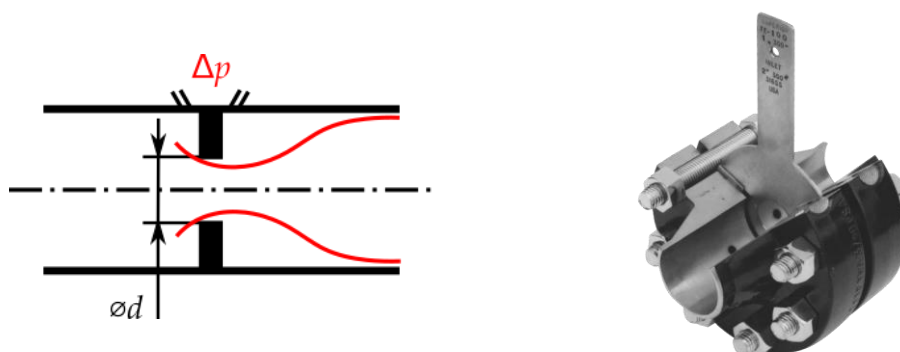
$$q_v = \int_A \mathbf{v} d\mathbf{A} \approx \sum_{i=1}^n v_{i\perp} \Delta A_i \quad (3.2.)$$



3.4. ábra. Térfogatáram mérés elemi felületeken vett sebességmérés segítségével.

3.2.2 Szűkítőelemes (pl. átfolyó mérőperem)

Ezen mérőeszköz elve a következő: az áramlásban szándékosan létrehozunk egy szűkületet, ezzel lecsökkentve az áramlási keresztmetszetet. A kontinuitás értelmében, így helyileg megnő az áramlási sebesség. Vagyis kialakítottunk két eltérő sebességű zónát, melyekhez a Bernoulli-egyenlet értelmében különböző nyomás értékek tartoznak. Ilyen módon, nyomáskülönbség mérés alapján mérhető a térfogatáram (**3.5. ábra**).



3.5. ábra. Átfolyómérőperem működése [5].

A térfogatáram ideális esetben (súrlódásmentes, összenyomhatatlan) kifejezhető, ha származtatjuk a sebességet a dinamikus nyomásnál leírtakkal analóg módon, és megszorozzuk a szűkület keresztmetszetével:

$$q_v = \alpha \varepsilon \frac{d^2 \pi}{4} \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p} \quad (3.3.)$$

A valóságban azonban gyakran nem ideális folyadékokkal találkozunk, így egyrészt figyelembe kell venni a folyadéksúrlódást, melynek hatására a folyadéksugár összehúzódik (nem képes kitölteni a teljes torokkeresztmetszetet). Ez az összehúzódás az α kontrakciós-tényezővel vehető figyelembe. Másrészt mivel a lecsökkent nyomás hatására változik a folyadék sűrűsége is, így nem tekinthető összenyomhatatlannak a közeg, ezt pedig az ún. ε expansziós-tényező jellemzi.

3.2.3 Módszerek összehasonlítása

Annak a kérdésnek a megválaszolásához, hogy melyik térfogatárammérési módszert mikor érdemes alkalmazni a **3.1. táblázat** nyújt segítséget.

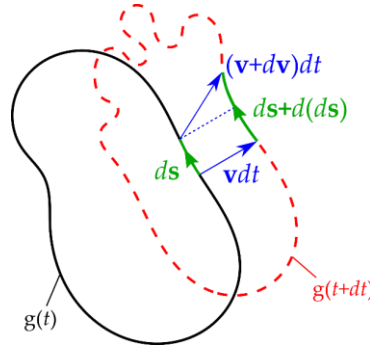
3.1. táblázat. *Térfogatárammérési módszer kiválasztási elvek.*

Sebességmérésre visszavezetett	Szűkítőelemes
eseti, becslő mérés	folyamatos, szavatolt (szabványos) pontosságú mérés
állapotfelmérés, hibadiagnosztika	elszámolási mérés, folyamatirányítás

4 Örvénytételek

4.1 Thomson (Lord Kelvin) - tétel

Képzünk egy folyékony, zárt vonalat. Ez változtathatja alakját és méretét egyaránt, de mindig ugyanazon "megfestett" folyadékreszekből áll (4.1. ábra).



4.1. ábra. Folyékony, zárt vonal.

William Thomson arra kereste a választ, hogy időben hogyan változik a folyékony, zárt vonal cirkulációja. Ennek matematikai megfogalmazása:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_g \mathbf{v} ds \quad (4.1.)$$

Először vizsgáljuk meg külön az integrálandó szorzat időbeli változását:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} ds) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} ds + \mathbf{v} \frac{d(ds)}{dt} \quad (4.2.)$$

A (4.2.) egyenlet jobb oldalának második tagja a \mathbf{v} sebesség és a ds vonalelemvektor időbeli megváltozása. Ez kifejezhető úgy, mint az vonalelemvektor alsó és felső végpontjainak elmozdulásának különbsége:

$$d(ds) = (\mathbf{v} + d\mathbf{v})dt - \mathbf{v}dt = d\mathbf{v}dt \Rightarrow \frac{d(ds)}{dt} = d\mathbf{v} \quad (4.3.)$$

A sebességvektor megváltozása a deriválttenzor segítségével kifejezhető:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{D}ds$$

Vagyis a (4.3.) egyenlet második tagja, az egyszerűség végett kétdimenziós esetben (síkáramlás), az alábbiak szerint írható:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}d\mathbf{v} &= \mathbf{v}\mathbf{D}ds = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \end{bmatrix} = v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) + v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) ds \end{aligned}$$

Ezzel a cirkuláció időbeli változása:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_g \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right] d\mathbf{s} \quad (4.4.)$$

Amennyiben feltételezzük, hogy az áramlás sűrűdésmentes, potenciális erőterek vannak jelen, valamint összenyomhatatlan a közeg ($\rho = \text{áll.}$), a folyadék rész mozgásegyenlete leírható az Euler-egyenlettel:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

Ezt felhasználva a (4.4.) egyenlet az alábbi alakra hozható:

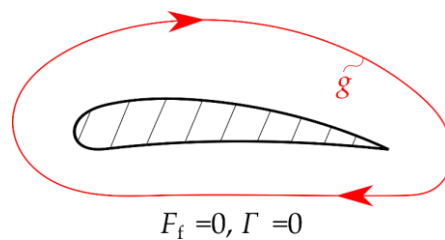
$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_g \left[-\text{grad } U - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right] d\mathbf{s} = 0 \quad (4.5.)$$

Mivel egy skalármennyiség gradienseinek tetszőleges zárt görbe mentén vett integrálja zérus, a Thomson-tétel azt mondja, ki, hogy **zárt, folyékony vonal mentén a cirkuláció időben nem változik**. Szem előtt tartva a Stokes-tételt, a következő fontos megfontolásokat tehetjük:

- a) Sűrűdésmentes áramlásban örvényesség nem keletkezhet, tehát a (fali) sűrűdés az egyik előfeltétele az örvényesség keletkezésének.
- b) Potenciális erőterek jelenléte nem generál örvényességet, de pl. a Coriolis-erőtér mindig örvényességet visz be az áramlásba (pl. atmoszférikus örvények).

4.1.1 Thomson-tétel gyakorlati alkalmazása: repülőterek biztonsági előírása

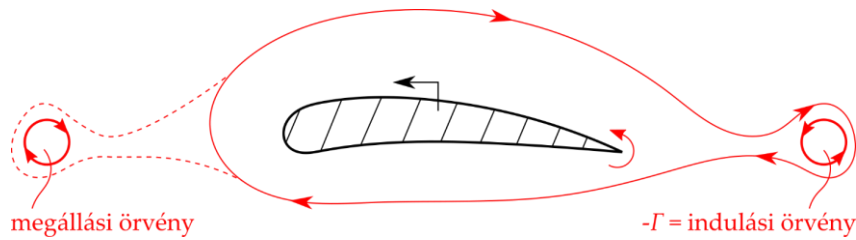
Nézzük a Thomson-tétel egyik gyakorlati megnyilvánulását a következő tapasztalaton keresztül: a repülőtereken megfigyelhető, hogy miután egy repülőgép felszáll, és elhagyta a kifutó pályát, el kell telnie bizonyos időnek, amíg a következő gép elindulhat. Vajon mi ennek az oka? A válaszhoz vegyünk fel zárt folyékony vonalat a repülőgép szárny metszete körül, amely szabadon deformálódhat (4.2. ábra).



4.2. ábra. Nyugvó szárny körüli zárt folyékony vonal.

Kezdetben, amikor a repülőgép még nyugalomban van, nincsen felhajtóerő, azaz a cirkuláció is zérus. Továbbá a Thomson-tétel értelmében a cirkulációnak zérusnak is kell maradnia. Azonban, ha a szárny mozgásba jön, rajta felhajtóerő, aminek értelmében – ahogy előző fejezetben már tárgyalásra került – egy pozitív Γ cirkuláció képződik. Ez a Thomson-tétel következtében csak abban az esetben lehetséges, ha egy megegyező nagyságú, de ellentétes előjelű cirkuláció keletkezik. Ez az ún. **indulási örvény**. Az ellentétes irányítottság fizikai tartalma az, hogy a szívott oldali depresszió és a nyomott oldali túlnyomás a szárny

végén (annak megszűnésével) kiegyenlítődik, és ennek megfelelően a nyomott oldal irányából egy a **4.3. ábrának** megfelelő megkerülő áramlás alakul ki.

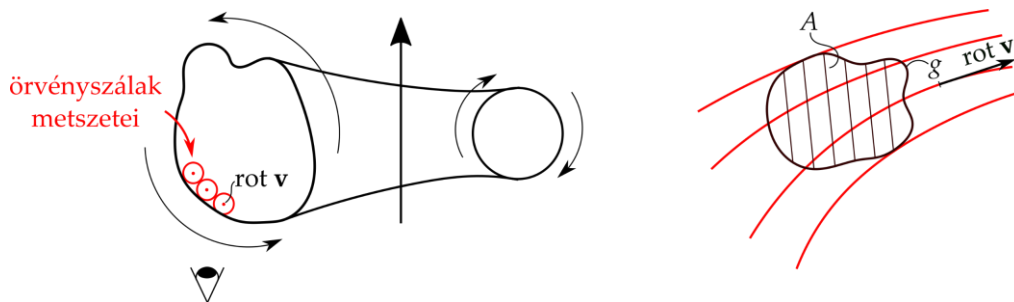


4.3. ábra. Indulási/megállási örvény kialakulása.

Az indulási örvény mindaddig fennmarad, amíg a Thomson-tétel feltevései érvényesek. Ennek megfelelően a valóságban a sűrűdés hatására az örvény időben eldisszipálódik, "felemésződik". Teljesen hasonló jelenség figyelhető meg leszálláskor, ahol a korábbi pozitív felhajtóerő, és ennek értelmében a cirkuláció, zérusra kell csökkenjen. A szárny elé legöngyölődik egy ún. *megállási örvény*, amely a szárny körüli cirkulációval azonos nagyságú és előjelű cirkulációval jellemezhető.

4.2 Helmholtz I. tétele

Vegyünk egy folyékony örvénycsövet (füstkarikát), amelyet egy örvényágyúval hozunk létre (**4.4. ábra**). Ezt megvalósítható például úgy, hogy erősen megütünk egy membránt, melyet egy zárt tér egyik végére feszítünk, a tér másik végén pedig egy éles peremű kifúvást alakítunk ki.



4.4. ábra. Füstkarika metszete (bal) és örvényfelület (jobb).

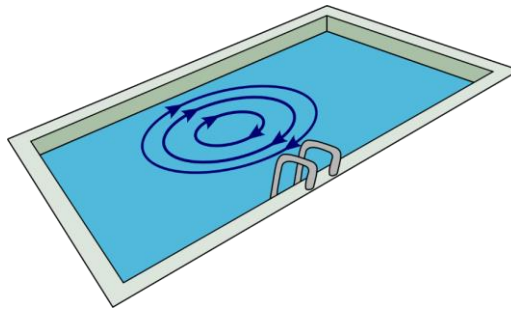
A füstkarikát alulról megfigyelve azt látjuk, hogy felülete ún. folyékony örvényvonalakból áll, amelyek minden pontjukban érintőlegesen a helyi $\text{rot } \mathbf{v}$ vektorra (**4.4. ábra**). Jelöljük ki továbbá egy A örvényfelületet darabkát, amely örvényvonalakból áll és a g zárt görbe határolja. Írjuk fel erre a rotáció felületi integrálját és alkalmazzuk a Stokes-tételt:

$$\int_A \underbrace{\text{rot } \mathbf{v}}_{\perp} d\mathbf{A} = 0 \quad \text{Stokes-tétel} \quad \oint_g \mathbf{v} ds = \Gamma = 0 \quad (4.6.)$$

Mivel a $\text{rot } \mathbf{v}$ vektorok mindenhol érintik a felületet, így a felületelem-vektorok merőlegesen lesznek arra, vagyis a felületi integrál értéke zérus. Ebből kifolyólag a (4.6.) egyenlet jobb oldalának is zérusnak kell lennie, tehát a cirkuláció is zérus, és a Thomson-tétel értelmében zérus is marad. Összefoglalva: *a folyékony örvényfelület megőrzi folyékony örvényfelület jellegét*. Hétköznapi példával élve a füstkarika megőrzi a füstöt, ameddig a Thomson-tétel esetén használt feltételezések érvényesek (sűrűdés!).

4.2.1 Helmholtz I. tételének gyakorlati alkalmazása: medence klórozása

Egy fürdőmedencében az üzemeltető azt tapasztalja, hogy a medence geometriája és frissvízbevezetés módjának következtében egy kiterjedt örvény alakul ki a medence közepén. Helmholtz I. tételének értelmében az örvény nemcsak kijutni nem engedi vizet, hanem a környezetéből beengedni sem hagyja azt. Ebből fakadóan a vízminőség megőrzése érdekében bejuttatott klór nem képes a medence közepébe behatolni. Mire a medence közepében is megfelelő koncentrációjú lesz a klór, a széleken már meghaladja az a megengedett koncentráció mértékét.

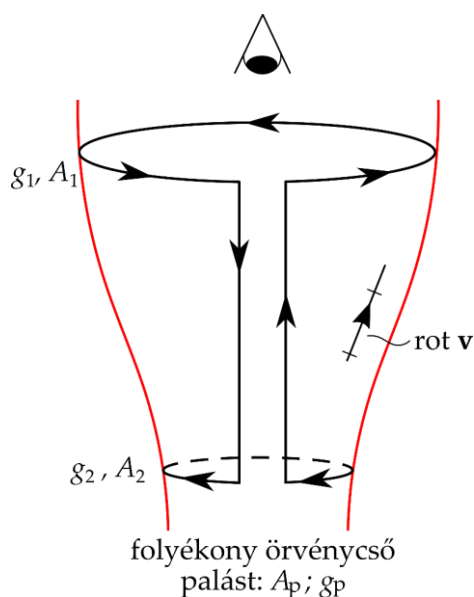


4.5. ábra. Medence klórozása.

4.3 Helmholtz II. tétele

A tornádó egy természeti jelenség formájában megnyilvánuló, áramlástani értelemben vett örvény, melynek tölcsére néhány közhiedelemmel ellentétben minden esetben leér az áramlási tér határáig (talajig). Arra a kérdésre, hogy mi az az áramlástani törvény, ami miatt egy folyékony örvénycső nem érhet véget az áramlási tér belsejében Helmholtz II. tétele ad választ.

Vegyük a tornádó tölcsérének egy szeletét, amely egy folyékony örvénycső, ebből adódóan pedig minden pontjában érintőleges a helyi $\text{rot } \mathbf{v}$ vektor. Ezen a palástfelületen jelöljük ki a 4.6. ábrával összhangban, speciális módon (piciny felhasítás a paláston) egy g_p zárt görbét.



4.6. ábra. Tornádó.

Írjuk fel erre a g_p görbére a sebesség vonalmenti integrálját:

$$\oint_{g_p} \mathbf{v} ds \stackrel{\text{Stokes-tétel}}{=} \int_{A_p} \underbrace{\text{rot } \mathbf{v}}_{\perp} d\mathbf{A} = 0 \quad (4.7.)$$

Ahogy azt Helmholtz I. tétele esetén már beláttuk, a felületi integrál értéke zérus lesz, mivel a felületelem-vektorok merőlegesek a $\text{rot } \mathbf{v}$ vektorokra. Mivel a felhasításból származó két függőleges vonal nagyon közel helyezkedik egymáshoz, a helyi áramlási sebességek megegyeznek. Tehát az ellentétes irányítottság miatt az ezekből származtatott vonalintegrálok kiejtik egymást. Figyelembe véve a g_1 és g_2 görbék irányítottságát:

$$\oint_{g_1} \mathbf{v} ds = \oint_{g_2} \mathbf{v} ds \quad (4.8.)$$

A fenti gondolatmenetet az örvénycső bármely más (g, A) metszetére is alkalmazható:

$$\Gamma = \oint_g \mathbf{v} ds = \int_A \text{rot } \mathbf{v} d\mathbf{A} = \text{áll.} \quad (4.9.)$$

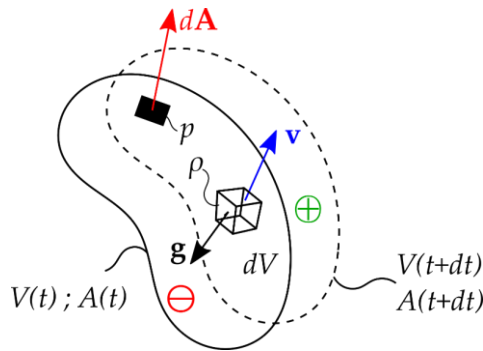
Vagyis a folyékony örvénycső bármely metszetében a cirkuláció állandó, és Thomson-tételének értelmében időben sem változik. Következésképpen, *folyékony örvénycső nem érhet véget az áramlás térben* (ha $A \rightarrow 0$: $\text{rot } \mathbf{v} \rightarrow \infty$, ami nem lehetséges), így:

- vagy önmagában záródik (füstkarika),
- vagy az áramlási tér határáig ér (tornádó leér a talajig).

5 Impulzustétel

Amennyiben a folyadékról a testre, vagy éppen fordítva, azaz a testről a folyadékra ható erőket szeretnénk megvizsgálni, akkor az impulzustétel lesz a segítségünkre. Az előbbi eset gyakorlati relevanciája lehet például egy turbinalapátózás, ahol a folyadék által a lapátózásra kifejtett erő forgatónyomatékokat eredményez a járókerék tengelyén, ezáltal képesek vagyunk tengelyteljesítményt levenni. Utóbbi pedig a különböző áramlásirányító, illetve terelőelemek tervezésénél fontos méretezési szempont.

Az erő számszerűsítéséhez alkalmazzuk Newton II. törvényét egy véges méretű folyadékdarabra! Ha visszaemlékszünk, az Euler-egyenlet szintén Newton II. törvényének felel meg, ellenben ott egy elemi folyadékreszről volt szó. Ehhez gondolatban zárjunk körbe egy folyadékdarabot, mely tovább áramolhat, változtathatja méretét, vagy akár alakját is (5.1. ábra). Egy adott időpillanatban ezt a folyadékdarabot jellemeze $A(t)$ zárt felület és $V(t)$ térfogat.



5.1. ábra. Folyadékresz időbeli változása.

Ha erről a jelenségről egy adott időpillanatban készítenénk egy pillanatfelvételt, elmondható, hogy ez a folyékony felület egy ún. ellenőrző felületként működik (lásd később), és ezen a felületen, valamint az általa körbe zárt térfogatban vizsgáljuk a jelenséget a továbbiakban. Nézzük meg, hogy mennyivel változik meg a folyadékdarab impulzusa egy adott Δt idő alatt, súrlódásmentes esetet feltételezve:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \underbrace{\mathbf{v} \rho dV}_{dm} = \int_{V(t)} \mathbf{g} \rho dV - \int_{A(t)} p d\mathbf{A} \quad (5.1.)$$

Newton II. törvényének megfelelően az impulzus időegységre jutó megváltozása (az (5.1) egyenlet bal oldala) megegyezik a folyadékra ható erőkkel. Ez utóbbi egyrészt adódhat a térfogatban lévő folyadéktömegre ható erőterekből (az (5.1) egyenlet jobb oldalának első tagja), másrészt a folyadékdarab felületére ható környező nyomásból származó erőből (az (5.1) egyenlet jobb oldalának második tagja). Mivel súrlódásmentességet feltételeztünk, a felületi erők merőlegesek a felületre, azaz a csúsztatófeszültségből származó erőkkel *első közelítésben* nem foglalkozunk. A negatív előjel a felületelem és az erővektor ellentétes irányítottságából következik.

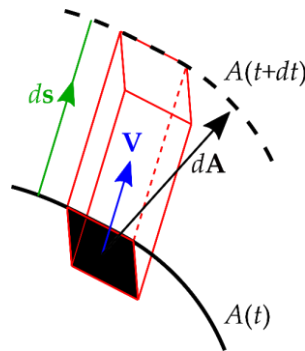
Vizsgáljuk meg, hogyan lehet egyszerűbb alakra hozni a (5.1.) egyenlet bal oldalát. Ehhez kétféle hatást szükséges figyelembe venni:

- a) *Instacionárius*: ez esetben az impulzusváltozás adódhat az áramlási jellemzők ($\rho(t)$, $\mathbf{v}(t)$) idő szerinti változásából:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \mathbf{v} \rho dV$$

Mivel ennek meglehetősen bonyolult a kezelésmódja, ha csak lehet, igyekszünk úgy szemlélni az áramlást, hogy ezen instacionárius hatások ne legyenek jelen.

- b) *Stacionárius*: ahogy az elnevezésből is következik ez a tag stacionárius esetben is megjelenik, és a folyadék odébb áramlásához köthető. Ragadjunk ki az **5.1. ábrán** egy $d\mathbf{A}$ felület dt idő alatt történő elmozdulásával keletkező folyadékhasábot, és vizsgáljuk meg alaposabban (**5.2. ábra**).



5.2. ábra. Folyadékhasáb vizsgálata.

A folyadékhasáb élhosszúsága kifejezhető az elmozdulás-vektorral a következőképpen:

$$ds = \mathbf{v} dt$$

Ez alapján a ferde folyadékhasáb magassága:

$$ds \frac{d\mathbf{A}}{|d\mathbf{A}|} = \mathbf{v} dt \frac{d\mathbf{A}}{|d\mathbf{A}|}$$

Írjuk fel a folyadékhasáb által képviselt impulzust:

$$d\mathbf{I} = dm\mathbf{v} = dV\rho\mathbf{v} = \mathbf{v} dt \frac{d\mathbf{A}}{|d\mathbf{A}|} |d\mathbf{A}| \rho \mathbf{v} \quad (5.2.)$$

Ennek időegységre jutó megváltozása:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{v} dt \frac{d\mathbf{A}}{|d\mathbf{A}|} |d\mathbf{A}| \rho \mathbf{v} \frac{1}{dt} = \mathbf{v} \rho \underbrace{(\mathbf{v} d\mathbf{A})}_{\substack{dq_v \\ dq_m}} \equiv d\dot{\mathbf{I}} \quad (5.3.)$$

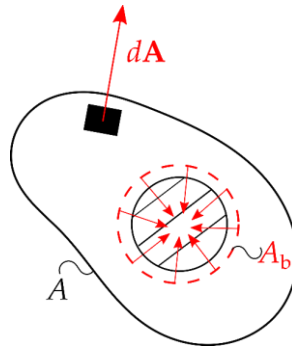
ahol a $d\mathbf{I}/dt \equiv d\dot{\mathbf{I}}$ tagot a folyadék impulzusáramának nevezzük. Fontos, hogy a fenti kifejezés a $(\mathbf{v} d\mathbf{A}) = dq_v$ skalárszorzatból adódóan előjelhelyesen adja meg az impulzusáramot, hiszen a felületelem-vektor mindig a felületből kifelé, \mathbf{v} pedig az áramlás irányába mutat.

Mivel a V térfogatot határoló A felületen átáramlik a közeg, így a levezetés kezdetekor bevezetett mozgó, folyékony felület többé már nem az. Itt és a továbbiakban egy általunk felvett koordináta-rendszerben rögzített, zárt felület, melyet *ellenőrző felületnek* nevezünk. Összefoglalva az eddigieket, súrlódásmentes esetben a folyadékdarab impulzusának időszerinti megváltozása a következőképpen fejezhető ki:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{v} \rho dV + \int_A \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} d\mathbf{A}) = \int_V \mathbf{g} \rho dV - \int_A p d\mathbf{A} \quad (5.4.)$$

5.1 Szilárd test az ellenőrző felületen belül

Annak érdekében, hogy meghatározzuk az áramlásba helyezett testre ható erőt, szükséges az ellenőrző felületbe bevenni a vizsgált szilárd testet is (5.3. ábra).



5.3. ábra. Szilárd test az ellenőrző felületen belül.

Ebben az esetben egy összetett felület jön létre, hiszen az eredeti A felület mellett megjelenik a szilárdtest határán egy A_b belső felület. Először vizsgáljuk meg, hogy a szilárdtest jelenléte miként befolyásolja a korábban levezetett (5.3) egyenletben szereplő tagot:

$$\int_{A_{\text{össz}}} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} d\mathbf{A}) = \int_A \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} d\mathbf{A}) + \int_{A_b} \mathbf{v} \rho \underbrace{(\mathbf{v} d\mathbf{A})}_{=0}$$

A jobb oldal második tagja zérus, mivel a szilárdtest felületén nincsen átáramlás ($\mathbf{v} d\mathbf{A} = dq_v = 0$). Ezek után nézzük meg, hogy a szilárdtest hogyan befolyásolja a nyomásból származó erőket:

$$-\int_{A_{\text{össz}}} p d\mathbf{A} = -\int_A p d\mathbf{A} - \int_{A_b} p d\mathbf{A}$$

Mivel a felületelem-vektorok mindig kifelé mutatnak a felületből, így az 5.3. ábrának megfelelően azok a szilárdtest belseje felé mutatnak. Vagyis az A_b felületen lévő nyomáseloszlást összegezve kapjuk azt az \mathbf{R} erőt, amelyet a folyadék kifejt a szilárd testre.

5.1. táblázat. A ható erő irányának értelmezése.

+R	-R
A folyadékról a testre ható erő	A testről a folyadékra ható erő. Mivel az impulzustétel a folyadékra vonatkoztatott mozgásegyenlet, így valójában ez a tag szerepel az egyenletben.

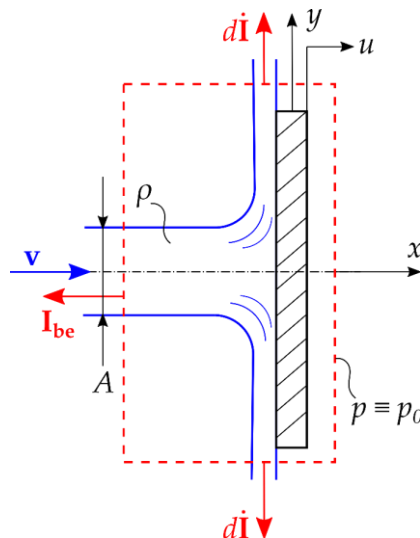
Az eddigiek alapján felírhatjuk az impulzustétel általános alakját, figyelembe véve súrlódásból származó erők hatását (\mathbf{S}) az ellenőrző felületen:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{v} \rho dV}_1 + \underbrace{\int_A \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} d\mathbf{A})}_2 = \underbrace{\int_V \mathbf{g} \rho dV}_3 - \underbrace{\int_A p d\mathbf{A}}_4 - \mathbf{R} + \mathbf{S} \quad (5.5.)$$

Az (5.5) egyenlet egy vektoregyenlet, melynek dimenziója $[N]$. Mivel sok esetben nem látunk bele az áramlás belső finomszerkezetébe, ezért törekszünk a térfogati integrálok kiejtésére. Ezáltal a megoldandó egyenletekben csak felületiintegrálok jelennek meg, amelyek egy alkalmasan megválasztott ellenőrző felület esetén könnyebben számíthatók. Így a folyadékról a testre ható erő is viszonylag egyszerűen meghatározható.

5.2 Impulzustétel alkalmazása: síklapra ható erő

Lőjünk meg egy vízszugárral a lap felületére merőlegesen egy síklapot (5.4. ábra)! Tekintsük úgy, hogy a lap a vízszugár hatására elmozdulhat, a lap sebessége legyen u . Hogyan számítható a lapra ható áramlásból adódó erő?



5.4. ábra. Síklapra lőtt folyadéksugár.

5.2.1 Álló síklap ($u = 0$)

A fenti kérdés megválaszolásához a következő ajánlások, lépések általános érvényűek, és akár bonyolult áramlási esetekben is az impulzustétel egy célravezető alkalmazását adják:

- I. Először minden esetben *vizsgáljuk meg, hogy stacionárius-e az áramlás*. Amennyiben igen, úgy a (5.5) egyenlet első, instacionárius tagja kiejthető.
- II. *Ellenőrző felület felvétele:*
 - a) Ha az \mathbf{R} testre ható erőt keressük, mindig vegyük be a testet az ellenőrző felületen belülre.
 - b) Az ellenőrző felület határait úgy jelöljük ki, hogy az átáramlása iránya legyen merőleges az ellenőrző felületre, így az \mathbf{I} impulzusáram-vektorok könnyen számíthatóvá válnak (ld. 5.4. ábra)

III. **Vizsgálati koordináta-rendszer:** révén, hogy vektoregyenletről van szó, szükséges felvenni egy vizsgálati koordináta-rendszert. Hanyagoljuk el a súrlódás hatását a síklapon, így csúsztatófeszültségből adódó, lappal párhuzamos erők nem ébrednek. Ebből következik, hogy a lapra ható erő a lapra merőleges lesz, vagyis célszerűen úgy válasszuk meg az x -koordinátát, hogy az merőleges legyen a lap felületére (az y -koordináta pedig legyen x -re merőleges).

IV. **Í impulzusáram-vektorok származtatása:**

a) Ha az áramlás merőleges az ellenőrző felületre, az impulzusáram-vektor nagysága az alábbi módon számítható:

$$|\mathbf{i}| = \dot{I} = v\rho(vA) = v\rho q_v = vq_m = v^2\rho A$$

b) Az impulzusáram-vektornak mindenkoron párhuzamosnak kell lennie a sebességvektorral.

c) Az impulzusáram-vektor az ellenőrző felületből mindig kifelé mutat ($\mathbf{v}(\mathbf{v}d\mathbf{A})$ előjelhelyes szorzat). Például, az $\dot{\mathbf{I}}_1$ impulzusáram-vektor iránya negatív x -irányú, hiszen \mathbf{v} iránya ugyan pozitív, de a felületen beáramlás van, ami mindig negatív q_v térfogatáramnak felel meg.

V. **Erőterek hatása:** függőleges lap esetén a \mathbf{g} nehézségi erőter nem játszik szerepet az x -irányú vektoregyenletben (esetlegesen felléphet a vízszöglet enyhe eltérése, de ennek a kiszámítandó erő szempontjából nincs jelentőség). Tehát az (5.5) egyenlet 3. tagjával nem szükséges foglalkozni a továbbiakban.

VI. **Nyomásból származó erők:** az ellenőrző felület ügyes megválasztásával garantáltuk, hogy a teljes felületen – az Euler-egyenlet következtében (párhuzamos áramvonalakra merőlegesen nem változik a nyomás) – légköri nyomás uralkodik ($p = p_0$), tehát:

$$-\int_A p d\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

A fenti ajánlásokat figyelembe véve felírható az impulzustétel az álló síklap esetére:

$$x: \quad 0 - v^2\rho A = 0 - 0 - R_x + 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = v^2\rho A = v\rho q_v = vq_m \quad (5.6.)$$

ahol az R_x nagyságú erő iránya pozitív x -irányú, vagyis a folyadéksugár „eltolni” igyekszik a síklapot. 2D síklap esetén a kilépő felületen az elemi impulzusáram-vektorok integrálja zérus, mivel a sebességvektorok nagysága állandó, azonban irányuk ellentétes.

Kreatív impulzustétel:

Az előző álló síklapos estere a következő egyszerűsített szemléletben is alkalmazhatjuk az impulzustételt: A lapra ható erő úgy is kifejezhető, mint egy Δt vizsgálati idő alatt a folyadék impulzusának megváltozása. A folyadék x -irányú beérkező impulzusa úgy is szemlélhető mint a Δt idő alatt beérkező Δm tömegű folyadék szorozva a folyadéksugár sebességével. A kilépő x -irányú impulzus zérus, mivel az összes kilépő impulzusáram-vektor y -irányba mutat.

$$R_x = \frac{1}{\Delta t} [I_{be,x} - I_{ki,x}] = \frac{1}{\Delta t} [\Delta m \cdot v - 0] = v \frac{\Delta m}{\Delta t} = vq_m \quad (5.7.)$$

5.2.2 Mozgó síklap ($u \neq 0$)

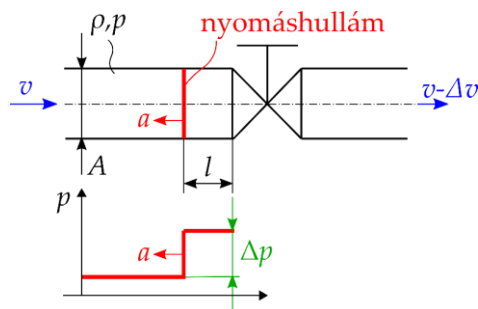
Amennyiben például több, a korábbihoz hasonló síklapot egy turbina járókerékéhez szerelünk, a lapra ható erő a járókerék tengelyén nyomatékot eredményez. Mivel ezt a turbinatengelyről levehető teljesítményként hasznosíthatjuk, gyakorlati relevanciával bír, hogy megengedjük a lap elmozdulását.

Álló megfigyelési rendszerből szemlélve azt tapasztaljuk, hogy az áramlás erősen instacionárius! Azonban ez az időfüggés kiküszöbölhető, ha a **lappal együtt mozgó rendszerben** vizsgáljuk a jelenséget. Ebben az együtt mozgó rendszerben – amelyben az ellenőrző felület is a lappal együtt mozog – az áramlás már stacionárius, azonban a folyadéksugár v sebessége helyett egy $(v-u)$ ún. relatív sebesség jelenik meg. Az előző gondolatmenet alapján, ezt a sebességet behelyettesítve (5.6.) összefüggésbe a mozgó síklapra ható erő:

$$R_x = (v - u)^2 \rho A \quad (5.8.)$$

5.3 Csővezeték hirtelen zárása: Allievi-elmélet

Amennyiben egy csővezetékben víz áramlik, amelyet üzemviteli okok miatt óvatlan módon hirtelen lezárunk valamilyen zárószerelvénnel, a folyadék tehetetlensége következtében jelentős – nyomásban megnyilvánuló – erők ébrednek, melyek „megtorpantják” a folyadék mozgását. Amennyiben túlságosan gyorsan zárjuk le a csövet, előfordulhat, hogy az uralkodó rendszernyomás többszöröse valósul meg, amely akár a csővezeték tönkremenetelét okozhatja. Ebből kifolyólag a gépészeti életben törekszünk ezen jelenség elkerülésére. Arra kérdésre, hogy hogyan tudjuk elkerülni ezt a káros jelenséget, az impulzustétel ad választ. Lorenzo Allievi (1856-1941) volt az az áramlástechnikai szakember, aki egy vízturbinacső hirtelen zárása miatti csőrobbanást vizsgált, a következőkben az ő elméletét ismertetjük:



5.5. ábra. Csővezeték hirtelen zárása.

Vizsgáljunk meg egy A keresztmetszetű csővezetékét, amelyben zavartalanul v sebességgel áramlik egy ρ sűrűségű közeg. Az 5.5. ábra látható zárószerelvény hirtelen zárás esetén a kezdeti v sebesség a zárószerelvény után kisebb lesz, legyen a sebességcsökkenés értéke Δv . Ahhoz, hogy "lefékeződjön" a zárószerelvény előtti folyadék, jelentős erőknek kell ébrednie, amely a zárás miatti Δp nyomásnövekedésből származik. Ez a Δp nyomásnövekedés a zárás helyétől a cső mentén az áramlással ellentétes irányba halad a hullámterjedési sebességgel (hangsebesség) ún. **nyomáshullám** formájában.

Hogyan tudjuk kiszámítani ezen A keresztmetszetű csővezeték zárása folyamán kialakuló Δp nyomásnövekedést? Képzeljük el, hogy a zárástól kezdődően egy Δt idő elteltével a kialakult nyomáshullám már kifejtette lassító hatását egy l hosszúságú szakaszon. Ezt az l hosszt a hullámterjedési sebesség felhasználásával az alábbi módon fejezhetjük ki:

$$l = a\Delta t \quad (5.9.)$$

Alkalmazzuk az impulzustételt, mely azt mondja ki, hogy az impulzusáram megegyezik a folyadékra ható erővel:

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \dot{l} = F \Rightarrow \underbrace{\frac{a\Delta t A \rho \Delta v}{m}}_{\Delta l} \frac{1}{\Delta t} = \Delta p A \quad (5.10.)$$

Az egyszerűsítéseket elvégezve kapjuk az Allievi-egyenletet:

$$\Delta p = \rho a \Delta v \quad (5.11.)$$

ahol *hirtelen teljes zárás* esetén: $\Delta v = v$.

5.3.1 Hullámterjedés sebessége

A hullámterjedési sebesség kifejezéséhez alkalmazzuk a mechanikai tanulmányokból már ismert Hooke-törvényt:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (5.12.)$$

ahol σ a nyomófeszültség, E a rugalmassági modulus, és ε a fajlagos nyúlás. Az előző példában a nyomófeszültségnek a nyomásnövekedést ($\sigma = \Delta p$), a rugalmassági modulusnak, pedig az E_R redukált rugalmassági modulusnak tekintjük. Fontos, hogy hirtelen zárás esetén akkora nyomások alakulhatnak ki, hogy nem hanyagolható el a folyadék-összenyomódás, még akkor sem, ha a közeg cseppfolyós (pl. víz). Vagyis E_R egyrészt figyelembe veszi a folyadék összenyomódását, másrészt a csőfal rugalmasságát (tágulását) is. Ez a következőképpen fejezhető ki:

$$\frac{1}{E_R} = \frac{1}{E_{\text{foly}}} + \frac{1}{E_{\text{cső}} \delta / D} \quad (5.13.)$$

ahol D a csővezeték belsőátmérője, δ pedig a csőfal vastagsága. Az (5.13.) egyenlet származtatásához szükséges még a ε relatív megrövidülés, amely a Δt idő alatt belépő $(a+v)\Delta t$, és a kilépő $(a+v-\Delta v)\Delta t$ hosszúságú folyadék különbségeként fejezhető ki:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(a+v)\Delta t - (a+v-\Delta v)\Delta t}{a\Delta t} = \frac{\Delta v \Delta t}{a\Delta t} = \frac{\Delta v}{a} \quad (5.14.)$$

Az (5.12.) és (5.14.) egyenleteket felhasználva adódik:

$$\Delta p = E_R \frac{\Delta v}{a} = \rho a \Delta v \quad (5.15.)$$

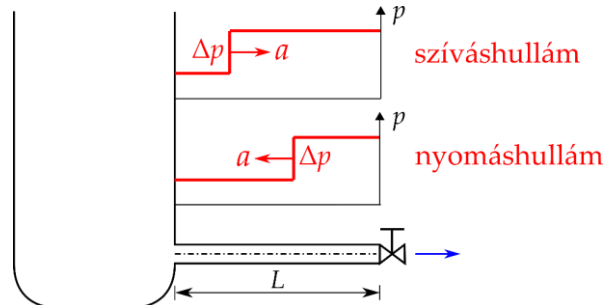
Így az (5.15.) egyenletből kifejezhető a *hullámterjedés sebessége*:

$$a = \sqrt{\frac{E_R}{\rho}} \quad (5.16.)$$

5.3.2

5.3.2 Intézkedések a csőrobbanás elkerülésére

Ahhoz, hogy intézkedéseket tehesünk a hirtelen zárás miatt bekövetkező Δp nyomásnövekedés ellen, mely roncsolhatja a berendezéseinket, először vizsgáljuk meg, hogy mi is játszódik le pontosan a csővezetékben (5.6. ábra):



5.6. ábra. Hirtelen elzárás hatására kialakuló nyomáshullám terjedése.

A hirtelen zárás hatására egy hangsebességgel haladó, Δp amplitúdójú nyomáshullám indul meg a csővezetékben visszafelé. Amikor a csőben végig futó hullám elér a tartályhoz, ott helyileg nagyobb lesz a nyomás, mint ami a tartályban uralkodik. Vagyis ott helyileg a folyadékreszek elindulnak a tartály irányába és húzzák magukkal a mögöttük lévő folyadékreszeket is. Emiatt elindul a cső mentén egy ún. szíváshullám, ami maga mögött visszaállítja az eredeti nyomást, és végül eljut a zárószelvényig.

Ebből adódik az *első* fontos *intézkedés*: ha elegendő időt hagyunk arra, hogy a zárás után visszaérkezzen a szíváshullám a zárószelvényhez, és ezáltal visszaállítsa a nyomást az eredeti értékre, akkor nem tapasztalunk károsodást. Vagyis célravezető a *zárási időt kellően nagyra megválasztani* ahhoz, hogy a szíváshullám visszaérkezzen. Ez a visszaérkezési idő a következőképpen határozható meg:

$$t_{\text{zárási}} \gg \frac{2L}{a}$$

Amennyiben lehetséges válasszuk a fenti összefüggésnek megfelelően a zárási időt. Ugyanakkor előfordulhat, hogy az üzemvitelből adódóan ennél gyorsabb zárási idő szükséges (pl. mágnesszelepek). Az ilyen esetekben *egy alternatív megoldás* lehet a következő: cél a Δp nyomásnövekedés csökkentése, amely az (5.11.) egyenlet alapján elérhető a hullámterjedési sebesség csökkentésével is. Ehhez csökkenteni szükséges – (5.16.) egyenlet értelmében – a redukált rugalmassági modulust. Ez megvalósítható ún. *flexibilis csővezetékek* alkalmazásával (pl. flexibilis polimer alapú vízvezetékek a háztatásban).

5.4 Impulzusnyomatéki-tétel

Egy fontos mérnöki feladat lehet egy vízturbina esetén a folyadék által a járókerékre kifejtett nyomaték meghatározása. Ugyanis, ha a nyomatéket megszorozzuk a járókerék szögsebességével, megkapjuk a tengelyről levehető, hasznos teljesítményt. Ez az impulzusnyomatéki-tétel alapján határozható meg, mely sűrűdásmentes esetben a következőképpen írható:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{r} \times [\mathbf{v} \rho dV] + \int_A \mathbf{r} \times [\mathbf{v} \rho (\mathbf{v} d\mathbf{A})] = \int_V \mathbf{r} \times [\mathbf{g} \rho dV] - \int_A \mathbf{r} \times [p d\mathbf{A}] - \mathbf{M} \quad (5.17.)$$

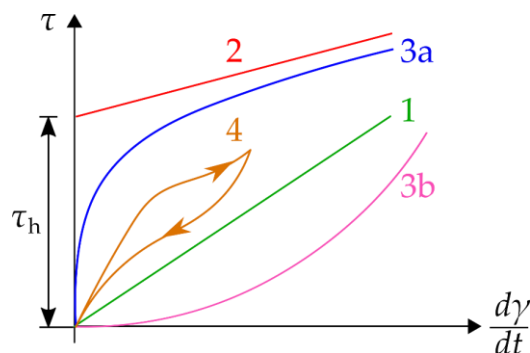
ahol \mathbf{M} a folyadék által a testre kifejtett nyomaték. Látható, hogy az (5.17.) egyenlet az impulzustétel egy formálisan kiegészített változata úgy, hogy az impulzusmegváltozásnak megfelelő tagokat vektoriálisan szorozzuk egy tetszőleges \mathbf{r} karral, melyet célszerűen választunk meg attól függően, hogy mi a pontos mérnöki feladat.

Az áramlástechnikai forgógépekkel, például különböző turbinákkal, szivattyúkkal, ventilátorokkal, kompresszorokkal foglalkozó szakemberek gyakran találkoznak az ún. Euler-turbinaegyenlettel, ami az impulzusnyomatéki-tétel alapján származtatható.

6 Súrlódásos folyadékok

6.1 Nem-newtoni folyadékok, reológiai görbék

Amennyiben egy kevés vizet locsolunk a fürdőszoba falcsempéjére azt tapasztaljuk, hogy a víz lefolyik azon. De mi történik, ha másfajta folyadékot viszünk fel a falra, például valamilyen habot (pl. szappanhab, borotvahab)? Ebben az esetben megfigyelhető, hogy a hab ott marad a falon. Egy másik hétköznapi példát a fogmosáskor előkerülő fogkrém, mely a fogkefére nyomva, majd függőleges pozícióba emelve szintén nem fog leesni. Mindez azért lehetséges, mert a különféle folyadékoknak eltérők a sajátosságai. Ebben a fejezetben a **6.1. ábra** reológiai görbéin keresztül röviden áttekintjük ezeket a sajátosságokat.



6.1. ábra. Reológiai görbék (1: newtoni, 2: Bingham-plasztikus, 3a: pszeudó-plasztikus, 3b: dilatáló, 4: tixotróp).

1) *Newtoni folyadékok* (technikai közegek jelentős része, pl. víz, levegő):

$$\tau = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

Ezen folyadékok esetén a nyugvó súrlódás zérus. Visszatérve a fejezet eleji kísérlethez, a víz azért folyik le a fürdőszobai csempéről, mert a gravitáció hatására csúsztatófeszültség ébred, melynek következményeképpen muszáj annak lefolynia.

2) *Bingham-plasztikus folyadékok* (pl. habok, fogkrém):

$$\tau = \tau_h + \mu_\infty \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

Ezen közegek jellemzője, hogy már zérus deformációs sebesség esetén is képesek "ellenállni" bizonyos mértékű határ-csúsztatófeszültségnek (τ_h). Ezen határon túlmenően, a deformációs sebességet növelve a csúsztatófeszültség egy lineáris trendet követ. További jellegzetesség, a térhálós anyagszerkezet, melynek köszönhetően akár nyugvó helyzetben is képesek ellentartani a ható erőknek. Ugyanakkor, amint meghaladja a folyadékban a csúsztatófeszültség a rá jellemző határ-csúsztatófeszültséget (pl. elkezdjük tolni a habot lefele), a térhálós szerkezet összeomlik a fal közelében, és megindul a folyadék mozgása.

3) *Hatványfüggvény-közegek:*

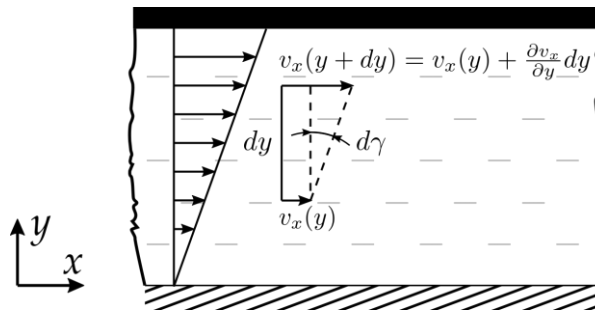
$$\tau = k \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right)^n$$

- a) $n < 1$: *Pseudo-plasztikus közegek* (pl. polimer-olvadék): az elnevezés abból adódik – ahogy azt a **6.1. ábra** is szemlélteti –, hogy amint egy bizonyos deformációt már elszenvedett a folyadék, egyre inkább közelít a reológiai görbéje a Bingham-plasztikus folyadékéhoz. Általában ezen folyadékokat hosszúláncú molekulák alkotják, melyek kezdetben össze vannak gabalyodva. Viszont amint elkezdjük deformálni a folyadékot, a molekulák rendeződnek, ezáltal könnyítve a további deformációt.
- b) $n > 1$: *Dilatáló közegek* (pl. biomassa, zagy): jellemzőjük, hogy szilárd részecskék vannak jelen a folyadékban. Kezdetben, mérsékelt deformáció mellett, a részecskék hatása kevésbé jelenik meg, de ahogy egyre erőteljesebben deformáljuk a folyadékot, egyre inkább ütköznek a szilárd szemcsék. Az ebből származó fokozott belső súrlódás következtében, egyre nehezebb a folyadékot deformálni.
- 4) *Tixotróp közegek* (pl. élelmiszeripar): jellemzője, hogy a csúsztatófeszültség mindenkoron függ a folyadék megelőző deformációjától (előéletétől). Ennek egyik szemléletes példája a tej, ahol a tejben lévő zsírtartalom az intenzív deformáció hatására kiköpülődhet. A kivált tejsír darabkák megjelenése miatt megváltozik a folyadék szerkezete.

6.2 Newtoni folyadékok súrlódásos mozgásegyenlete

Végezzünk el a következő gondolat kísérleteket:

- a) *Newton-kísérlet* (emlékeztetőül):



6.2. ábra. Newton-kísérlet.

Egy álló lapra vigyünk fel egy folyadékréteget (pl. olajfilm) és helyezzünk rá egy másik lapot, melyet u sebességgel mozgatunk (**6.2. ábra**), melynek hatására a folyadékrétegek mozgásba jönnek. A következő megállapításokat tehetjük. Minden egyes folyadékrétegben ugyanaz a csúsztatófeszültség jelenik meg ($\tau(y) = \text{áll.}$), amely a Newton-féle viszkozitási törvénnyel fejezhető ki:

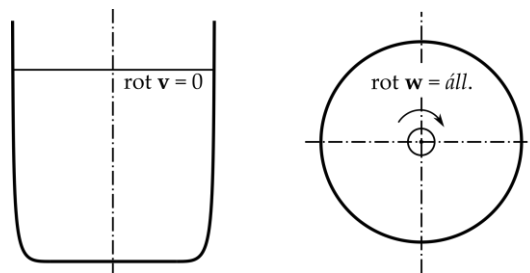
$$\tau = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Mivel a csúsztatófeszültség térben állandó, adódik, hogy az egyes folyadékrétegekben belül a folyadék részecskék szögsebessége is térben állandó. Tekintve, hogy a folyadék részecskék szögsebessége a sebesség rotációjával is kifejezhető ($\omega = 1/2 \cdot \text{rot}v$), így $\text{rot}v$ is térben

állandó. Ennek megfelelően a $v_x(y)$ lineárisan változik, továbbá $u = \text{áll.}$ esetén az áramlás stacionárius. Vagyis ugyan jelen van a folyadéksúrlódás, de az nem befolyásolja a folyadék gyorsulását, és ennek megfelelően nem jelenik meg a súrlódás hatása a mozgásegyenletben.

b) *Álló vs. forgó edény*

Álló edény, és folyadék esetén a sebesség zérus ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), következésképpen a sebességtér rotációja is zérus ($\text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$). Ugyanezt az edényt egy $-\omega$ szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerben vizsgálva, a folyadék forogni látszik, és \mathbf{w} relatív sebesség rotációja kifejezhető a szögsebesség kétszeresével ($\text{rot} \mathbf{w} = 2\omega = \text{áll.}$). Mivel ez egy merevtest-szerű forgásnak feleltethető meg, térben állandó a szögsebesség értéke. Vagyis hiába tértünk át forgó vonatkoztatási rendszerre, a súrlódás nem befolyásolja a folyadék gyorsulását.



6.3. ábra. Vízrel teli edény forgatása.

A fenti két kísérletből a következő megállapításokat tehetjük a sebességtér rotációjának hatására vonatkozóan, amennyiben:

- $\text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- vagy $\text{rot} \mathbf{v} = \text{áll.}$,

a súrlódás *nem* játszik szerepet a mozgásegyenletben!

6.2.1 Navier-Stokes egyenlet

Az előző megállapításokat figyelembe véve, írjuk fel a newtoni folyadékok súrlódásos mozgásegyenletét, az ún. Navier-Stokes egyenletet! Ehhez tekintsünk egy állandó sűrűségű ($\rho = \text{áll.}$) és dinamikai viszkozitású ($\mu = \text{áll.}$) közeget, továbbá elevenítsük fel a kinematikai viszkozitás fogalmát:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

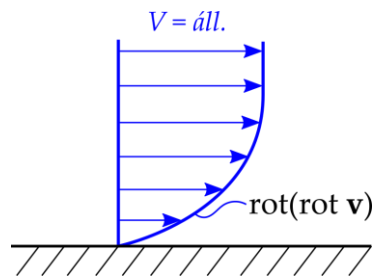
Ezzel a Navier-Stokes egyenlet:

$$\underbrace{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}}_{\text{Euler-egyenlet}} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \nu \text{rot}(\text{rot} \mathbf{v}) \quad (6.1.)$$

Vagyis a súrlódás hatása a sebességtér rotációjának rotációjával vehető figyelembe ($\text{rot}(\text{rot} \mathbf{v})$). Fontos megjegyezni, hogy ez összhangban áll a korábbi megállapítással miszerint, ha zérus vagy állandó a sebességtér rotációja, akkor a súrlódásnak nincsen hatása a folyadék gyorsulására.

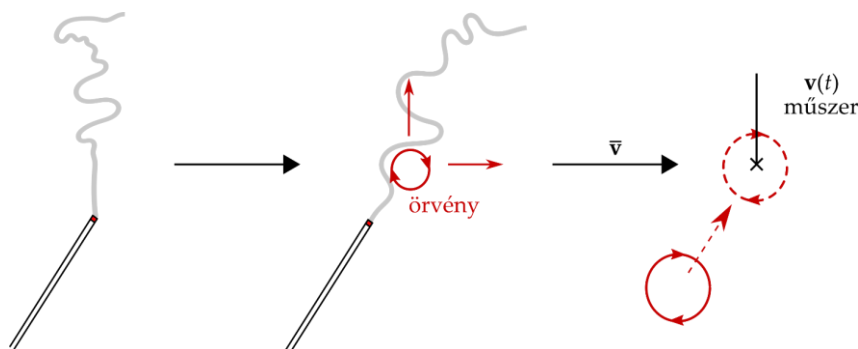
Általánosságban a következő négy ismertlent kívánjuk meghatározni a különféle áramlási jelenségek esetén: v_x , v_y , v_z , p . Ehhez négy egyenlet szükséges, mely adódik a Navier-Stokes egyenlet három komponensegyenletéből, valamint a kontinuitás egyenletből. Tekintve, hogy általános esetben az (6.1.) egyenletnek nem létezik analitikus megoldása (a millenniumi problémák egyike), így numerikus áramlástan megoldókra (CFD) kell támaszkodni.

A Navier-Stokes egyenletből levonható további fontos tapasztalat, hogy a szilárd falhoz közeledve – a tapadás törvényének értelmében – a sebességprofil meredeksége rohamosan változik (6.4. ábra). Térben jelentősen változik a sebességtér rotációja, vagyis a fal közelében a súrlódás hatásának jelentős a szerepe.



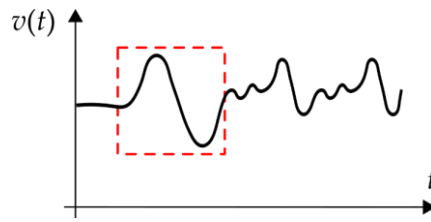
6.4. ábra. Sebességprofil a fal környezetében.

A súrlódásos áramlások egy másik fontos jellegzetességének megismeréséhez végezzük el a következő gondolatkísérletet. Fogjunk egy füstölőt, és elsőként vizsgáljuk meg nyugvó légtérben! Azt tapasztaljuk, hogy kezdetben a füstölőből egy vékony, szabályos füst pászma mozog felfelé. Forró füst révén erre felhajtóerő hat, így felfelé haladva egyre gyorsabban és gyorsabban áramlik a füst. A kezdetben rendezett füst pászma először elkezd kunkorodni, hullámokat vetni, majd egy idő után teljesen gomolygóvá válik (6.5. ábra). Végezzük ez el ugyanezt a kísérletet szabad téren, ahol szép lassan mozog a levegő. Ennek hatására a füst pászma elhajlik, de ugyanúgy megfigyelhető az előbb ismertetett jelenség. Úgy tűnik, mintha kezdetben – amikor még szép rendezett a füst pászma – nem lennének jelen zavarások (örvények), majd hirtelen mintha megjelenéne valamiféle zavarások (örvények), amelyek a füst pászma oszcillációját okozzák.



6.5. ábra. Füstölő vizsgálata nyugvó (bal) és áramló (jobb) levegő esetén.

Helyezzünk egy pontos, nagy felbontású sebességmérő-műszert az áramlásba, amely az adott pontban megmutatja nekünk a $v(t)$ sebesség időfüggését (6.6. ábra)!



6.6. ábra. Sebesség alakulása időben.

Látható, hogy amíg a füst pászma nem éri el a műszert, a lassan mozgó levegő időben állandó sebességét mérjük. Ahogy a megjelenő örvény felső része belehasít a műszerbe, egy ennek megfelelő többlet sebesség adódik hozzá az állandósult sebességhez. Egy későbbi időpillanatban az örvény alsó része is eléri a műszert, ami pedig sebesség deficitet eredményez. Tehát a mért sebesség-idő jelben egy sebesség-ingadozás tapasztalható. Ez a mért ingadozó sebesség-idő jel felírható egy időbeli átlag és egy erre szuperponálódott – a megjelenő örvényekből származó – ingadozó sebességkomponens összegeként:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \quad (6.2.)$$

A görbült áramvonalak következtében a statikus nyomás is ingadozik, így hasonlóképpen a sebességhez, a nyomás is felírható egy időbeli átlag és egy ingadozó komponens összegeként:

$$p = \bar{p} + p' \quad (6.3.)$$

Visszatérve a füstölős példához, azzal összhangban, hogy az áramlás *rendezett, réteges* (a rétegek egymás megzavarása nélkül áramolnak) vagy *gomolygó*, alapvetően két főbb áramlás-típust különböztetünk meg:

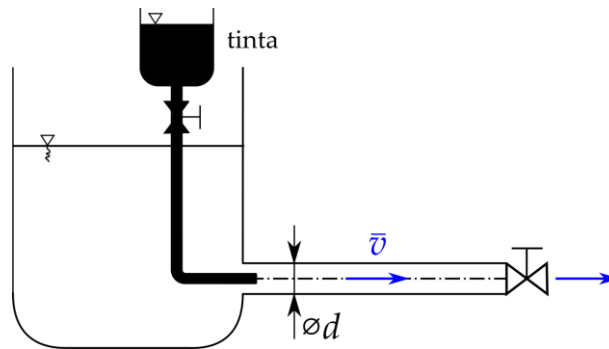
6.1. táblázat. Áramlások típusai.

Lamináris	Turbulens
réteges	instacionárius, gomolygó

Amennyiben az áramlás nem tisztán lamináris, de nem is teljesen turbulens – vagyis az áramlási jelleget meghatározó Reynolds-szám a lamináris és turbulens áramlás Reynolds-küszöbszámai közé esik (lásd később 6.9. ábra) –, *átmeneti áramlásról* beszélünk.

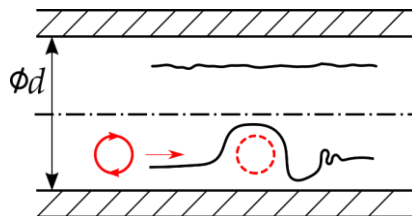
6.3 Lamináris és turbulens áramlások – Reynolds-féle kísérlet

Osborne Reynolds volt az első, aki egy csővezetékben szisztematikusan megvizsgálta a lamináris, illetve turbulens áramlások jellegzetességeit. Reynolds kiágaztatott egy adott, $\varnothing d$ átmérőjű üvegső-vezeték egy tartályból, és a csővezeték végén található szelep szabályozásával változtatta a kiáramlás átlagsebességét. Az áramlás szerkezetének megjelenítéséhez, „megfestette” a folyadékot egy tintacsík segítségével (6.7. ábra).



6.7. ábra. Reynolds-féle kísérlet.

Felelevenítve a füstölős példát, a felszálló füst a felhajtóerő révén egyre inkább felgyorsult, és ezáltal nőtt a sebessége is. Ez alapján jogos sejtés lehet, hogy a sebességnek jelentős szerepe van a lamináris, illetve turbulens áramlások viszonylatában. Képzeljük el, hogy a csövön belül létrejön egy R_G görbületi sugárral jellemzett turbulens örvény (6.8. ábra), majd vizsgáljuk meg, hogy milyen erők hatnak egy egységnyi tömegű folyadékra!



6.8. ábra. Csövön belüli örvény.

- a) **Tehetetlenségi erő:** az örvények hatására görbült áramvonalak alakulnak ki, amelyről a folyadék tehetetlensége révén igyekszik lesodródni. Azokat az erőket, amelyek gátolják a folyadék „lesodródását” tehetetlenségi erőknek nevezzük. Ennek nagyságrendje egységnyi tömegre vonatkoztatva megegyezik a centripetális gyorsulással:

$$F_t = \frac{v^2}{R_G} \sim \frac{\bar{v}^2}{d} \quad (6.4.)$$

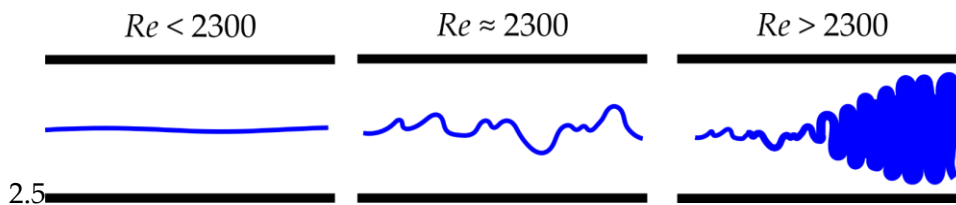
- b) **Súrlódási erő:** a Newton-féle kísérletre visszagondolva ez kifejezhető úgy, mint a helyi csúsztatófeszültség szorozva a jellemző felülettel egységnyi tömegre vonatkoztatva:

$$F_s = \frac{\tau A}{m} \sim \frac{\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} d^2}{\rho V} \sim \frac{\mu \bar{v} d^2}{\rho d^3} = \nu \frac{\bar{v}}{d^2} \quad (6.5.)$$

Vizsgáljuk meg, hogyan alakul a fenti két erő viszonya, ami egy dimenziótlan szám és Osborne Reynolds után *Reynolds-számnak* nevezzük:

$$\frac{F_t}{F_s} \sim \frac{\bar{v}^2}{\nu \frac{\bar{v}}{d^2}} = \frac{\bar{v}d}{\nu} \equiv Re \quad (6.6.)$$

amely a tehetetlenségi és a súrlódási erők arányát fejezi ki. Reynolds a cső végi szelep állásának változtatásával különféle átlagsebességeket valósított meg, mely által képes volt eltérő Reynolds-számok mellett vizsgálni a folyadék viselkedését csőáramlásban. A kísérleteiből a következő tapasztalat szűrhető le (6.9. ábra):



6.9. ábra. Reynolds-féle kísérlet tapasztalatai.

A (6.2.) egyenlet alapján a sebességvektor két komponens összegeként írható fel, ez alapján az elkeveredést az ingadozó komponens valósítja meg a teljes keresztmetszetben.

6.4 Veszteséges taggal kiegészített Bernoulli-egyenlet

Vegyünk egy stacionárius csőáramlást, amelyben állandó sűrűségű közeg áramlik, majd írjuk fel a be- és kilépő pontok között a súrlódásmentes közeget feltételező Bernoulli-egyenletet nyomás dimenzióban:

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho gh_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho gh_2 \quad (6.7.)$$

Amennyiben a cső keresztmetszete állandó, akkor $v_1 = v_2$. Továbbá a cső be- és kilépő pontjai legyenek azonos magasságban ($h_1 = h_2$), így a gravitációs erőter hatása elhanyagolható. Következésképpen $p_1 = p_2$, tehát a be- és kilépő nyomások megegyeznek. Azonban a tapasztalat ennek ellentmond, és valójában $p_1 > p_2$!

Ez alapján úgy tűnhet, hogy a korábban felírt Bernoulli-egyenlet nem alkalmazható. Viszont a Bernoulli-egyenlet célszerűen kiegészíthető egy speciális taggal, mellyel továbbra is fent áll a Bernoulli-összegek egyenlősége. Írjuk fel a veszteséges taggal kiegészített Bernoulli-egyenletet két célszerűen megválasztott pont között úgy, hogy 2-es pont az áramlás irányba távolabbi pont:

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho gh_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho gh_2 + \Delta p' \quad (6.8.)$$

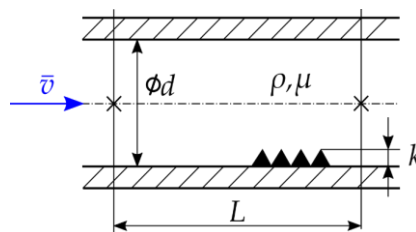
ahol $\Delta p'$ az ún. *össznyomás-veszteség*, melynek meghatározásával a hidraulika foglalkozik. A hidraulika célkitűzése a kérdéses $\Delta p'$ össznyomás-veszteség számszerűsítése egyszerű, tapasztalati úton különféle áramlástechnikai szerelemekre, például csővezetésekre és különböző idomokra (T-elágazás, könyökök).

7 Hidraulika

A hidraulika az a tématerülete az áramlástanak, amelyen belül össznyomás-veszteséget kívánunk becsülni egy adott rendszerben, ahol ezt a becslést empirikus úton, vagyis egyszerű, tapasztalati összefüggések segítségével adjuk meg.

7.1 Csősúrlódás

Mérnöki gyakorlatban a csősúrlódással számtalan esetben találkozhatunk, hiszen gyakran van szükség különféle technológiai közegek mozgatására csővezetékekben. Ehhez elegendő a háztartásban körülnézni, ahol megtalálhatók pl. a víz-, illetve gázellátó csőrendszerek, melyek mind különböző csővezetékfajtákból, idomokból, és szerkezeti elemekből állnak. Vizsgáljunk meg egy körkeresztmetszetű egyenes csőszakaszt, melyben az áramló folyadék sebessége legyen \bar{v} (7.1. ábra). Hogyan fejezhető ki a kialakuló $\Delta p'$ össznyomás-veszteség?



7.1. ábra. Csősúrlódás.

Nézzük meg, hogy egyáltalán milyen fizikai jellemzőktől függhet a $\Delta p'$ csősúrlódási veszteség. Egyrészt a csővezeték geometriai jellemzőitől: csőhossz (L), átmérő (d), a csőfal érdességének magassága (k). Másrészt az üzemeltetési jellemzőktől, például a térfogatáramtól, ami a csővezeték keresztmetszete révén az átlagsebességhez fűződik (\bar{v}). Mivel a súrlódási jelenségek a viszkozitáshoz kötődnek, így függhet a folyadék tulajdonságaitól is, pl. sűrűség (ρ), dinamikai viszkozitás (μ). Összegezve:

$$\Delta p' = \Delta p'[L, d, k; \bar{v}; \rho, \mu]$$

Ahogy többször is említettük, a hidraulikában kívánalom az össznyomás-veszteség egyszerű, tapasztalati összefüggésekkel való leírása. Ehhez valakinek, valahol méréseket kellett végeznie, persze bizonyos esetekben lehet, hogy éppen ránk vár ez a feladat. A mérések célja, hogy egy egyelőre ismeretlen kapcsolatot tárjunk fel a különböző jellemzők között:

$$F(\Delta p', L, d, k, \bar{v}, \rho, \mu) = ?$$

Látható, hogy hét jellemző közötti függvénykapcsolatot szükséges meghatározni mérések útján, amely óriási idő-, valamint anyagi ráfordítást jelent. Ebből kifolyólag célszerű lenne valamilyen módon egyszerűsíteni, illetve rendszerezni a mérési sorozatokat. Ebben lesz segítségünkre az ún. *dimenzióanalízis*, amelyet a következő fejezetben ismertetünk.

7.1.1 Dimenzióanalízis (Buckingham-féle Π -analízis)

A dimenzióanalízis alapelvei jelen példában a következők. Legyen $m = 7$ a jellemző fizikai mennyiségek száma. Belátható, hogy a korábban tárgyalt hét mennyiség bármelyike dimenzióját tekintve felírható az alábbi $n = 3$ alaplmenység (SI) segítségével:

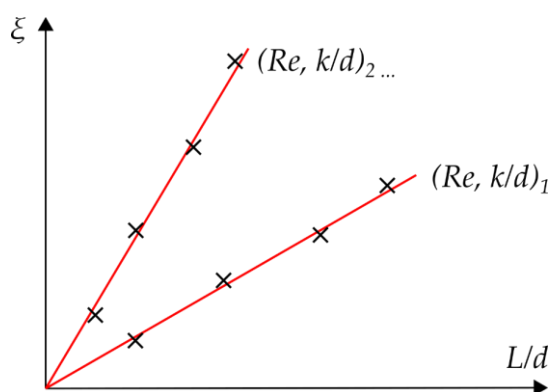
$$[kg, m, s]$$

Vegyünk egy példát: a nyomás dimenziója $[Pa]$, ami $[N/m^2]$, ezt tovább fejtve $[(kg \cdot m/s^2)/m^2] = [kg/(s^2 \cdot m)]$. A dimenzióanalízis alapgondolata, hogy megfelelő feltételek mellett nem szükséges mind a 7 mennyiség, hanem elegendő $r = m - n = 4$ dimenziótlan jellemző kapcsolatát vizsgálni. Tényleges matematikai levezetés nélkül, ebben az esetben a 4 dimenziótlan jellemző a következő:

7.1. táblázat. Csősúrlódás: dimenziótlan jellemzők.

Dimenziótlan jellemző	Mennyiség	Jelölés	Megnevezés
Π_1	$\Delta p' / \frac{\rho}{2} \bar{v}^2$	ζ	veszteségtényező
Π_2	L/d		relatív csőhossz
Π_3	k/d		relatív érdesség
Π_4	$\bar{v}d\rho/\mu = \bar{v}d/\nu$	Re	Reynolds-szám

Ez alapján már elkezdhetjük a szisztematikus méréseket, melyeket úgy tervezzünk meg, hogy az eredmények egy összefoglaló diagramon szemléltethetők legyenek (7.2. ábra). A vízszintes tengelyen ábrázoljuk az L/d viszonyt, a függőlegesen pedig a ζ veszteségtényezőt. Az adott mérésen belül a maradék két dimenziótlan mennyiség tetszőlegesen megválasztható ($Re, k/d$).



7.2. ábra. Dimenziótlan jellemzők közötti kapcsolat.

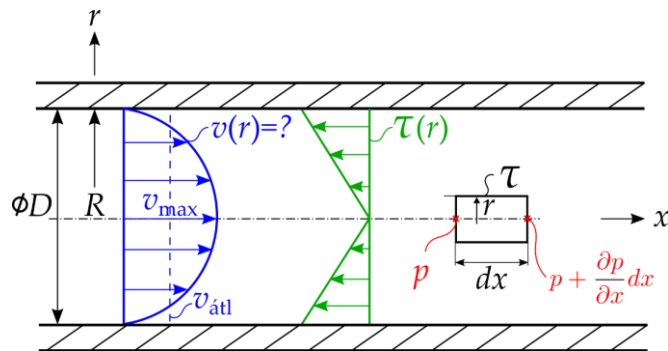
A mérési tapasztalat azt mutatja, hogy egy mérési sorozatban – melyre egy adott ($Re, k/d$) jellemző – a veszteségtényező és az L/d viszony egyenesen arányos. Az arányossági tényező az ún. csősúrlódási tényező $\lambda(Re, k/d)$, amely a Reynolds-szám és a relatív érdesség függvénye. Vagyis a mérések alapján kifejezhető a $\Delta p'$ csősúrlódási veszteség a következők szerint:

$$\frac{\Delta p'}{\frac{\rho}{2} \bar{v}^2} = \lambda(Re, k/d) \frac{L}{d} \Rightarrow \Delta p' = \lambda(Re, k/d) \frac{L}{d} \frac{\rho}{2} \bar{v}^2 \quad (7.1.)$$

Tehát az eredeti kérdés visszavezethető arra, hogy hogyan lehet meghatározni a $\lambda(Re, k/d)$ csőszűrlődési tényezőt a Reynolds-szám és relatív érdesség függvényében. A Reynolds-féle kísérlet alapján beláttuk, hogy a csőáramlás jellegét alapvetően meghatározza a Reynolds-szám. Ha $Re < 2300$ a csőáramlás lamináris, a Reynolds-számot növelve előbb bekövetkezik a lamináris-turbulens átmenet, majd turbulenssé válik az áramlás.

7.1.2 Lamináris csőáramlás ($Re < 2300$)

Elsőként vizsgáljuk meg a lamináris csőáramlás esetét! Ehhez ragadjuk ki a csőáramlásból egy kis darabot, az x -tengely mutasson a csőtengely irányába, a másik koordináta pedig legyen az r radiális koordináta (7.3. ábra). A csővezeték átmérője legyen D , melyben \bar{v} átlagsebességgel jellemzett közeg áramlik.



7.3. ábra. Lamináris csőáramlás.

Tekintsünk egy kialakult csőáramlást, vagyis a csőhossz mentén a sebesség sugármenti eloszlása mindenhol azonos ($v(r)$ már nem függ x -től), az áramlás időben és térben is állandósult. Ragadjunk ki egy piciny folyadékgyűrűt az áramlásból, melynek sugara legyen r , hossza pedig dx . A folyadékgyűrű felvív oldalán a nyomás legyen p , a nyomásvesztés révén az alvív oldalán pedig $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$. A folyadékgyűrűre egyrészt hatnak a nyomáskülönbségből származó erők, másrészt a súrlódás következtében a palástfelületen egy τ csúsztatófeszültség ébred (melynek irányát még nem tudjuk). Mivel stacionárius áramlásról beszélünk, a folyadékgyűrű nem gyorsul, így a rá ható erők eredője zérus:

$$p r^2 \pi - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) r^2 \pi + \tau 2r \pi dx = 0 \quad (7.2.)$$

A (7.2.) egyenletből kifejezve a csúsztatófeszültséget, az alábbi összefüggés adódik:

$$\tau = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} dx r^2 \pi}{2r \pi dx} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{r}{2} \quad (7.3.)$$

Felhasználva a Newton-féle viszkozitási törvényt:

$$\tau = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{r}{2} = \mu \frac{dv}{dr} \quad (7.4.)$$

A λ csőszűrlődési tényező meghatározásához szükséges a sebességeloszlás meghatározása a sugár mentén. Látható, hogy a (7.4.) egyenlet egy ún. szeparábilis differenciálegyenlet, amely megoldható a változók szétválasztásával:

$$\int dv = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\mu} \int r dr \quad (7.5.)$$

Fontos megjegyezni, hogy jelen esetben $\partial p/\partial x = \text{áll.}$, mivel kialakult csőáramlásról van szó. Elvégezve az integrálást:

$$v(r) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{4\mu} r^2 + K \quad (7.6.)$$

A K integrálási konstans a peremfeltételek segítségével határozható meg. A falnál ($r = R$) a tapadás törvényének értelmében a sebesség zérus ($v(r=R) = 0$):

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{4\mu} R^2 + K \Rightarrow K = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{4\mu} R^2 \quad (7.7.)$$

Ezt visszahelyettesítve a (7.6.) egyenletbe, a következő kifejezést kapjuk:

$$v(r) = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (7.8.)$$

A (7.8.) egyenlet alapján az alábbi fontos következtetéseket vonhatjuk le:

- 1) Az előjeleket megvizsgálva a $\partial p/\partial x$ tagnak negatívnak kell lennie, hiszen mind a $v(r)$, mind pedig a $(R^2 - r^2)$ tag pozitív. Ezzel igazoltuk, hogy az *áramlás irányába* a veszteségeknek tulajdoníthatóan *csökken a nyomás*.
- 2) Mivel $\partial p/\partial x$ negatív, így a (7.4.) egyenlet alapján a τ *csúsztatófeszültség iránya is negatív* x -irányú (7.3. ábra). A csúsztatófeszültség nagysága, mivel arányos az r sugárral, *a fal felé haladva lineárisan csökken*.
- 3) A *sebesség* sugármenti eloszlása egy *másodfokú paraboloid*.

Amennyiben egy kialakult csőáramlás esetén egy véges L hosszúságú csőnek vizsgáljuk a $\Delta p'$ nyomásvesztését, akkor a következőképpen írhatjuk a nyomás x -irányú változékonyságát:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \equiv \frac{\Delta p'}{L}$$

A maximális sebesség, amely a (7.8.) egyenlet alapján a csőtengelyen ($r = 0$) adódik, kifejezhető az alábbiak szerint:

$$v_{\max} = \frac{\Delta p'}{L} \frac{1}{4\mu} R^2 \quad (7.9.)$$

Általánosságban a sugármenti sebességeloszlás ún. hatványfüggvény sebességprofil alakban írható fel:

$$v(r) = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^n \right] \quad (7.10.)$$

- lamináris csőáramlás esetén: $n = 2$
- turbulens csőáramlás esetén: $n \cong 7 \dots$

Fejezzük ki a térfogatáramot a sugármenti sebességeloszlást felhasználva. Definíció szerint:

$$q_v = \bar{v} R^2 \pi = \int_A \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_0^R v(r) 2r\pi dr \quad (7.11.)$$

A (7.11.) egyenlet alapján, hatványfüggvény sebességprofil esetén az átlagsebesség kifejezhető a következőképpen:

$$\bar{v} = v_{\max} \frac{n}{n+2} \quad (7.12.)$$

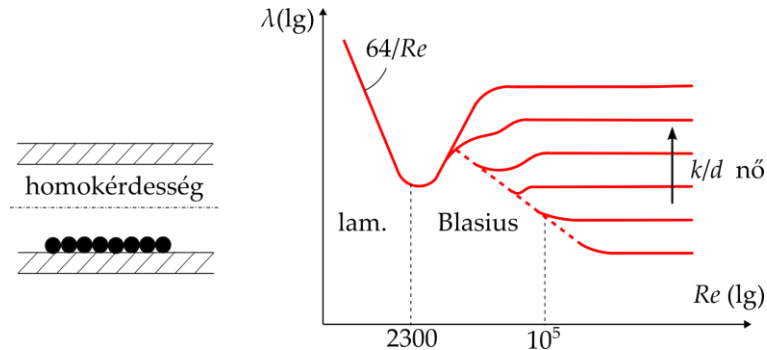
Vagyis *lamináris csőáramlás* esetén ($n = 2$) az *átlagsebesség a csőtengelyen kialakuló maximális sebesség fele* ($\bar{v} = v_{\max}/2$). Részletes levezetés nélkül, felhasználva a (7.1.), (7.9.) és (7.12.) egyenleteket továbbá a Reynolds-szám definícióját, a csősúrlódási tényező kifejezhető:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (7.13.)$$

A (7.13.) egyenlet szerint lamináris csőáramlás esetén a csősúrlódási tényező nem függ a csőfal relatív érdességétől.

7.1.3 Turbulens csőáramlás, érdes csövek

Nikuradze klasszikus méréseket végzett turbulens csőáramlásban, figyelembe véve a csőfal érdességét is. Ennek érdekében előbb különféle méretű homokszemcséket különített el eltérő finomságú sziták segítségével, majd ezeket a homokszemcséket felragasztotta a csőfal belső falfelületére. Így különböző érdességű vizsgálati csővezetékeket állított elő. Ezen a ponton vezessük be a homokérdesség fogalmát! Ez arra utal, hogy a Nikuradze-féle mérések során úgy szemléljük a csőfal érdességét, mintha homokszemcsék lennének a falon. A mérési eredmények az alábbi diagramon (7.4. ábra) foglalhatók össze, ahol logaritmikus skálán ábrázoljuk a λ csősúrlódási tényezőt a Re Reynolds-szám függvényében:



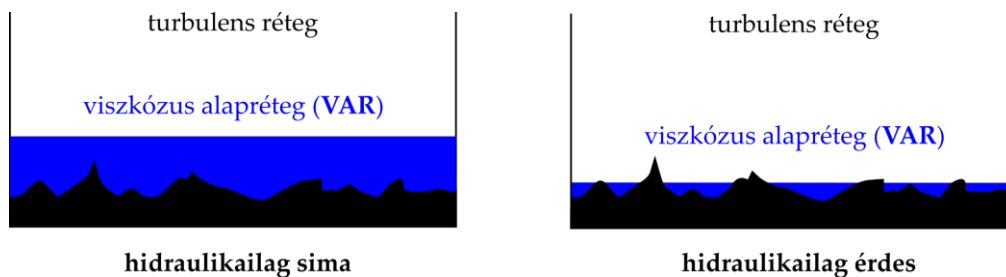
7.4. ábra. Homokérdesség és Nikuradze-hárfa.

- $Re < 2300$: A mérések igazolják a korábban levezetett, lamináris csőáramlás esetén érvényes $\lambda = 64/Re$ trendet.
- $Re > 2300$: Egy viszonylag érdes falú (nagy k/d) csővezetéknek a hárfa legfelső húrja felel meg, amely egy bizonyos Re fölött egy konstans értéket vesz fel. A csőfal érdességét folyamatosan csökkentve azt tapasztaljuk, hogy az állandósult λ csősúrlódási tényező egyre kisebb értéket vesz fel.

Észrevehető, hogy az egyre kisebb érdességgel jellemzett hurok egy közös alsó burkológörbéről ágaznak ki (szaggatott vonal). A 7.4. ábrára támaszkodva a következő érdekes jelenségre hívjuk fel a figyelmet. Képzeljük el, hogy egy adott csővezetékben egy bizonyos Reynolds-szám és relatív érdesség a jellemző $[Re]_{jel}, [(k/d)]_{jel}$. Ezen két paraméter alapján a λ csősúrlódási tényező meghatározható a diagram segítségével. Csökkentsük a

relatív érdességet a Reynolds-szám változtatása nélkül! Megfigyelhető, hogy hiába csökkentettük a relatív érdességet, az adott Reynolds-számhoz ugyanaz a λ csőúrlódási tényező tartozik.

Ezt nevezzük a *hidraulikailag sima cső* esetének. A hidraulikailag sima cső azt jelenti, hogy egy adott Reynolds-számon a relatív érdesség csökkentése nem okoz csökkenést a csőúrlódási tényező értékében. Fontos, hogy ez nem ekvivalens azzal, hogy a csőfal nem érdes, hiszen geometriai értelemben igenis ott vannak az érdességi elemek (7.5. ábra).



7.5. ábra. Hidraulikailag sima cső.

Ráközelítve csőfalra látható, hogy hidraulikailag sima cső esetén az ún. viszkozus vagy lamináris alapréteg (VAR) elfedi az érdességi elemeket, vagyis hiába csökkentjük tovább az érdességi elemek méretét, az nem befolyásolja a teljes csőáramlást, nem változik a csőúrlódási tényező. Ebben az esetben λ meghatározható a *Blasius-féle* empirikus *formula* szerint (szaggatott vonal):

$$\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}} \quad ; \quad 4000 < Re < 10^5 \quad (7.14.)$$

Ezzel szemben, ha hidraulikailag érdes a cső, akkor az adott Reynolds-számon az érdességi elemek "kitüremkednek" a VAR-ből, ezzel kihatva a csőáramlásra. Így a csőfal érdességének csökkentésével λ szintén csökken.

Fontos, hogy a Nikuradze-féle kísérletek homokérdességre vonatkoznak, ugyanakkor a műszaki gyakorlatban a csővezetékek többségére nem igaz, hogy ilyen alakú a csőfal érdessége. Ezen esetekben az ún. *Moody-diagramot* szükséges alkalmazni, amely a Nikuradze-féle mérések korrekciójával származtatható.

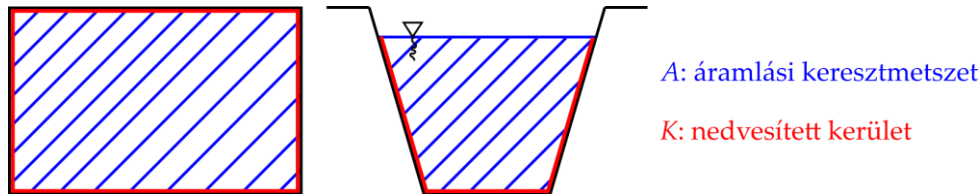
A következőkben tovább erősítjük a csőáramlások hidraulikájának gyakorlati vonatkozásait néhány, a hétköznapokban is előforduló példán keresztül, melyek beágyazódtak a mérnöki gyakorlatba. Általában az egyik legfontosabb üzemeltetési jellemző a térfogatáram (pl. elszámoltatási mérések). Ennek alapján vizsgáljuk meg egy adott q_v térfogatáram mellett, hogyan alakul egy körkeresztmetszetű csővezeték össznyomás-vesztesége (feltételezve, hogy $\lambda = \text{áll.}$):

$$\Delta p' = \lambda(Re, k/d) \frac{L \rho}{d} \frac{\rho}{2} \bar{v}^2 = \lambda \frac{L \rho}{d} \frac{\rho}{2} \left[\frac{4q_v}{d^2 \pi} \right]^2 \Rightarrow \Delta p' \sim \frac{1}{d^5}$$

Látható, hogy az össznyomás-veszteség fordítottan arányos az átmérő ötödik hatványával. Vagyis amennyiben a csővezeték falán megjelenik akár egy viszonylag kicsiny (pl. 10%) szennyezőréteg, akár 70%-kal nagyobb túlnyomást szükséges biztosítani a rendszerben.

7.2 Nem-körkeresztmetszetű vezetékek

Az eddigiekben körkeresztmetszetű csővezetékkel foglalkoztunk, de a műszaki életnek egy fontos területét képviselik azon vezetékek, amelyek nem körkeresztmetszetűek, mivel ezekben is vizet, levegőt vagy egyéb technikai közeget kell áramoltatnunk. Vizsgáljuk meg, hogy az eddig tanult elveket hogyan lehet kiterjeszteni nem körkeresztmetszetű vezetésekre (pl. téglalap, 7.6. ábra).



7.6. ábra. Nem körkeresztmetszetű csővezeték.

Akár egy téglalap keresztmetszetű, akár egy nyíltfelszínű csatorna esetében kijelölhetünk egy A áramlási keresztmetszetet, valamint a fal sűrűdés, illetve csúsztatófeszültség szempontjából lényeges K nedvesített kerületet. Ezek alapján bevezethetjük a **hidraulikailag egyenértékű átmérő** fogalmát, melynek segítségével az eddig megismert elveket alkalmazni tudjuk tetszőleges keresztmetszetű vezetésekre is:

$$d_e = \frac{4A}{K} \quad (7.15.)$$

A fenti összefüggés csak bizonyos korlátok között érvényes, például egy keskeny és hosszúkas, résszerű áramlás vizsgálatára nem alkalmas (részletek: [3]). Az előző összefüggéssel az össznyomás-veszteség:

$$\Delta p' = \lambda(Re, k/d_e) \frac{L}{d_e} \frac{\rho}{2} \bar{v}^2 \quad \text{ahol: } Re = \frac{\bar{v}d_e}{\nu}; \quad \bar{v} = \frac{q_v}{A} \quad (7.16.)$$

Nézzük meg egy egyszerű alkalmazási elvét a (7.16.) összefüggésnek. Képzeli el egy épület közmű alagútjában egy léghellátórendszernek a vezetékét, ahol rendelkezésre áll egy $a \times a$ keresztmetszetű hely. Négyzet vagy körkeresztmetszetű légtechnikai vezeték húzzunk ide be? A válaszhoz vizsgáljuk meg, hogyan alakulnak a hidraulikailag egyenértékű átmérők:

- Kör-keresztmetszetű: $d_{e,\text{kör}} = 4(d^2\pi/4)/d\pi = d = a$
- Négyzet-keresztmetszetű: $d_{e,\text{négyzet}} = 4a^2/4a = a = d_{e,\text{kör}}$

Láthatjuk, hogy a két különböző keresztmetszetű csővezetéknek megegyezik a hidraulikai átmérője. Azonban vegyük szemügyre, hogyan alakulnak az átlagsebességek a két esetben, amennyiben adott q_v térfogatáramot szükséges szállítani a vezetékben.

Mivel négyzet keresztmetszet esetén nagyobb a keresztmetszet, a következő megállapításokat tehetjük:

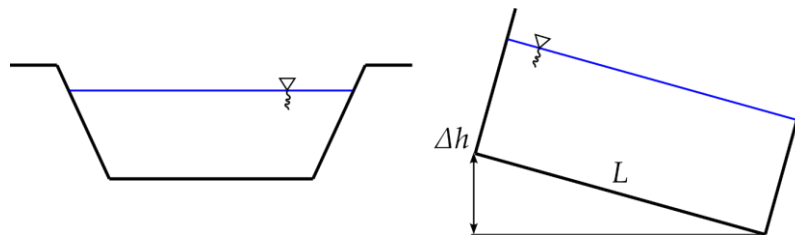
$$\bar{v}_{\text{négyzet}} < \bar{v}_{\text{kör}} \quad \Rightarrow \quad \Delta p'_{\text{négyzet}} < \Delta p'_{\text{kör}}$$

Tehát a négyzet-keresztmetszetű csővezeték kiválasztása mellett szól, hogy a nyomásveszteség és ezáltal az üzemeltetési költségek kisebbek, mint körkeresztmetszetű csővezeték esetén. Mindazonáltal a végső döntésben más szempontokat is szükséges

figyelembe venni. Többek között: ár, a négyzet-keresztmetszetű csővezeték kevésbé nyomásálló, hajlamosabb a deformációra (sarkok mechanikai szempontból feszültséggyűjtő helyekként viselkednek). Éppen ezért fokozott nyomású rendszerekben (pl. vízellátó rendszerek) nem jellemzőek a négyzet-keresztmetszetű vezeték.

7.2.1 Nyílt felszínű csatornák

Egy nyílt felszínű csatorna (pl. Duna) esetén hogyan számítható víz átlagsebessége? Ez lényeges szempont lehet például áradások esetén, ahol kérdés, hogy a folyó képes-e azt "levezetni", vagy számítanunk kell-e az árvíz bekövetkezésére az adott területen. Vizsgáljuk meg egy nyílt felszínű csatorna L hosszúságú szakaszát, amelyen Δh szintcsökkenés következik be (7.7. ábra).



7.7. ábra. Nyílt felszínű csatorna (pl. Duna).

Stacionárius áramlás esetén a szintkülönbségből származó nyomáskülönbség megegyezik a nedvesített kerületen megjelenő össznyomás-vesztéssel:

$$\rho g \Delta h = \lambda \frac{L}{d_e} \frac{\rho}{2} \bar{v}^2 \quad (7.17.)$$

A (7.17.) egyenletből kifejezve az átlagsebességet az alábbi összefüggés adódik:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2g d_e \Delta h}{\lambda L}} = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \sqrt{i d_e} \quad (7.18.)$$

ahol $i = \Delta h/L$ a csatorna esése, $\lambda = 0,02 - 0,03$ között változik. Fontos megjegyezni, hogy általában a körkeresztmetszetű műszaki csővezeték esetén durva becslésként a $\lambda = 0,02$ érték megfelelő választás. De természetesen finomabb számításokhoz λ értékét a Moody-diagram alapján szükséges pontosítani. Első közelítésként vegyük fel a $\lambda = 0,025$ középértéket, ezt visszahelyettesítve a (7.18.) összefüggésbe kapjuk az ún. **Chézy-képletet**:

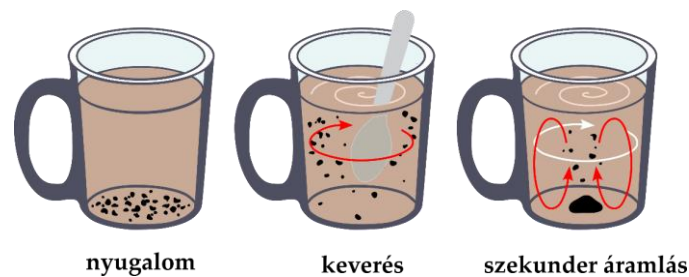
$$\bar{v} = 28 \sqrt{i d_e} \quad (7.19.)$$

A fenti összefüggés rámutat a folyók egyik különleges viselkedésére téli időszakban. Ha valóban nyílt felszínű csatornáról van szó, akkor télen előfordulhat, hogy befagy a szabad vízfelszín. A jégtakaró következtében megszűnik a szabad vízfelszín, ami hidraulikai szempontból falként viselkedik, ezzel növelve a nedvesített kerületet. A megnövekedett nedvesített kerület következtében lecsökken az egyenértékű átmérő, ami egy fokozott fojtóhatást eredményez az áramlásra. Ez képes visszatorlasztani az áramlást, és ennek köszönhetően a folyó kiléphet a medréből ott, ahol még nincs jégpáncél, ezzel elárasztva az adott területet.

7.3 Határréteg (Ludwig Prandtl - 1904)

Az eddigiekben kizárólag csőáramlásokat tárgyaltunk, azonban vizsgálatainkat szükséges kibővíteni egyéb rendszeremekkel is. Ahhoz, hogy megértsük ezen rendszeremekben lezajló áramlási és veszteségkeltő folyamatokat, fontos megismernünk néhány további jellegzetességét a súrlódásos közegeknek.

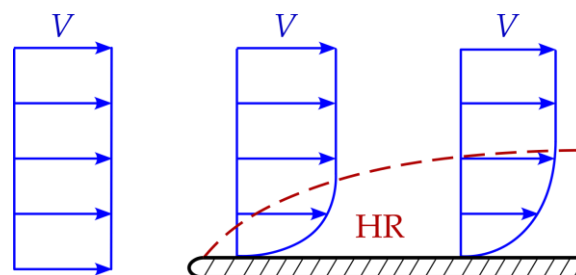
Ehhez végezzük el a következő kísérletet: egy üvegpohárba készítsünk elő egy adag teát, amelyben megtalálható néhány tealevél-darabka is. Cukrozzuk meg, ezután pedig alaposan keverjük meg egy teáskanál segítségével. Megfigyelhető, hogy egyrészt a hozzáadott cukor egy kis kupacban összegyűlik a pohár alján, másrészt a cukornál könnyebb tealevél-darabkák függőlegesen felfelé mozognak a forgástengely mentén. Milyen áramlási jelenséggel magyarázható ez a kísérleti tapasztalat? (7.8. ábra).



7.8. ábra. Tea felkeverése.

Ahhoz, hogy az előbbi, ún. tealevél-paradoxont megértsük, valamint a súrlódásos áramlások további jellegzetességeit megismerjük, a múlt évszázad elejére szükséges visszatekinteni. Ludwig Prandtl-t, német gépészmérnököt és fizikust foglalkoztatta, hogy miképpen lehetséges a súrlódás hatásának figyelembevétele, és ennek kapcsán az ő nevéhez fűződik az alábbi **határréteg (HR) elmélet** kidolgozása.

Vegyünk egy síklapot, melyet fújunk meg egy egyenes v sebességgel. Amint a közeg eléri a lapot, a tapadás törvényének értelmében a közeg sebessége a falnál zérusra csökken. Ebből adódóan kialakul egy bizonyos sebességeloszlás, amelyen keresztül a sebesség a falnál érvényes zérus értékről fokozatosan növekszik a faltól távoli sebességre, amely a zavartalan áramlást jellemzi. Ahogy az áramlás irányába haladunk a lap mentén, egyre nagyobb és nagyobb felületen érvényesül a falsúrlódás hatása. Vagyis egyre kiterjedtebbé válik az a zóna, melyen belül az áramlási sebesség a kezdeti zérus értékről felnövekszik a laptól távol érvényes zavartalan áramlási sebességre (7.9. ábra).



7.9. ábra. Síklap feletti határréteg.

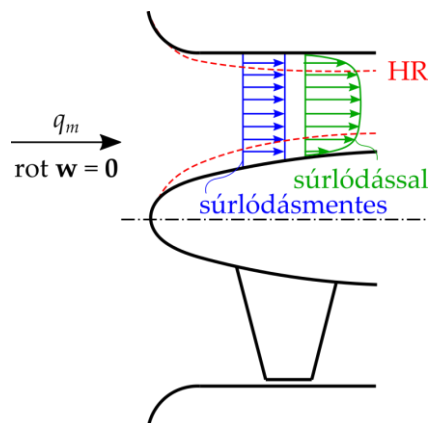
Ezen kísérlet tette lehetővé a határréteg fogalmának bevezetését. **Határrétegnek** nevezzük azt az áramlási zónát, amelyen belül a sebesség felnövekszik a falnál jellemző (zérus) értékről a zavartalan áramlás v sebességére. A súrlódás szempontjából ez a következőt eredményezi: mivel falhoz közeli határrétegben jelentősen változik a sebességprofil meredeksége, a sebességtér rotációja is változékony. Tehát a Navier-Stokes egyenletben megjelenő „ $-v \cdot \text{rot}(\text{rot} \mathbf{v})$ ” tag szerepe a határrétegben jelentős. Ezzel szemben a határrétegen kívül – ahol a sebességprofil csak viszonylag kismértékben változik – a súrlódás hatása elhanyagolható, itt alkalmazható az Euler-egyenlet.

7.3.1 Határréteg tulajdonságai

Nézzük meg a határréteg néhány fontos tulajdonságát, amelyek a különféle műszaki alkalmazásokban gyakran előfordulnak.

A) A határréteg "kiszorít"

Képzeljük el egy repülőgép hajtóművének elülső részét. A hajtóművet egy aerodinamikailag optimalizált légbeszívás jellemzi, a csatornafalon belül megtalálható egy orrkúp, amelyre felfűzték a hajtómű különféle lapátzásait (7.10. ábra). A hajtómű – vagy akár egyéb hő- és áramlástechnikai berendezés (pl. gázturbína) – tervezése során kiemelten fontos, hogy a lapátzást milyen sebességeloszlásra méretezzük. A sebességeloszlás helytelen megválasztása esetén akár jelentős teljesítmény, illetve hatásfokromlással számolhatunk.



7.10. ábra. Sebességeloszlás hajtómű lapátzásán.

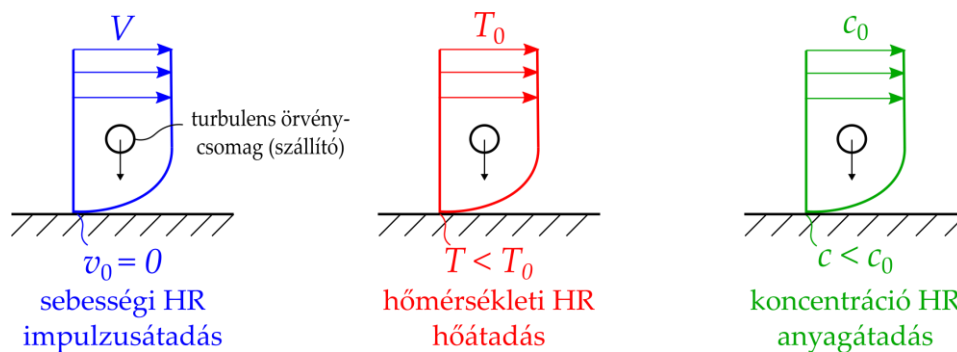
A levegő tömegárama legyen egy technológiai adottság, továbbá feltételezhető, hogy távol a légbeszívástól, a hajtóművel együtt mozgó rendszer esetén, örvénymentes a sebességtér ($\text{rot} \mathbf{w} = \mathbf{0}$). Továbbá megtanultuk, hogy Thomson örvénytételének értelmében az áramlás rotációmentes (súrlódásmentes) is marad. Következésképpen, távolabb a beszívástól egy állandó, relatív sebességeloszlás uralkodik. Azonban a súrlódás hatására a gyűrűfalakon (határolófalak) határrétegek alakulnak ki, melyeken belül alacsonyabb a sebesség. A tömegáram állandóságából következően a sebességeloszlás középső zónájában megnövekszik a sebesség. Ez úgy szemlélhető, mintha a határréteg "kiszorítaná" a határrétegen kívüli közeget, aminek eredményeképpen olyan, mintha nagyobb kiterjedésűek lennének a határolófalak.

B) A határrétegben átadási (transzport) folyamatok zajlanak le

Térjünk vissza a síklap felett kialakuló határréteghez, melyen belül az áramlási sebesség a kezdeti zérus értékről felnövekszik a laptól távol érvényes zavartalan áramlási sebességre. A sebességi határrétegben impulzustranszport játszódik le. Hiszen egyfelől faltól távolabbi, nagyobb impulzussal rendelkező turbulens örvények mozognak a szilárd fal irányába, másfelől falhoz közeli kisebb impulzussal rendelkező folyadékreszek szállítódnak a faltól távolabb, ezzel lassítva a nagyobb sebességű közeget.

Nézzünk egy példát hőátadási folyamatra! Egy hőcserélő falai mentén forró közeget áramoltatunk. Egy hőmérsékleti határréteget tudunk definiálni, ahol a falnál érvényes hőmérséklet kisebb, mint a faltól távolabb ($T_0 < T_\infty$). Vagyis ebben az esetben hőtranszport játszódik le.

A következő példa során képzeljünk el egy lapot, amit nedvesíteni kívánunk. Ez előfordulhat papírgyártási technológia esetén, ahol a papír felett nedves levegőt szükséges áramoltatni, hogy a papír ne töredezzon össze. A papír felületén legyen a koncentráció értéke c_0 , amely kisebb, mint a laptól távoli c_∞ koncentráció. Az előző példák analógiájára ebben a koncentráció-határrétegben anyagtranszport zajlik le.

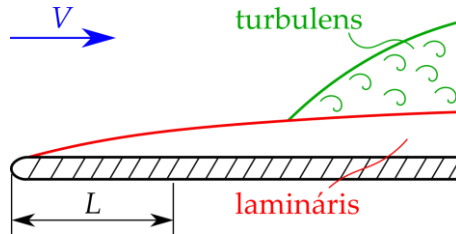


7.11. ábra. Transzportfolyamatok határrétegben.

Ezen három példa esetén a kialakuló határrétegnek hasonló a szerkezete (7.11. ábra), hiszen ugyanaz a hatásmechanizmus vezérli az egyes transzportfolyamatokat: turbulens örvények mozognak a határrétegben belül, amelyek szállítják az impulzust, hőt, illetve anyagot. Amennyiben egy műszaki folyamat során kívánalom az intenzív keveredés, átadási folyamat megvalósítása, célszerű turbulens örvényeket létrehozni. Ennek oka, hogy általánosan a turbulens transzportfolyamatok akár 2-3 nagyságrenddel intenzívebbek, mint a laminárisok (Reynolds-féle kísérlet).

C) A határrétegben csúsztatófeszültségek keletkeznek

Ismét térjünk vissza a síklaphoz, amelyet megfújunk egy V sebességgel. Közel a falhoz egy lamináris alapréteg alakul ki, majd egyre távolabb a belépőéltől egy bizonyos helyen megvalósul a lamináris-turbulens átmenet. Ezáltal a lamináris alaprétegre "ráül" egy turbulens határréteg, amelyben már turbulens örvények vannak jelen (7.12. ábra).



7.12. ábra. Síklap feletti lamináris és turbulens határréteg.

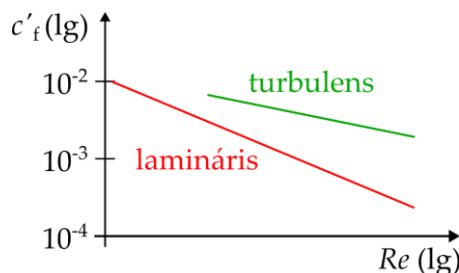
A Newton-féle viszkozitási törvény alapján ez a folyamat helyileg jellemezhető egy τ_0 fali csúsztatófeszültséggel. Vezessük be a helyi sűrűlási tényezőt, ami a fali csúsztatófeszültségnek a zavartalan megfúvási sebességből származtatott dinamikus nyomással dimenzióatlanított formája:

$$c_f' = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} V^2}$$

Jellemző hosszméretként vezessük be az L belépőéltől mért távolságot, és ennek segítségével származtassuk a Reynolds-számot:

$$Re = \frac{VL}{\nu}$$

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a helyi sűrűlási tényező a Reynolds-szám függvényében, (7.13. ábra). Mindaddig, amíg lamináris az áramlás a határrétegben a sűrűlási tényező meredeken csökken. A turbulens határréteg zónájában hirtelen megnő a sűrűlási tényező, majd a Reynolds-szám növekedésével fokozatos – a laminárisnál enyhébb – csökkenés figyelhető meg.

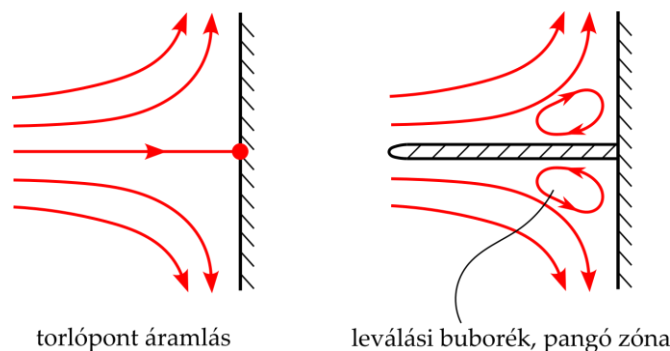


7.13. ábra. Helyi sűrűlási tényező a Re függvényében.

Összefoglalva: a sűrűlási tényező nagyjából $10^{-2} < c_f' < 10^{-3}$ között változik. Számszerűen behelyettesítve, τ_0 értékére $\sim 1 Pa$ nagyságrend adódik. Fontos azonban megjegyezni, hogy ez nem jelenti azt, hogy a sűrűlási hatása elhanyagolható. Ugyanis ezen piciny csúsztatófeszültségek hatására az áramlás szerkezete képes átalakulni, ami jelentős veszteségekhez vezethet.

D) A határréteg leválhat

Vizsgáljunk egy ún. torlópont-áramlást (7.14. ábra):



7.14. ábra. Torlópont-áramlás: leválási buborék kialakulása.

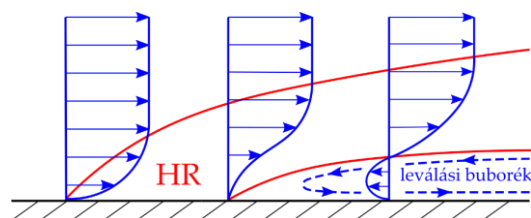
Ahogy a közeg megközelíti a falat, lassulni kezd és a középső áramvonal mentén kialakul egy torlópont. A Bernoulli-egyenlet értelmében a lelassult közeg hatására megnő a statikus nyomás. A környező áramvonalak "elkerülik" a középső áramvonalat, melyek görbültsége is jelzi a statikus nyomásnövekedés irányát.

Helyezzünk középre egy síklapot! Ennek hatására jelentős változás megy végbe az áramlás szerkezetében: a lap közelében kialakul egy pangó zóna (leválási buborék), ahol egyrészt a közeg sebessége kisebb, mint a környező sebesség, másrészt a főáramlás irányával ellentétesen egy visszaáramlás tapasztalható (7.14. ábra).

Megvizsgálva az előbbi kísérletben a leválási buborékok, pangó zónák megjelenésének okát, a jelenség létrejöttéhez alapvetően két feltétel egyidejű teljesülése szükséges:

- falsúrlódás (szilárd fal jelenléte),
- áramlás irányába növekvő a nyomás.

Tehát a fal közelében lévő folyadékrészeket egyrészt lassítja az áramlás irányába növekvő statikus nyomás, másrészt a falsúrlódás hatása is. Ebből adódóan előbb a fal közelében megállnak a folyadékrészek, majd pedig egy visszaáramlás következik be a nagyobb nyomású zóna felől a kisebb nyomású zóna felé. Ez a visszaáramlás leválasztja a határréteget a falról és az áramlási tér belsejébe tereli azt (7.15. ábra).

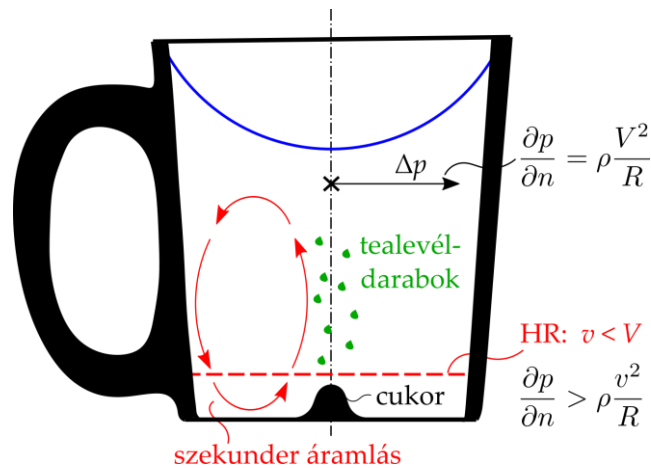


7.15. ábra. Határréteg-leválás, visszaáramlás.

A határréteg leválása több szempontból is negatív hatással bír. Egyrészt ennek okán az áramlás nem képes "követni" az általunk épített berendezések geometriáját. Másrészt a leválási zóna jelenléte össznyomás-vesztést okoz. Ebből kifolyólag elemi érdekünk, hogy intézkedéseket tegyünk a határréteg leválása ellen, melyeket a 7.3.2 alfejezetben részletezünk.

E) A határréteg szekunder áramlást okoz (tealevél-paradoxon)

Visszatérve a fejezet elején elvégzett gondolatkísérlethez, a teát megkeverve kör alakú áramvonalakon mozog az üvegpohárban a közeg. A természetes koordináta-rendszerben felírt Euler-egyenlet normál-irányú komponensegyenletéből következik, hogy görbült áramvonalak mentén a statikus nyomás, a görbületi középponttól kifelé haladva növekszik. Vagyis a forgástengelytől a pohár szélei felé haladva nő a statikus nyomás, és ez a Δp statikus nyomásnövekmény átadódik a többi lejjebb lévő folyadékrétegeknek is, egészen a pohár aljáig.



7.16. ábra. Tea-levél paradoxon.

A pohár alján azonban kialakul egy határréteg, amiben a sebesség kisebb, mint a zavartalan áramlás sebessége ($v < V$). Következésképpen a létrejött Δp nyomásnövekmény többé nem képes egyensúlyt tartani a $\rho \cdot v^2/R$ kifejezés értékével. Vagyis a pohár szélén kialakul egy olyan túlnyomású rész, ahonnan a közeg elkezd a pohár közepe felé (a forgástengely irányába) áramolni. Ez a beáramlás okozza, hogy a cukor egy kupacban összegyűlik a pohár közepén. A beáramlás után természetesen nem áll meg az áramlás, a közeg elkezd felfelé áramolni, magával ragadva a könnyebb tealevél-darabokat. A pohár alján, a forgástengely irányába áramló közeg pótlására a pohár szélein egy lefelé irányuló áramlás jön létre (7.16. ábra).

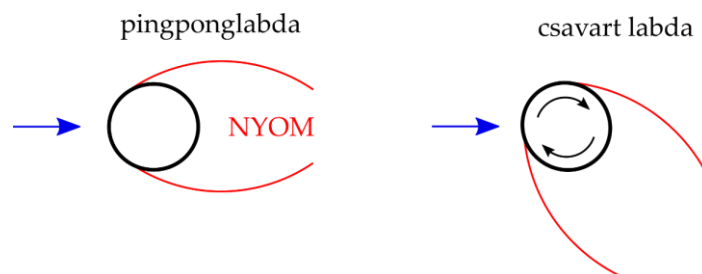
Összefoglalva a tapasztalatokat: egy ún. szekunder áramlás jelenik meg, amely rászuperponálódik a keveréssel megvalósított elsődleges áramlásra. Szekunder áramlás akkor alakul ki, ha *görbült áramvonalak síkjával párhuzamos felületen határréteg keletkezik*. A szekunder áramlás jelenléte – attól függően, hogy hol jelenik meg – lehet egyaránt káros és hasznos is. Például egy keverési folyamat esetén hasznos, hiszen ez segíti a cukor oldódását a folyadékban. Ellenben hidraulikai szempontból káros, hiszen a szekunder áramlás által képviselt mozgási energia a felhasználó számára meddő, vagyis veszteség formájában jelenik meg.

7.3.2 Határréteg-leválás elleni intézkedések

1) A fal együtt mozgatása az áramlással

Az együtt mozgattal a fali csúsztatófeszültség mérsékelhető, és ezáltal gátolható a leválás. Ez a megoldás a gépészmérnöki szakmát tekintve igen nehezen megvalósítható, inkább csak elvi megoldás, azonban a sportban találhatunk erre szemléletes példákat.

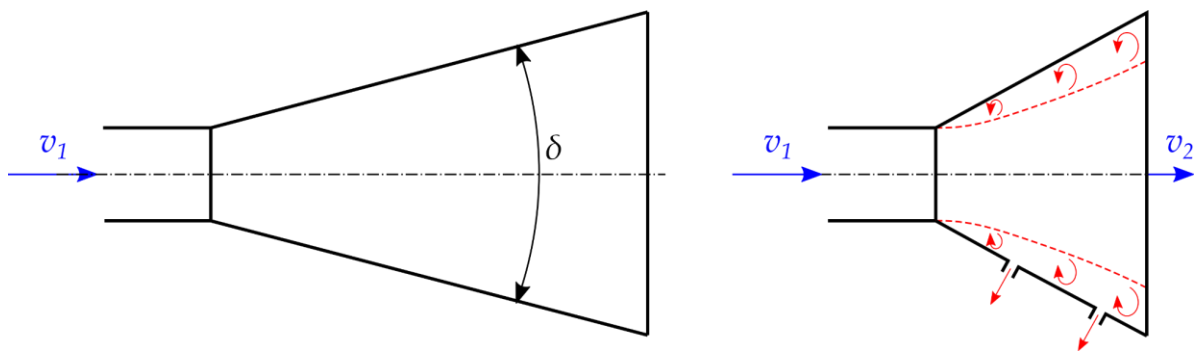
Egy pingponglabdát megütve azt tapasztaljuk, hogy együtt mozgó rendszerben a labda mögött kialakul egy leválási buborék, ahol lecsökkent sebesség jellemző, ezt nevezzük a labda nyomának (7.17. ábra). Egy csavart labda esetén a felső falfelület ugyanabba az irányba mozog, mint maga az áramlás, vagyis itt késleltethető a határréteg leválása. Ugyanakkor az alsó falfelület éppen az ellenkező irányba mozog, vagyis ezen a ponton siettetjük a leválást. Ennek megfelelően egy aszimmetrikus áramkép alakul ki a labda környezetében, így egy olyan erőkomponens hat a labdára, ami eltéríti függőleges irányba.



7.17. ábra. Határréteg-leválás késleltetése a fal együtt mozgásával.

2) A nyomásnövekedés rohamosságának csökkentése

Tekintsünk egy diffúzort, ami az áramlás irányába bővülő idomdarab. A kontinuitás értelmében a diffúzor lelassítja a közeget ($v_2 < v_1$), következésképpen a statikus nyomás növekszik. A fal közelében a súrlódás hatására a diffúzorban kialakult áramlás hajlamos a leválásra (ld. 7.3.1 fejezet). Amennyiben túlságosan nagy a diffúzor nyílásszöge, és ennek megfelelően túlságosan rohamosan nő a statikus nyomás, leválási zónák alakulnak ki a diffúzor falainak közelében. A jelenség kiküszöbölhető például egy kisebb nyílásszögű, de hosszabb diffúzor beiktatásával (7.18. ábra).



7.18. ábra. Leválás és határréteg elszívás diffúzor esetén.

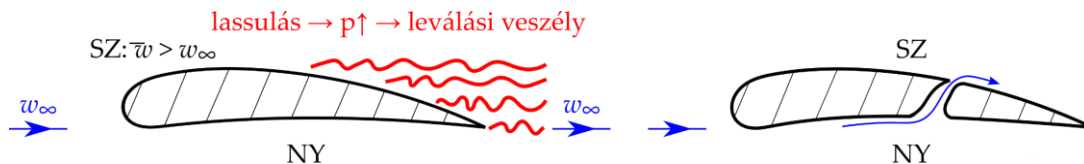
3) Határréteg elszívás

Ezen intézkedés lényege, hogy a diffúzorban a lelassult, pangó közegrészt – ami a leválási zónában található – oldalfali nyílásokon keresztül elszívjuk (7.18. ábra). A hagyományos gépészetben ezt viszonylag ritkán alkalmazzák, hiszen egy külön elszívórendszert igényel (költség, hely, stb.).

4) Határréteg frissítése nagy impulzusú folyadéksugárral

Nézzük meg egy repülőgép szárnymetszetét! Hangsúlyoznánk, hogy a repülőgép szárnyhoz hasonlóan működnek a különféle áramlástechnikai gépek lapátosításai is (7.19. ábra). A szívott oldalon (felső felület) a Bernoulli-egyenlet szerint az átlagos áramlási sebesség nagyobb, mint a zavartalan megfűvási sebesség ($w > w_\infty$). Mivel messze a szárny után is a w_∞ sebesség jellemző, a hátsó zónában a közegnek vissza kell lassulnia a megnövekedett sebességértékről. A lassuló zónában a statikus nyomás helyileg növekszik, vagyis a határréteg leválásához szükséges mindkét feltétel teljesül (fali súrlódás + áramlás irányába növekvő nyomás). Tehát egy szárnymetszet szívott oldala hajlamos a határréteg-leválásra.

Egy ún. osztott szárnyprofillal megvalósítható, hogy egy résen keresztül a nagyobb nyomású nyomott oldalról a kisebb nyomású szívott oldal felé egy impulzív átáramlás következzen be. Ez a nagy impulzusú folyadéksugár frissíti a leválni készülő határréteget ezzel visszafektetve az áramlást a szárnyra. Fontos megjegyezni, hogy ezen intézkedés a felhajtóerő-tényező csökkenésével jár, de az ezzel járó káros hatás kisebb, mint a leválás elkerüléséből származó előny.



7.19. ábra. Határréteg frissítése osztott kivitelű szárny alkalmazásával.

5) Határréteg frissítése turbulenciagenerátorokkal

Egy gyakori sztereotípiája, hogy áramlástanilag szempontból egy tompa test esetén az a kedvezőbb, ha a felülete szép sima. Egy pingpong labdát megütve kialakul körülötte egy határréteg, ami leválik a labda felületéről, ezzel egy jó széles nyomot eredményezve. Ezt nagy áramlási veszteségek és ellenállásérő jellemzi. Amennyiben alaposabban szemügyre vesszünk egy golflabdát, megfigyelhető, hogy a felületén kis bemélyedések találhatók, melyek ún. turbulenciagenerátorként működnek. A keletkező turbulens örvények frissítik a határréteg leválni készülő zónáit, ezzel késleltetve leválását. Látható, hogy a golflabda nyoma összehúzódik, lecsökken az ellenállásérő, ezzel lehetővé téve a nagyobb távolságokra való elütését (7.20. ábra).



7.20. ábra. Sima felületű gömb (pingpong labda) és golflabda nyoma [7].

7.4 Rendszerelemek hidraulikai vesztesége

Az eddigiek során a csősúrlódási veszteséggel foglalkoztunk, ahol láthattuk, hogy egy adott berendezésben (pl. csővezetékben) az össznyomás-veszteség kifejezhető az alábbiak szerint:

$$\Delta p' = \zeta \frac{\rho}{2} v_{\text{jell}}^2$$

a hidraulika tématerületén belül ζ értékét különféle empirikus módszerekkel, mérések útján határozzuk meg egy adott rendszerelemre. A következőkben ismertetjük, hogy miként számítható a mérnöki életben leggyakrabban előforduló elemek nyomás-vesztesége.

7.4.1 Diffúzor

Súrlódásmentes esetben az diffúzor működését a Bernoulli-egyenlet írja le. Ebből adódóan a megvalósított ideális össznyomás-növekedés kifejezhető a következőképpen:

$$\Delta p_{\text{id}} = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2)$$

Azonban a tapasztalat azt mutatja, hogy a diffúzorban a nyomásnövekedés az ideális esethez képest kisebb ($\Delta p < \Delta p_{\text{id}}$), és ezen két érték különbsége maga a diffúzorveszteség:

$$\Delta p_{\text{id}} - \Delta p = \Delta p'_{\text{D}}$$

Vezessük be a diffúzorhatásfok fogalmát:

$$\eta_{\text{D}} = \frac{\Delta p}{\Delta p_{\text{id}}}$$

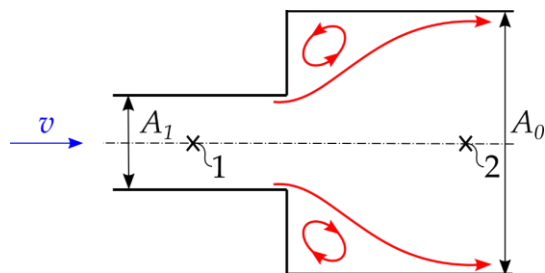
Ennek alapján a diffúzorveszteség kifejezhető az alábbiak szerint:

$$\Delta p'_{\text{D}} = \Delta p_{\text{id}} (1 - \eta_{\text{D}})$$

A diffúzorhatásfok egy kúpos diffúzor esetén akár több mint 90% is lehet közelítőleg $\delta \approx 8^\circ$ kúpszög esetén. A diffúzor beépítésével célunk a közeg lelassítása a felhasználói igényeknek megfelelően. Tehát ilyen kis nyílásszög esetén, hosszú diffúzor beépítésére van szükség, amit megnövekedett helyigény és magas gyártási költség jellemez. Ebből kifolyólag a gyakorlati életben a diffúzor kúpszögére $\delta \approx 20^\circ$ -ot választanak. Alternatív megoldásként bizonyos esetekben osztott diffúzort alkalmaznak. Ekkor a diffúzort belső terelőlapok segítségével kisebb részdifúzorokra osztjuk fel, amelyeken belül, a kisebb kúpszög következtében, mérsékelhető a leválás

7.4.2 Hirtelen keresztmetszet-növekedés (Borda-Carnot átmenet)

Sok esetben sem a tervező, sem a kivitelező nem bajlódik azzal, hogy egy szűkebb keresztmetszetből fokozatos átmenetet képezzen egy bővebbe. Ehelyett egy hirtelen keresztmetszet-növekedéssel oldják meg a feladatot (7.21. ábra).



7.21. ábra. Áramlás Borda-Carnot átmenetben.

A hirtelen keresztmetszet-bővülés következtében határréteg-leválás következik be, így a nyomás kevésbé növekszik, mint az a súrlódásmentes közeg esetére alkalmazott Bernoulli-egyenletből adódna. Ehhez kötődik az ún. Borda-Carnot veszteség, amelyet az impulzustétel alapján, levezetés nélkül, a következőképpen számszerűsíthetünk:

$$\Delta p'_{BC} = \frac{\rho}{2}(v_1 - v_2)^2$$

7.4.3 Kilépési veszteség

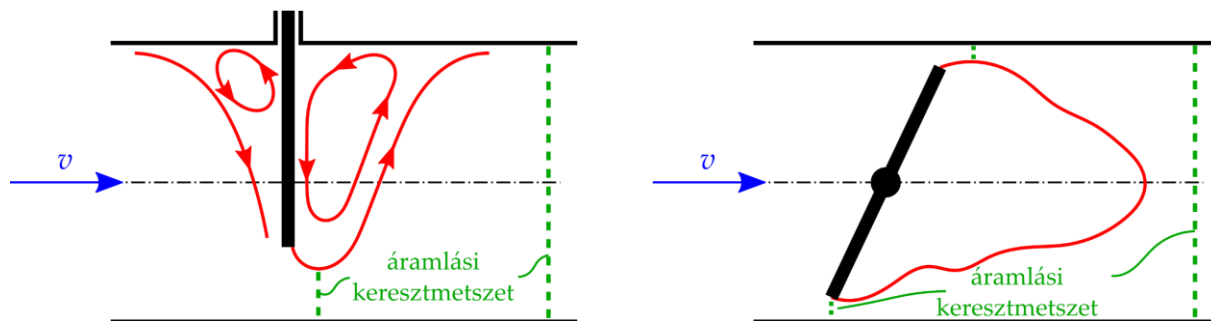
Vizsgáljuk meg a Borda-Carnot veszteséget azzal a kikötéssel, hogy minden határon túl növeljük a kilépő keresztmetszetet. Ilyen módon eljutunk egy olyan elrendezéshez, mintha nyugvó folyadékterbe bocsátanánk be folyadékot egy csővezetéken keresztül (pl. medence vízzel való táplálása). Az ennek megfelelő veszteséget kilépési veszteségnek nevezzük, melyet úgy számszerűsítünk, hogy a Borda-Carnot veszteség összefüggésébe behelyettesítünk $v_2 = 0$ -t ($A_2 \gg A_1 \rightarrow v_2 \ll v_1$):

$$\Delta p'_{BC} \rightarrow v_2 = 0 \Rightarrow \Delta p'_{ki} = \frac{\rho}{2}v_1^2$$

Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a betáplált közeg mozgási energiája teljes egészében veszteséggé alakul.

7.4.4 Záró-, szabályozó elemek

A különböző záró-, és szabályozó elemek veszteségei is nagyrészt a Borda-Carnot veszteségből eredeztethetők. Nézzünk meg például egy tolózarat (7.22. ábra)!



7.22. ábra. Áramlás tolózár (bal) és pillangószelepen keresztül.

A tolózár vesztesége kifejezhető:

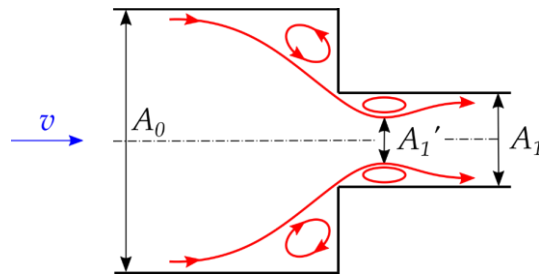
$$\Delta p'_{tol} = \zeta_{tol} \frac{\rho}{2}v^2$$

Ez durva közelítéssel a Borda-Carnot veszteségnek felel meg, de a tolózár műszaki dokumentációjában megtalálhatók ζ_{tol} értékei különféle nyitási pozíciók esetén.

Egy másik szabályozó elem lehet a pillangószelep. A 7.22. ábra látható szeleptest áramlásba helyezett tompa testként viselkedik, ami mögött ennek megfelelően egy kiterjedt nyom, leválási zóna alakul ki. Ebben az esetben is Borda-Carnot veszteség valósul meg, hiszen van egy legszűkebb keresztmetszet, majd egy viszonylag rövid szakaszon belül hirtelen felbővül az áramlás a teljes vezeték keresztmetszetére.

7.4.5 Hirtelen keresztmetszet-csökkenés

Nemcsak a hirtelen keresztmetszet-növekedés, hanem a hirtelen keresztmetszet-csökkenés is veszteségekkel jár. Itt is leválási zónák jelennek meg, melyeknek eredményeként a kisebb keresztmetszetű csőben összehúzódik, kontrahálódik a folyadék (7.23. ábra).



7.23. ábra. Hirtelen keresztmetszet-csökkenés.

A kialakuló legszűkebb A_1' keresztmetszet és az A_1 teljes geometriai keresztmetszet arányára egy α kontrakciós tényezőt állapíthatunk meg, amelyet az alábbi módon származtatunk:

$$\frac{A_1'}{A_1} = \alpha = 0,6 + 0,4 \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^2$$

ahol A_0 a belépő keresztmetszet, a 0,6 pedig a beszívó mérőperem esetén már korábban ismert érték ($A_0 \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0,6$). Egy érdekes áramlástani paradoxon, hogy a hirtelen keresztmetszet-csökkenés esete valójában egy hirtelen keresztmetszet-növekedésnek felel meg, melyet a kontrahált és az utána következő teljes vezetéki keresztmetszet között értelmezzünk:

$$\Delta p' \approx \Delta p'_{\text{BC}: A_1' \rightarrow A_1}$$

7.4.6 Belépési veszteség

Amennyiben nyugvó folyadéktérből (pl. tartályból) folyadék elvételt valósítunk meg egy csővezetéken keresztül, akkor megjelenik az ún. belépési veszteség. Ez a következőképpen szemlélhető: a csővezeték elején viszonylag egyenletes a sebességeloszlás, majd ahogy haladunk az áramlás irányába, kialakul a csőáramlás, átrendeződik a kezdeti sebességprofil. Lamináris kialakult csőáramlás esetén például egy másodfokú forgási paraboloidról beszélhetünk (ld. 7.1.2 fejezet). A sebességprofil átrendeződése közegsúrlódás útján valósul

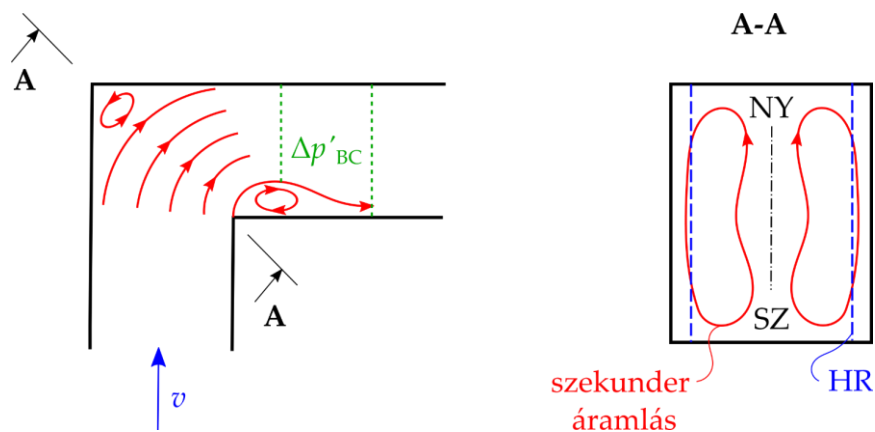
meg, így ennek megfelelően súrlódási veszteségek jelennek meg. A belépési veszteségre vonatkozó összefüggés:

$$\Delta p'_{be} = \zeta_{be} \frac{\rho}{2} v^2 \quad \begin{array}{l} \text{lamináris: } \zeta_{be} \approx 1,2 \\ \text{turbulens: } \zeta_{be} \approx 0,05 \end{array}$$

Megfigyelhető, hogy a veszteségtényező értéke turbulens áramlás esetén jóval kisebb, mint lamináris esetben. Ennek oka, hogy turbulens esetben a sebességprofil sokkal egyenletesebb (laposabb), mivel – a Reynolds-számtól függően – egy 7-ed fokú paraboloiddal írható le.

7.4.7 Könyökök, csőívek

A 7.24. ábrán látható egy lekerekítés nélküli, durva iránytörést megvalósító csőkönyök. A könyökben görbült áramvonalak alakulnak ki, valamint a sarkokban leválási zónák jelennek meg. Ez utóbbi magyarázza a könyökben kialakuló veszteségek egy részét, hiszen a leválási zónának köszönhetően keletkezik egy legszűkebb áramlási keresztmetszet, amely egy későbbi szakaszban kibővül a teljes csatorna keresztmetszetére. Vagyis egyfelől egy Borda-Carnot veszteség jelenik meg.



7.24. ábra. Áramlás csőkönyökben.

Másfelől megvizsgálva az A-A metszeti képet, a görbült áramvonalak révén (Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben) a külső kerületen nagyobb a statikus nyomás, így létrejön egy nyomott (NY), illetve egy szívott (SZ) oldal. Emellett, a görbült áramvonalak síkjával párhuzamos csőfal felületén határréteg alakul ki. Következésképpen – ahogy azt a televél paradoxonnál tárgyaltuk (ld. 7.3.1 fejezet) – egy szekunder áramlás szuperponálódik a főáramlásra. Ez a szekunder áramlás, illetve a Borda-Carnot veszteség együttesen adja a csőkönyök veszteségét:

$$\Delta p'_k = \zeta_k \frac{\rho}{2} v^2$$

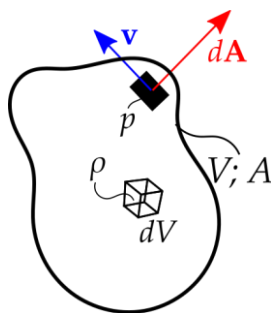
ahol a ζ_k veszteségtényező szakirodalomból, valamint termékkatalógusból meghatározható adat. Költség és helyigény növekedése mellett a veszteségek mérsékelhetők, ha tompa illesztés helyett lekerekítést alkalmazunk.

8 Gázdinamika

Összenyomható közegek áramlásának tanulmányozásakor azt tapasztaljuk, hogy az áramlási sebesség növelésével nemcsak a közeg mozgási állapota, hanem a közeg fajtérfogata is jelentősen változik. Tehát nagysebességű áramlások vizsgálata esetén a fajtérfogat, vagyis a sűrűség változása, a korábbiakkal ellentétben, nem hanyagolható el az mozgási, valamint termodinamikai állapotjellemzők meghatározásakor. Az ilyen típusú áramlástanú jelenségek leírásával foglalkozó tudományágot gázdinamikának nevezzük.

8.1 Energiaegyenlet

A további vizsgálatokhoz elsőként nézzük meg, hogy milyen összetevőkből áll egy adott gáZRész teljes energiája. A vizsgált gáZRész (8.1. ábra), amely jellemezhető egy V térfogattal és A felülettel, egy folyékony felületnek tekinthető, vagyis időben ugyanazon folyadékrészekből áll. Ez a folyadékrész odébb áramolhat, változtathatja alakját, továbbá a sűrűségváltozás révén a térfogatát is.



8.1. ábra. GáZRész jellemzői.

A fentiek figyelembevételével a gáZRész teljes energiája helyzeti, mozgási és belső energiából tevődik össze (8.1. táblázat).

8.1. táblázat. GáZRész energiájának összetevői.

GáZRész energiája		Energiaváltozás	
<i>helyzeti:</i>	gázdinamikai vizsgálatok során, ez a többi taghoz képest jellemzően elhanyagolható	<i>erőterek munkája:</i>	a helyzetienergia elhanyagolásával összhangban, ezzel a taggal a továbbiakban nem foglalkozunk
<i>mozgási:</i>	jelentős a nagy mozgási sebességek miatt	<i>felületi erők munkája:</i>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ súrlódásból származó erők munkája ➤ nyomásból származó térfogati munka ($v\rho dA$)
<i>belső:</i>	a korábbi fejezetekben tárgyalt áramlástanú jelenségek vizsgálatához képest új tag	<i>hőátadás:</i>	környezetből felvett vagy leadott hő

Stacionárius, súrlódásmentes és hőszigetelt (adiabatikus) áramlást feltételezve, a fentiek alapján a gázrész energiájának időegységre vonatkoztatott megváltozása leírható úgy, mint a mozgási és belső energiájának együttes megváltozása a nyomásból származó erők hatására:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left[\left(\frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho \right] dV = - \int_A \mathbf{v} p d\mathbf{A} \quad (8.1.)$$

ahol c_v az állandó térfogaton vett fajhő.

Vagyis a belső és a mozgási energia időegység alatti megváltozása egyenlő a felületi erők időegység alatt végzett munkájával. A gázrészre ható felületi erők időegységre jutó munkája meghatározható a gázrészt határoló elemi felületeken ébredő felületi erők ($-p d\mathbf{A}$) valamint a sebességek skaláris szorzatának összegeként, azaz integráljaként. A negatív előjel a felületelem-vektor és a ható erő ellentétes irányítottságából adódik.

Visszaemlékezve az impulzustételre, stacionárius áramlás esetén levezettük, hogy a folyadék rész impulzusa egységnyi időre vetítve mennyit változik. A levezetés során megmutattuk, hogy a térfogati integrál időegységnyi megváltozása, hogyan fejezhető ki felületi integrálással ((5.2.) egyenlet). Ezt felhasználva, valamint az egyenlet jobb oldalát osztva és szorozva a sűrűséggel, a (8.1.) egyenlet a következőképpen írható:

$$\int_A \left[\left(\frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho \right] (\mathbf{v} d\mathbf{A}) = - \int_A \left[\left(\frac{p}{\rho} \right) \rho \right] (\mathbf{v} d\mathbf{A}) \quad (8.2.)$$

Összevonva az egyenlet bal és jobb oldalát:

$$\int_A \left(\frac{v^2}{2} + c_v T + \frac{p}{\rho} \right) (\rho \mathbf{v}) d\mathbf{A} = 0 \quad (8.3.)$$

Felhasználva a gáztörvényt, a zárójelben lévő kifejezés átalakítható az alábbiak szerint:

$$\frac{p}{\rho} = RT = (c_p - c_v)T \quad \Rightarrow \quad c_v T + \frac{p}{\rho} = c_p T$$

Ezzel a (8.3.) egyenlet:

$$\int_A \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) (\rho \mathbf{v}) d\mathbf{A} = 0 \quad (8.4.)$$

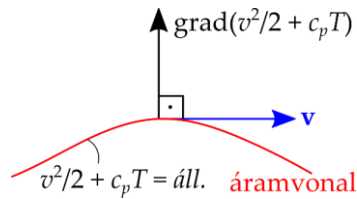
Ezután a Gauss-Osztrogradskij-tétel segítségével alakítsuk át a (8.4.) egyenletben szereplő felületi integrált térfogati integrállá, majd alkalmazzuk a divergencia skalár-vektor szorzatra vonatkozó tulajdonságát:

$$\int_V \operatorname{div} \left[\left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) (\rho \mathbf{v}) \right] dV = \int_V \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) (\rho \mathbf{v}) dV + \int_V \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV \quad (8.5.)$$

A kontinuitás tétele értelmében $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$, tehát a következő egyenletet kapjuk:

$$\int_V \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) (\rho \mathbf{v}) dV = 0 \quad (8.6.)$$

A fenti kifejezésben megjelenő integrálandó mennyiség két vektor skaláris szorzata, amely abban az esetben zérus, ha a két vektor merőleges egymásra (8.2. ábra).



8.2. ábra. Energiaegyenlet szemléltetése.

A helyi sebességvektorok definíció szerint érintőlegesek az áramvonal mind egyes pontjában, amire tehát merőleges az (8.6.) kifejezésben szereplő gradiens vektor. A gradiens vektor egyik tulajdonsága, hogy merőleges az ún. szintfelületekre (szintvonalakra), vagyis a gradiens vektorban megjelenő skalármennyiség állandó az áramvonal mentén.

Összefoglalva az eddigieket, amennyiben:

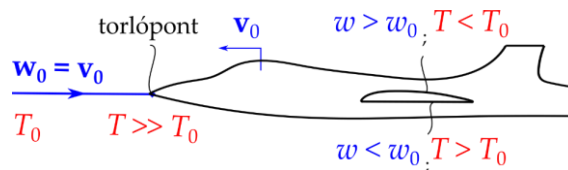
- az áramlás stacionárius,
- az erők hatását elhanyagoljuk,
- a közeg súrlódásmentes és hőszigetelt = izentrópus,

az *energiaegyenlet* adott áramvonal mentén felírható a következőképpen:

$$T + \frac{v^2}{2c_p} = \text{áll.} = T_0 \quad (8.7.)$$

ahol T a statikus hőmérséklet, $v^2/(2 \cdot c_p)$ a dinamikus hőmérséklet, és T_0 az összhőmérséklet. Tehát az energiaegyenlet a fenti feltételezések mellett azt mondja ki, **az összhőmérséklet (T_0) áramvonal mentén állandó**. Az összefüggés formailag hasonló a Bernoulli egyenlethez, hiszen mindkét összefüggés az energiamegmaradást fejezi ki.

Az energiaegyenlet alapján fontos mérnöki trendek állapíthatók meg, ehhez pedig térjünk vissza az X-15-ös repülőgép példájához (2.2.3 fejezet). Tegyük fel, hogy a repülőgép sebessége v_0 , amely stacionárius áramlás esetén úgy szemlélhető, mintha a levegő egy $w_0 = v_0$ relatív sebességgel haladna a repülőgép irányába. Távolság a repülőgéptől, a nyugvó légtérben legyen a hőmérséklet T_0 , továbbá vegyünk fel egy áramvonalat a távoli pont és a repülőgép orrpontja között, ahol egy torlópont alakul ki (8.3. ábra).

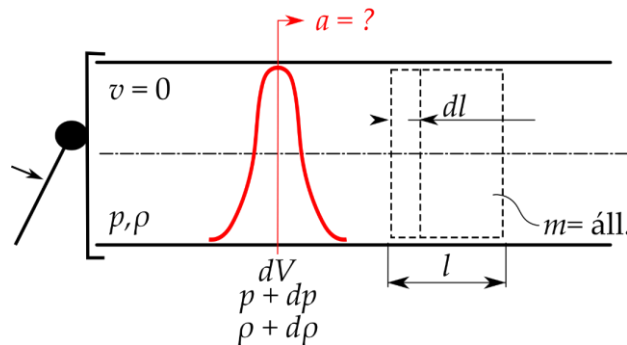


8.3. ábra. X-15-ös repülőgép áramlási viszonyai (energiaegyenlet).

A torlópontban a közeg sebessége zérusra csökken, vagyis az energiaegyenlet értelmében a hőmérséklete jelentősen megnő. A repülőgép szárnyát vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy a szívott oldalon, mivel $w > w_0$, lecsökken a közeg hőmérséklete ($T < T_0$). A nyomott oldalon pedig éppen ellenkező hatás figyelhető meg, megnő a lelassult közeg hőmérséklete. Tehát jelentős hőmérsékletkülönbségek adódnak a repülőgép szárnyának két oldala között. Annak érdekében, hogy a szárnyak kibírják nagy hőmérsékleteket, és a nagymértékű hőfeszültségeket, megfelelő ötvözetből szükséges gyártani azokat.

8.2 A hang terjedési sebessége gázokban

A repülőgépes példa során nem részleteztük az a_0 hangterjedési sebesség értékét. Annak tisztázására, hogy miképp származtatható ez a mennyiség, végezzük el a következő gondolatkísérletet. Vegyünk egy csövet, amelyben nyugvó gáz található, jellemeze ezt a gázt egy bizonyos p nyomás és ρ sűrűség. A cső egyik végére rögzítsünk egy rugalmas membránt, melyre üssünk rá valamilyen eszközzel (pl. dobverő). Az ütés következtében a rugalmas membrán deformálódik, és a hozzá legközelebb lévő, kezdetben nyugvó levegőrétegeket dv sebességű mozgásba hozza. Ennek hatására a közeg összenyomódik, sűrűsége, nyomása és hőmérséklete megnő. Ez a kezdeti kicsiny dv megzavarás tovább terjed a cső hossza mentén egy a (hang)sebességű hullám formájában (8.4. ábra).



8.4. ábra. Hullámterjedés sebessége gázokban.

Az a hangsebesség meghatározásához emlékezzünk vissza a csővezeték hirtelen zárása esetén tanult Allievi-elméletre, ahol a következő összefüggést ((5.13.) egyenlet) vezettük le:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

A rugalmassági modulus kifejezéséhez alkalmazzuk kreatív módon a Hooke-törvényt: e szerint a nyomófeszültség (σ) arányos a relatív összenyomódással (ε), ahol az arányossági tényező a rugalmassági modulus (E):

$$\sigma = E\varepsilon$$

A vizsgált hullámra vonatkozóan a nyomófeszültség legyen az elemi megzavarás hatására bekövetkező kicsiny nyomásváltozás:

$$\sigma = dp$$

A relatív méretváltozás származtatásához tekintsük a 8.4. ábrát. A cső belsejében jelöljünk ki egy állandó m tömegű gázrészlet, melynek zavartalan hossza legyen l . Amint a hullámfront eléri a gázrészletet, az összenyomódik egy bizonyos dl mértékben. Ezek alapján a gázrészlet relatív megrövidülése kifejezhető az alábbi módon:

$$\varepsilon = \frac{dl}{l} \quad A = \text{áll.} \Rightarrow = \frac{dV}{V} \quad m = \text{áll.} \Rightarrow = \frac{d\rho}{\rho}$$

A fenti két jellemzőt visszahelyettesítve a hangsebességre vonatkozó összefüggésbe a következőt kapjuk:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\varepsilon}} = \sqrt{\frac{dp}{\rho(d\rho/\rho)}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (8.8.)$$

Vagyis a hullámterjedés sebessége az egységnyi sűrűségváltozásra eső nyomásváltozás négyzetgyöke. Ennek kifejezéséhez az állapotváltozásra vonatkozóan a következő feltételezésekkel élünk:

- **Súrlódásmentes:** ennek jogossága a kicsiny dv megzavarási sebességgel magyarázható. Visszagondolva a hidraulika témakörére láthattuk, hogy a különböző veszteségeket gyakorta a dinamikus nyomásra vetítettük. Következésképpen kis sebességek mellett az áramlási veszteségek is mérsékeltek.
- **Hőszigetelt:** ez azzal indokolható, hogy a megzavarás gyorsan terjed tovább, és e gyors folyamat során nincs kellő ideje a közegnek a hőcserére.

Ezen két feltétel mellett ún. izentrópiikus állapotváltozás megy végbe, ahol a nyomás és a sűrűség viszonya az alábbi módon írható fel:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{áll.} \quad (8.9.)$$

ahol $\kappa = c_p / c_v$ az adiabatikus kitevő, melynek értéke kétatomos gázokra és ezek keverékeire (pl. levegő) $\kappa = 1,4$. A (8.9.) egyenlet alapján a pillanatnyi nyomás kifejezhető a kezdeti nyomás és sűrűség (p_1, ρ_1) segítségével az alábbi módon:

$$p = p_1 \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^\kappa \quad (8.10.)$$

A (8.10.) egyenletet deriválva a sűrűség szerint, majd visszahelyettesítve a (8.8.) egyenletbe, a **hangsebességre** kapjuk:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{p_1 \kappa \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\kappa-1} \frac{1}{\rho_1}} = \sqrt{\kappa p_1 \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^\kappa \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right) \frac{1}{\rho_1}} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa RT} \quad (8.11.)$$

Megfigyelhető, hogy a hangsebesség adott közeg esetén csak a hőmérséklet függvénye ($a = a(T)$), amelynek fizikai magyarázata, hogy a gázcseppcsek rendezetlen mozgását, belső energiáját a hőmérséklet reprezentálja, és a kezdeti megzavarás a részecskék rendezetlen mozgása révén adódik tovább a közegben.

A **Mach-szám** (Ma) a helyi áramlási sebesség és helyi hangsebesség hányadosa:

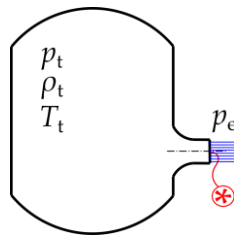
$$Ma = \frac{v}{a}$$

Visszatérve az X-15 kísérleti repülőgép példájához (8.3. ábra), az elért legnagyobb sebesség meghaladta a helyi hangsebesség 6.7 szorosát, vagyis legnagyobb elért Mach-szám körülbelül $Ma_0 = 6.7$, ami nagyságrendileg adott magasságon $v_0 = 7200 \text{ km/h}$ -ás sebességnek felelt meg:

$$Ma_0 = \frac{v_0}{a_0} \approx 6.7 \quad \Rightarrow \quad v_0 \approx 7200 \text{ km/h}$$

8.3 Kiömlés tartályból

Az előzőekben megismerkedtünk az energiaegyenlettel és a hullámterjedési sebességgel, ebben a fejezetben pedig ezek gyakorlati jelentőséget vesszük górcső alá. A gépészmérnöki életben gyakran előfordul, hogy egy túlnyomás alá helyezett tartályból szükséges valamilyen gázt lefúvatni adott kiömlő nyíláson keresztül (8.5. ábra). Például egy pneumatikus fékrendszer esetén, amennyiben fékerőt szeretnénk kifejteni, a membrános fékkamrát meglehetősen gyorsan fel kell tölteni sűrített levegővel. Azonban, ha a kerék a megcsúszás határállapotába kerül, akkor az ún. ABS funkciónak (blokkolásgátló) be kell indulnia, azaz nagyon gyorsan el kell engedni a fékkamrában lévő sűrített levegő egy részét. E lefúvatás egy-egy rövid szakaszát modellezhetjük az alábbi, „kiömlés tartályból” folyamattal.



8.5. ábra. Kiömlés tartályból.

A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor egy tartályt feltöltünk adott állapotjelzőjű gázzal (p_t , δ_t , T_t) és p_e ellennyomás – pl. atmoszférikus kiáramlás esetén a környező légtér nyomása – mellett lefúvatjuk azt. A kialakuló áramlási folyamat egyik nagyon fontos jellemzője az ún. nyomásviszony, amely az ellennyomás és a tartályban uralkodó nyomás viszonyát fejezi ki (p_e / p_t).

További gyakorlati alkalmazás lehet, ha egy turbinát kívánunk meghajtani nagynyomású tartályból vagy égéstérből lefúvatott gáz segítségével. Ekkor egy másik lényeges technológia paraméter a kiáramló gáz tömegárama:

$$q_m = \rho^* v^* A^*$$

Vizsgáljuk meg, hogy a különféle jellemzők változtatása mellett, hogyan alakul a tömegáram! Első közelítésben egy **egyszerű kiömlőnyílást** vegyünk alapul, ami azt jelenti, hogy a kiömlés legszűkebb, „*“-gal jelölt keresztmetszete a kiömlőnyílás legvégén található. A különféle kiömlési esetekhez tartozó nyomásviszonyokat a következők szerint kategorizáljuk:

8.3.1 Nyomásviszony: $0,95 \leq p_e / p_t < 1$

Ebben az esetben a következők érvényesek az áramlás jellemzőire:

- $p^* = p_e$ (Euler-egyenlet normális-irányú komponense),
- izentrópikus állapotváltozás,
- $\rho \approx \text{áll.}; \rho^* \approx \rho_t$,
- v^* : a fenti feltételek mellett a Bernoulli-egyenlet alapján számítható:

$$v^* = \sqrt{\frac{2}{\rho_t}(p_t - p_e)} = \sqrt{\frac{2p_t}{\rho_t}\left(1 - \frac{p_e}{p_t}\right)} = \sqrt{2RT_t\left(1 - \frac{p_e}{p_t}\right)}$$

8.3.2 Nyomásviszony: $(p_e / p_t)_{\text{krit}} \leq p_e / p_t < 0,95$

Ebben az állapotban a következő módon határozhatók meg az áramlás jellemzői:

- $p^* = p_e$ (Euler-egyenlet normális-irányú komponense),
- izentrópikus állapotváltozás,
- $\rho^* = \rho_t \left(\frac{p^*}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \rho_t \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$,
- A tömegáram származtatásához nemcsak a sűrűség (ρ^*), hanem a sebesség is szükséges ($v^* = ?$). Ehhez írjuk fel az energiaegyenletet:

$$T_t = T^* + \frac{v^{*2}}{2c_p} \Rightarrow v^* = \sqrt{2c_p(T_t - T^*)} = \sqrt{2c_p T_t \left(1 - \left(\frac{T^*}{T_t}\right)\right)}$$

Az izentrópikus állapotváltozástól a T^* / T_t nyomásviszony kifejezhető:

$$v^* = \sqrt{2c_p T_t \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

Stacionárius áramlás esetén, amennyiben rögzítjük a tartályra jellemző állapotjelzőket, a fenti egyenletből következik, hogy a nyomásviszony csökkentésével a v^* kiáramlási sebesség növekszik. Eljuthatunk egy olyan **kritikus állapotba** (krit), amely esetén a kiáramlás sebessége megegyezik a helyi hangsebességgel ($v^* = a$).

Kritikus hőmérsékletviszony (legszűkebb keresztmetszet):

A kritikus nyomásviszony meghatározásához először az energiaegyenletet alapján vezessük le a kritikus hőmérsékletviszonyt:

$$T_t = T^* + \frac{v^{*2}}{2c_p} \stackrel{v^* = a^*_{\text{kritikus}}}{\Rightarrow} = T^* + \frac{a^{*2}}{2c_p} = T^* + \frac{\sqrt{\kappa R T^*}^2}{2c_p} = T^* \left[1 + \frac{\kappa R}{2c_p}\right]$$

Ezt követően fejezzük ki a κ izentrópikus kitevőt és az R specifikus gázállandót, a fajhók segítségével:

$$T_t = T^* \left[1 + \frac{\kappa R}{2c_p}\right] = T^* \left[\frac{2c_p + \frac{c_p}{c_v}(c_p - c_v)}{2c_p}\right] = T^* \left[\frac{2 + \kappa - 1}{2}\right] = T^* \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)$$

Ezzel a kritikus hőmérsékletviszony:

$$\left(\frac{T}{T_t}\right)_{\text{krit}} = \frac{2}{\kappa + 1} \quad (= 0,83) \quad (8.12.)$$

Kritikus sűrűségviszony (legszűkebb keresztmetszet):

Fő célunk a kritikus nyomásviszony meghatározása, melyhez a következő lépésben fejezzük ki a kritikus sűrűségviszonyt. Ehhez bővítsük az (8.12.) egyenletben kiszámított kritikus hőmérsékletviszonyt az R specifikus gázállandóval:

$$\left(\frac{T}{T_t}\right)_{\text{krit}} = \left(\frac{RT}{RT_t}\right)_{\text{krit}} \stackrel{\text{gáztörvény}}{\Rightarrow} \left(\frac{p \rho_t}{\rho p_t}\right)_{\text{krit}} = \left(\frac{p}{p_t}\right)_{\text{krit}} \left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)_{\text{krit}}^{-1}$$

Izentrópiikus állapotváltozást feltételezve:

$$\frac{p}{p_t} = \left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)^\kappa \quad (8.13.)$$

Ezt helyettesítsük vissza az előző egyenletbe:

$$\left(\frac{T}{T_t}\right)_{\text{krit}} = \left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)_{\text{krit}}^\kappa \left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)_{\text{krit}}^{-1} = \left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)_{\text{krit}}^{\kappa-1}$$

Ezzel a kritikus sűrűségviszony:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)_{\text{krit}} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (= 0,63) \quad (8.14.)$$

Kritikus nyomásviszony (legsűkebb keresztmetszet):

A kritikus nyomásviszony az (8.13.) és (8.14.) egyenletek alapján a következő:

$$\left(\frac{p}{p_t}\right)_{\text{krit}} = \left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)_{\text{krit}}^\kappa = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (= 0,53) \quad (8.15.)$$

Ez számszerűsítve azt jelenti, hogy egy festékszóráshoz használható kompresszor sűrített levegő tartályában elegendő a környező atmoszférikus nyomáshoz képest 1 bar túlnyomást létesíteni ahhoz, hogy a közeg hangsebességgel áramoljon ki a tartályból.

8.3.3 *Nyomásviszony:* $0 \leq p_e / p_t < (p_e / p_t)_{\text{krit}}$

Ebben az állapotban a következő módon határozhatók meg az áramlás jellemzői:

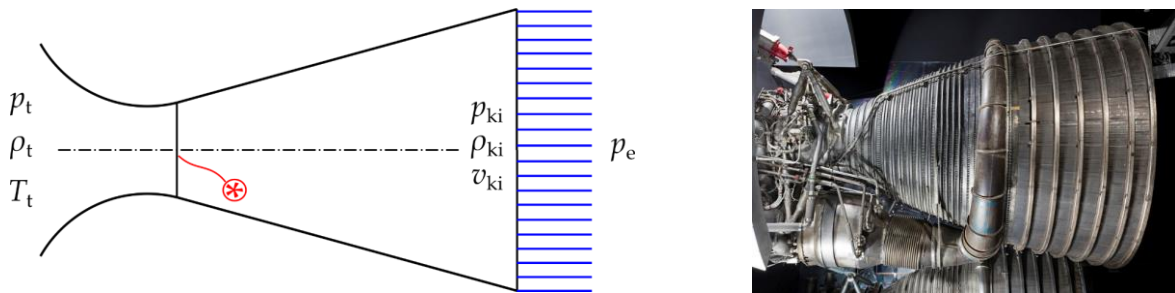
- $p^* > p_e$: az a tapasztalat, hogy a kritikus nyomásviszony alatt az ellennyomás csökkentésének információja – amely szíváshullám formájában hangsebességgel terjed – nem képes bejutni a tartályba a legsűkebb keresztmetszeten keresztül, ahol hangsebességgel áramlik ki a közeg. Vagyis nem változnak a kiáramlási viszonyok, következésképpen a gáz nem képes a legsűkebb keresztmetszetig p_t nyomásról p_e nyomásra expandálni.
- nem izentrópiikus az állapotváltozás (*fojtott expanzió*): a $p^* \rightarrow p_e$ nyomáscsökkenés csak veszteségek révén valósul meg.
- $\rho^* = \rho_t \left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)_{\text{krit}}$, mivel a sűrűség megegyezik a kritikus sűrűséggel.
- $v^* = \sqrt{2c_p T_t \left[1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)_{\text{krit}}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$, a nyomásviszony megegyezik a kritikus nyomásviszonnyal, mivel hangsebességgel áramlik ki a közeg.

8.4 Laval-fúvóka

Az egyszerű kiömlő nyílásnak korlátja, hogy hiába hozunk létre túlnyomást a tartályban, nem lehetséges hangsebesség felé gyorsítani az áramlást. Azonban létezik egy speciális kiömlőnyílás, melynek szemléletes példája egy hordozórakéta hajtóműve. Az impulzustételt felírva a tolóerőre a következő adódik:

$$R = \rho_{ki} v_{ki}^2 A_{ki}$$

Vagyis érdekünk a kilépő sebesség hangsebesség felletti növelése ($v_{ki} > a_{ki}$). Cél, hogy a kilépésre jellemző Mach-szám 1 feletti értéket vegyen fel ($Ma_{ki} > 1$) a veszteségek mérséklése mellett, vagyis izentrópikus körülmények között. Ennek megvalósításra szolgál a hordozórakéta alján megfigyelhető tölcészerű szerkezet, az ún. Laval-fúvóka (8.6. ábra), amely segítségével hangsebesség fölé gyorsítható a kilépő gáz.



8.6. ábra. Laval-fúvóka [8].

Helyesen méretezve:

- $0 \leq p_e / p_t < (p_e / p_t)_{krit}$
- $p_{ki} = p_e$
- izentrópikus az állapotváltozás,
- $\rho_{ki} = \rho_t \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$

A Laval-fúvóka helyes méretezési elve a következőn alapszik: kívánalom egy bizonyos tömegáram megvalósítása, amely a fúvóka „*” jelölt legszűkebb keresztmetszetén áramlik keresztül. A kontinuitás értelmében biztosítanunk kell, hogy a kilépésnél is ugyanez a tömegáram valósuljon meg, izentrópikus körülmények között:

$$q_m = q_m^* = q_{m,ki} \Rightarrow \rho^* v^* A^* = \rho_{ki} v_{ki} A_{ki}$$

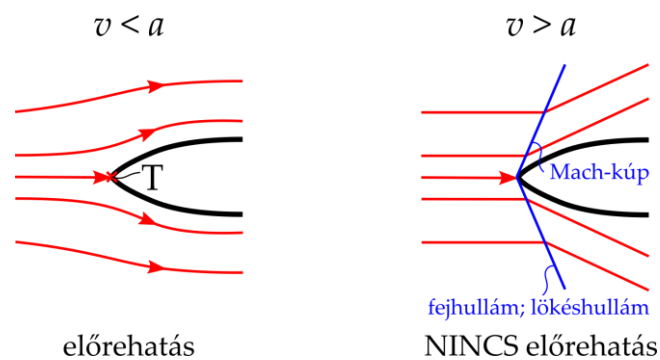
A fenti egyenlet bal oldalába behelyettesítve a 8.3.3 fejezetben a jobb oldalába pedig 8.3.2 fejezetben tárgyalt összefüggéseket:

$$\rho_t \left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)_{krit} \cdot \sqrt{2c_p T_t \left[1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)_{krit}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} A^* = \rho_t \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{2c_p T_t \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_t}\right)_{krit}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} A_{ki} \quad (8.16.)$$

Egy adott nyomásviszonyra megtervezett Laval-fúvóka esetén, amennyiben a fenti egyenletből kifejezzük a kilépő keresztmetszetet, adódik, hogy $A_{ki} > A^*$. Ennek magyarázata, hogy a közeg gyorsítása közben expandál, így csökken a nyomása és a sűrűsége is.

Hangsebesség alatt ezt a csökkenést kompenzálja a közeg szűkülő szakaszbeli sebességnövekedése. Azonban hangsebesség fölé gyorsított közeg esetén, a sűrűség csökkenésnek megfelelő térfogatnövekedést *folyamatosan bővülő idomdarabbal* szükséges kompenzálni.

A következőkben egy szemléletes példán keresztül rámutatunk, hogy mennyire eltérően viselkedik egy áramlásba helyezett test, hangsebesség alatt, illetve felett. Ehhez elsőként együtt mozgó rendszerből vizsgáljuk meg egy repülőgépet, hangsebesség alatt. Az érkező közeg "támadja" a repülőgépet, majd a képzeletbeli középső áramvonalon a gép orrkúpjához eljutva felütközik azon egy torlópontot kialakítva. Ezen áramvonal mentén fokozatosan csökken a közeg sebessége és nő a nyomása, egészen torlóponti nyomásig. Következésképpen a test előre hat, hiszen maga előtt folyamatosan lassítja a közeget, amely a környező áramvonalak görbültségén is megmutatkozik (8.7. ábra):



8.7. ábra. Repülőgép orrkúpja hangsebesség alatt (bal) és felett (jobb).

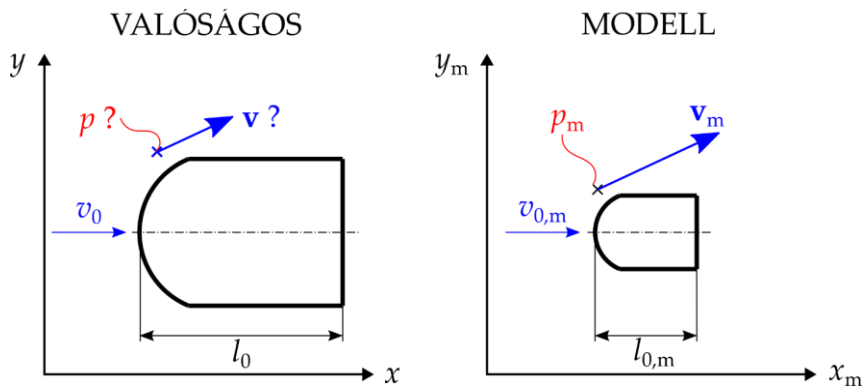
Hangsebesség felett, a test "érkezésének" információja az elemi megzavarások révén hangsebességgel terjed, ugyanakkor maga a test hangsebességénél gyorsabban mozog. Vagyis az együtt mozgó rendszerben nincs előre hatás, a közeghez nem jut el információ a test érkezéséről. Ennek eredményeként kialakul egy ún. *fejhullám / lökeshullám*, amelyen keresztül a nyomásnövekedés ugrásszerűen és nem fokozatosan következik be. Ezen fejhullám alakja kúpos, melyet ebből adódóan *Mach-kúp*nak nevezünk. A közeg számára a test érkezése kizárólag a Mach-kúp után érzékelhető.

Ez gyakorlatban a következőben nyilvánul meg: amennyiben egy hangsebességénél nagyobb sebességgel mozgó repülőgép közelít egy álló megfigyelő felé, mindaddig nem hallható a repülőgép zaja, amíg a repülőgép által keltett Mach-kúp formában terjedő lökeshullám el nem éri magát a megfigyelőt. Ezt követően hirtelen, robbanásszerűen hallható a repülőgép zaja, melyet *hangrobbanásnak* nevezünk.

9 Áramlások hasonlósága

Az iparban sűrűn előfordul, hogy valamilyen fennálló üzemzavar, működési anomália elkerülésére szükséges javaslatot tenni, melyhez sokszor elengedhetetlen a laboratóriumi mérések végeztetése. A *valóságos*, ipari geometriai léptékek akár több tíz métereseek is lehetnek, így az ezen végzett kísérlet-sorozatokat erősen korlátozzák – többek között – a gyártási költségek. Ebből kifolyólag általában célszerű törekedni a geometriai méretek zsugorítására, vagyis egy ún. *kisminta (modell)* létrehozására. Ebben a fejezetben ismertetjük, hogy melyek a valóságos, nagy kivitel esetén kialakuló áramlás laboratóriumi modellezésének feltételei.

Első közelítésben vizsgáljuk meg a hasonlósági kritériumokat állandó sűrűségű ($\rho = \text{áll.}$) közegekre. Kiindulásul tekintsük egy berendezés keverőelemének kisminta modellezését. A **9.1. ábra** bal oldalán a valóságos berendezés keverőelemének lapátmetszete, jobb oldalon pedig annak kicsinyített mása, kismintája látható.



9.1. ábra. Keverőelem valóságos (bal) és kisminta modellje (jobb).

A valóságos lapátmetszet jellemző geometriai mérete legyen a lapát húr hosszúsága (l_0). A forgó lapátokkal együtt mozgó koordináta-rendszerben a folyadék v_0 sebességgel támadja a testet. Cél az áramlási tér adott pontjaiban a különféle áramlási jellemzők (pl. p nyomás, v sebesség) meghatározása. Ehhez készítsünk egy kismintát, melynek húr hosszúsága legyen $l_{0,m}$, a beállított modellezési sebesség pedig $v_{0,m}$. Amennyiben helyesen járunk el a modellezés során, a laboratóriumban mért nyomások (p_m) és sebességek (v_m) átskálázhatók a nagy kivitelre. Erre építve begyűk sorra a főbb dimenziós, illetve dimenziótlan jellemzőket (**9.1. táblázat.**).

9.1. táblázat. Áramlások hasonlósága: dimenziós és dimenziótlan jellemzők.

Jellemzők	Valóságos	Modell
Jellemző idő:	$t_0 = \frac{l_0}{v_0}$	$t_{0,m} = \frac{l_{0,m}}{v_{0,m}}$
Dimenziótlan sebesség:	$\frac{\mathbf{v}}{v_0} = f\left(\frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}, \frac{z}{l_0}, \frac{t}{t_0}\right)$	$\frac{\mathbf{v}_m}{v_{0,m}} = f\left(\frac{x}{l_{0,m}}, \frac{y}{l_{0,m}}, \frac{z}{l_{0,m}}, \frac{t}{t_{0,m}}\right)$
Dimenziótlan nyomás:	$\frac{p}{\rho v_0^2} = F\left(\frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}, \frac{z}{l_0}, \frac{t}{t_0}\right)$	$\frac{p_m}{\rho_m v_{0,m}^2} = F\left(\frac{x}{l_{0,m}}, \frac{y}{l_{0,m}}, \frac{z}{l_{0,m}}, \frac{t}{t_{0,m}}\right)$

A kísérleti paraméterek helyes megválasztása mellett, a valóságos és a modellezett esetben a dimenziótlan sebességeloszlásokat ugyanaz az f , a dimenziótlan nyomáseloszlásokat pedig ugyanaz az F függvény írja le. Két áramlás hasonló, ha ugyanazon dimenziótlan függvények írják le. Vagyis a kismintán végzett mérések adataiból meghatározhatók az egyes dimenziótlan sebességeloszlások, amelyek segítségével az adatok átskálázhatók a valóságos esetre. Tehát két áramlás abban az esetben hasonló és ezáltal ugyanazon dimenziótlan függvényekkel írható le, amennyiben:

- azonos dimenziótlan differenciál-egyenlet-rendszerek írják le,
- azonosak a perem- és kezdeti feltételek a dimenziótlan hely- és időkoordinátákban kifejezve.

Mivel valós közeg áramlásának vizsgálatakor szükséges a sűrűdés hatásának figyelembe vétele, így a korábban megismert Navier-Stokes egyenlet a kontinuitási egyenlettel kiegészítve alkotják az említett differenciál-egyenlet-rendszert. Származtassuk külön-külön az egyenletek dimenziótlan alakját!

9.1 Navier-Stokes egyenlet ($\rho = \text{áll.}$, $\mu = \text{áll.}$)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \nu \text{rot}(\text{rot}\mathbf{v}) \quad (9.1.)$$

Megmutatható, hogy:

$$-\nu \text{rot}(\text{rot}\mathbf{v}) = \nu \Delta \mathbf{v} = \nu \begin{bmatrix} \text{div grad } v_x \\ \text{div grad } v_y \\ \text{div grad } v_z \end{bmatrix}$$

A továbbiakban kizárólag a Navier-Stokes egyenlet x -irányú komponensével foglalkozunk, mivel teljesen hasonló következtetések vonhatók le a többi komponens esetén is. Az x -irányú komponensegyenlet az alábbi módon írható:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (9.2.)$$

Végezzük el a (9.2.) egyenlet dimenziótlantítását, ehhez szorozzuk be az egyenletet l_0/v_0^2 -tel (ennek dimenziója s^2/m). A nyomást vizsgáljuk egy p_0 referencianyomáshoz képest, a sűrűséget pedig vigyük a deriválás belsejébe:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(v_x/v_0)}{\partial\left(\frac{t}{l_0/v_0}\right)} + \frac{\partial(v_x/v_0)}{\partial(x/l_0)}(v_x/v_0) + \frac{\partial(v_x/v_0)}{\partial(y/l_0)}(v_y/v_0) + \frac{\partial(v_x/v_0)}{\partial(z/l_0)}(v_z/v_0) = \\ & = \frac{g_x l_0}{v_0^2} - \frac{\partial\left(\frac{p-p_0}{\rho v_0^2}\right)}{\partial\left(\frac{x}{l_0}\right)} + \nu \frac{1}{v_0 l_0} \left(\frac{\partial^2\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{l_0}\right)^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{y}{l_0}\right)^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{z}{l_0}\right)^2} \right) \end{aligned} \quad (9.3.)$$

Mivel az utolsó tag esetén a dimenziótlan sebesség-komponens dimenziótlan irányok szerinti másodrendű parciális deriváltjait szükséges származtatni, így a kinematikai viszkozitás osztója $l_0 \cdot v_0$ marad.

9.2 Kontinuitási egyenlet ($\rho = \text{áll.}$)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (9.4.)$$

Ezt dimenziótlánítva kapjuk:

$$\frac{\partial(v_x/v_0)}{\partial(x/l_0)} + \frac{\partial(v_y/v_0)}{\partial(y/l_0)} + \frac{\partial(v_z/v_0)}{\partial(z/l_0)} = 0 \quad (9.5.)$$

9.3 Hasonlósági feltételek

A fenti egyenletek alapján térjünk vissza az áramlások hasonlóságát biztosító két kritériumra, és vizsgáljuk meg ezek teljesülésének feltételeit.

9.3.1 Dimenziótlan differenciál-egyenlet-rendszerek azonossága

A differenciál-egyenlet-rendszerek a valóságos, illetve a modellezett esetben azonosak, ha az állandók és az együtthatók megegyeznek. Ez a (9.3.) egyenlet alapján a következő dimenziótlan jellemzők azonosságát jelenti (az egyenlet bal oldalából, illetve a (9.5.) kontinuitási egyenletből nem származik további megkötés).

9.3.1.1 Reynolds-szám

$$Re_m = \frac{v_{0,m} l_{0,m}}{\nu_m} := Re = \frac{v_0 l_0}{\nu}$$

9.3.1.2 Froude-szám

$$Fr_m = \frac{v_{0,m}}{\sqrt{g_m l_{0,m}}} := Fr = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}}$$

9.3.2 Dimenziótlan peremfeltételek azonossága

9.3.2.1 Geometriai hasonlóság

Valamilyen test, például egy keverőelem körüli áramlás esetén, maga a keverőelem mint szilárd test egy peremet eredményez az áramlás szempontjából. Ez dimenziótlan formában azt jelenti, hogy szükséges a valóságos és a modell kivitel közötti geometriai hasonlóság biztosítása.

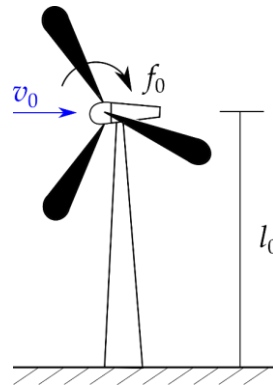
9.3.2.2 Euler-szám

A vizsgált térrész határolófelületén, vagy másképp az áramlás "peremén" szükséges a hasonló nyomáskörülmények tartása. A (9.3.) egyenletben megjelent egy tetszőleges referencianyomáshoz viszonyított, dimenziótlánított nyomás tag, melyet Euler-számnak nevezünk. Erre a következő érvényes:

$$Eu_m = \frac{(p - p_0)_m}{\rho_m v_{0,m}^2} := Eu = \frac{(p - p_0)}{\rho v_0^2}$$

9.3.3 Instacionárius hatások

A 9.3.1 és 9.3.2 fejezetekben részletezett pontokon felül, a modellezés során szükséges az instacionárius hatások figyelembevétele. Ennek megértéséhez nézzünk meg egy szélturbinát, és vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a forgó lapátmozgás elhalad a tartóoszlop közelében (9.2. ábra).



9.2. ábra. Instacionárius hatások szélturbina esetén.

Ahogy elhalad egy-egy lapát a tartóoszlop közelében, a két test egymásra hat. Tegyük fel, hogy éppen ezt az egymásra hatást, és az ebből adódó ingadozó áramlási jelenséget kívánjuk megfigyelni a kísérletek során.

9.3.3.1 Strouhal-szám

Legyen a periodikus, instacionárius hatás jellemző frekvenciája f_0 . A példánál maradva ez az ún. lapátváltási frekvencia. Ez azt fejezi ki, hogy időegység alatt hányszor halad el egy-egy lapát a tartóoszlop környezetében. Jelölje a lapát mozgására jellemző sebességet v_0 (pl. kerületi sebesség), továbbá a vizsgálat szempontjából fontos geometriai méretet l_0 (pl. tartóoszlop hossza). Ezen mennyiségekből származtatott dimenziótlan frekvencia az ún. Strouhal-szám, melynek szükséges garantálni az azonosságát a nagy kivitel és a kisminta esetén:

$$Str_m = \frac{f_{0,m} l_{0,m}}{v_{0,m}} := Str = \frac{f_0 l_0}{v_0}$$

9.3.3.2 Turbulenciafok

Egy másik hatás az áramlás turbulens jellege, hiszen a turbulens áramlás önmagában egy instacionárius jelenség. Ahogy korábban tárgyaltuk, a pillanatnyi sebesség felbontható egy időbeli átlag és egy ingadozó komponens összegeként. Erre támaszkodva a következőképpen definiálható a turbulenciafok:

$$Tu_m := Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{v'_x{}^2} + \overline{v'_y{}^2} + \overline{v'_z{}^2})}}{|\bar{v}|}$$

A fenti kifejezés alapján látható, hogy a turbulenciafok tulajdonképpen az ingadozó sebességkomponens négyzetes középértékének (RMS: Root-Mean-Square) és a sebesség időbeli átlagának hányadosa. A turbulencia hatásának megfelelő modellezéséhez kívánalom a turbulenciafok egyezősége.

9.3.4 Feltételek ütközése

Három fő feltételrendszert állapítottunk meg, melyeken belül különféle kritériumokat származtattunk:

- dimenziótlan differenciál-egyenlet-rendszerek azonossága,
- dimenziótlan peremfeltételek azonossága,
- instacionárius hatások.

A kísérletek során gyakorta előfordul, hogy a fentiekén túl további feltételek bevezetése is szükséges. Azonban bizonyos feltételek egymással ütköznek, így sok esetben kompromisszumokra kényszerülünk, melyet az alább bemutatott példa illusztrál.

Korábban megmutattuk, hogy a kismintagyártás során biztosítani kell a Reynolds-szám azonosságát. Tegyük fel, hogy a kísérletek végrehajthatók a valóságos esetben alkalmazott közeggel, így az anyagjellemzők (pl. a kinematikai viszkozitás) megegyeznek. Az ebből adódó feltétel:

$$Re_m = Re \Rightarrow \frac{v_{0,m} l_{0,m}}{\nu_m} = \frac{v_0 l_0}{\nu} \Rightarrow v_m = v \Rightarrow \frac{l_{0,m}}{l_0} = \frac{v_0}{v_{0,m}} \quad (9.6.)$$

Egy másik kritérium a Froude-szám azonossága, melynek vizsgálatánál tegyük fel, hogy azonos erőterek hatnak a két esetben, például a gravitációs erőter. Az így származtatott feltétel a következő:

$$Fr_m = Fr \Rightarrow \frac{v_{0,m}}{\sqrt{g_m l_{0,m}}} = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}} \Rightarrow g_m = g \Rightarrow \frac{l_{0,m}}{l_0} = \left(\frac{v_{0,m}}{v_0}\right)^2 \quad (9.7.)$$

Látható, hogy a (9.6.) és (9.7.) egyenletekből két eltérő feltétel adódik a valóságos és a modell esetén alkalmazandó áramlási sebességek arányára. Hogyan tudjuk feloldani ezt az ellentmondást egy modellezési kompromisszum révén? A korábbi példánál maradva, amennyiben a vizsgált keverőelem a szabad folyadékfelszíntől távol helyezkedik el, tehát ha az áramlás kitölti a teret a környezetében, felírható a hidrosztatikai alapegyenlete a következő formában:

$$\mathbf{0} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p_H$$

Ezt kivonva a Navier-Stokes egyenletből, annak egy olyan formáját kapjuk, amelyben nem jelenik meg közvetlenül az erőter térerősségvektora (\mathbf{g}):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p - p_H) + \nu \Delta \mathbf{v}$$

Ellenben az egyenletben megjelenik a p_H hidrosztatikai nyomás. Ez kísérleti szempontból azt jelenti, hogy a keverőelem környezetében nem maga a nehézségi erőter, hanem az abból származó hidrosztatikai nyomásgradiens játszik szerepet. Vagyis, ha kísérleteinket úgy végezzük, hogy mindenkor az adott szinten érvényes hidrosztatikai nyomáshoz képest mérjük a helyi nyomásokat, a gravitációs hatás kiküszöbölhető. Így a dimenziótlanított Navier-Stokes egyenletben többé nem szerepel a Froude-szám, tehát a Froude-szám azonosság mint hasonlósági kritérium elhagyható.

Ellenkező a helyzet, ha a folyadékfelszín közelében vizsgáljuk a jelenségeket (pl. tölcsérképződés, hullámozás), ugyanis az ilyen esetekben fontos szerepe van az erőtérek. Ekkor éppen fordítva, azaz a Reynolds-szám azonosságától tekintünk el, és helyette a Froude-szám azonosságát szükséges biztosítani a modellezés során.

9.4 Dimenziótlan jellemzők szemléletes jelentése

A Reynolds-kísérlet esetén megtárgyaltuk, hogy a Reynolds-szám arányos az egységnyi folyadéktömegre ható tehetelenségi és a súrlódási erők hányadosával ((6.6.) egyenlet). Annak érdekében, hogy az előbb tárgyalt többi dimenziótlan mennyiségekhez is mögöttes fizikai tartalmat társítsunk, a következőkben röviden összefoglaljuk azok szemléletes jelentését:

$$Re \sim \frac{F_t}{F_s} = \frac{\text{tehetelenségi erő}}{\text{súrlódó erő}}$$

$$Fr \sim \sqrt{\frac{F_t}{F_g}} = \frac{\text{tehetelenségi erő}}{\text{erőtérből származó erő}}$$

$$Eu \sim \frac{F_p}{F_t} = \frac{\text{nyomásból származó erő}}{\text{tehetelenségi erő}}$$

Az áramlások hasonlóságának témakörén belül az eddigiekben állandó sűrűségű közegekkel foglalkoztunk. Összenyomható közegek esetén, az eddig megismert kritériumokat szükséges a következő két feltétellel kiegészíteni. A Mach-számmra teljesülnie kell, hogy:

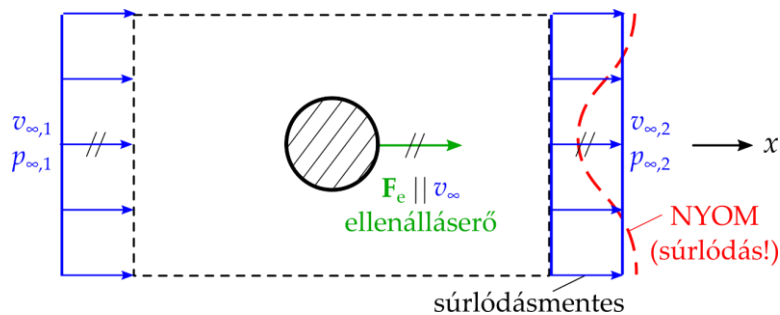
$$Ma_m = Ma$$

Az izentrópus kitevőre vonatkozó feltétel:

$$\kappa_m = \kappa$$

9.5 Áramlásba helyezett testekre ható erő

Képzeljünk el egy testet, melyet első közelítésben egy súrlódásmentes áramlásba helyezünk (9.3. ábra). Messze a test előtt feltételezzünk egy egyenletes rááramlást, melynek sebessége $v_{\infty,1}$! A párhuzamos, zavartalan áramvonalak következtében a statikus nyomás is állandó, értéke legyen $p_{\infty,1}$. Ahogy az áramlás eléri a testet, a test kontúrjának megfelelően görbült áramvonalak alakulnak ki, így az Euler-egyenlet értelmében valamilyen nyomáseloszlás jellemzi a test felületét. Azonban az alvízi oldal irányba haladva, kellően távol a testtől, az áramlás visszarendeződik, ismét egyenletessé válik a sebesség- és a nyomás-eloszlás is. A kilépő sebességet jelölje $v_{\infty,2}$, a statikus nyomást pedig $p_{\infty,2}$.



9.3. ábra. Áramlásba helyezett testre ható erő.

Az áramlásba helyezett test egyik lényeges jellemzője az ún. ellenállásereő, amely mindig párhuzamos a megfúvási sebesség irányával. Mekkora ez az ellenállásereő ebben a vizsgált esetben? Visszaemlékezve, az ilyen jellegű kérdések megválaszolására korábban az impulzustételt alkalmaztuk. Tehát írjuk fel az x -irányú komponensegyenletet a **9.3. ábrán** látható (szaggatott fekete vonallal jelölt) ellenőrző felületre:

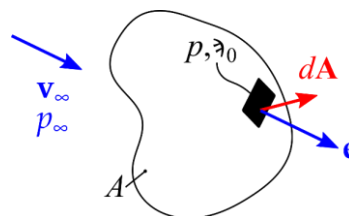
$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = P_1 - P_2 - F_e \quad (9.8.)$$

Az ellenállásereő negatív előjele annak következménye, hogy az impulzustétel mindig a folyadékra vonatkozó mozgásegyenlet. Vagyis a testről a folyadékra ható ereő az éppen az ellenállásereő mínusz egyszerese. Súrlódásmentes esetre belátható, hogy szimmetria okok miatt a belépő és kilépő oldali impulzusáramok, valamint nyomásból származó ereő x -irányú komponensei megegyeznek. Következésképpen:

$$F_e = 0$$

Mivel a súrlódás szerepétől nem tekinthetünk el, a valós közegáramlásba helyezett testekre mindig hat ellenállásereő. A súrlódás hatására nem rendeződik vissza az áramkép, a szimmetria sérül, és test mögött megjelenik egy olyan zóna, ahol lecsökkent sebességek jellemzők. Ezt az áramlási zónát *nyomnak* nevezzük. Ebből adódóan nem lesz az ellenállásereő zérus. Fontos megjegyezni, hogy az ellenőrző felület x -irányú nyújtásával sem teljesülne a $p_{\infty,2} = p_{\infty,1}$ feltétel a fellépő veszteségek miatt.

Vizsgáljuk meg az eddigieknél részletesebben, hogy miként hat az ellenállásereő egy áramlásba helyezett test felületén. Ehhez nézzük meg, hogy egy testre ható áramlászereő, tetszőleges ereő milyen összetevőkből állhat (**9.4. ábra**).



9.4. ábra. Testre ható ereők.

Az ereő egyrészt áll nyomásból származó, a test felületére merőleges irányú ereőből. Másrészt a súrlódás hatása is megjelenik a fali csúsztatófeszültségen keresztül, mint a fallal párhuzamos irányú (lásd e egységvektor) ereő:

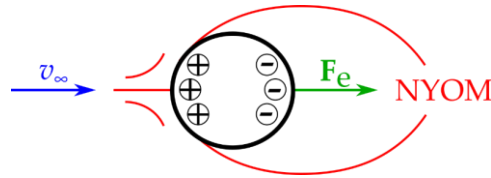
$$\mathbf{R} = - \int_A p d\mathbf{A} + \int_A \tau_0 \mathbf{e} |dA| \quad (9.9.)$$

ahol e a τ_0 nagyságú fali csúsztatófeszültség irányába mutató, érintő irányú egységvektor, amely függ helyileg a falközeli áramlási iránytól. Nézzük meg, hogy az említett két ereő összetevő milyen nagyságrendbe esik. Ennek számszerűsítéséhez vezessük be a következő dimenziótlan jellemzőket.

Statikus nyomástényező: $c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2}$

Fali súrlódási tényező: $c'_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2}$

Vizsgáljuk meg, hogy egy henger esetén hogyan alakulnak a fenti dimenziótlan tényezők (9.5. ábra). Mivel mérnöki szempontból a henger és az arra ható áramláseredetű erő kiemelt szereppel bír, a továbbiakban többször is referenciaként hivatkozunk erre. Ennek legfőbb oka, hogy számos műszaki berendezés modellezhető hengerként, pl. kéményekre, hengeres épületekre, villanyvezetésekre ható szélerő vizsgálatánál.



9.5. ábra. Hengerpalást nyomásviszonya.

A hengert a tengelyére merőlegesen megfújva a következő megállapításokat tehetjük. A szél felőli homloklapfelületen torlópont és ennek megfelelően túlnyomás alakul ki. Ahogy tovább haladunk a henger felülete mentén, egy ponton a határréteg leválik (növekvő nyomásgradiens + fali súrlódás). A határréteg-leválásnak megfelelően a henger mögött egy kiterjedt leválási buborék jelenik meg, kialakul a test áramlási nyoma. A henger közvetlen közelében maga a leválási buborék tekinthető a nyomnak, mely egy lecsökkent sebességű zóna, melyben depresszió uralkodik.

A leválási buborék jellemzői a következők:

- a nyomás közel állandó és megegyezik a leválás helyén uralkodó nyomással ($p \approx \text{áll.}$),
- viszonylag kicsiny sebességek,
- nagy turbulenciafok.

A homloklapfelületi túlnyomás, valamint a hátoldali depresszió együttesen képzik a hengerre ható ellenállás-erő nyomáseloszlásból származó részét. Összehasonlítva a 9.5. ábra szerinti hengerre jellemző statikus nyomástényező és helyi fali súrlódási tényező értékeket, előbbire több nagyságrenddel nagyobb érték adódik. Ugyanakkor ez nem feleltethető meg azzal, hogy a súrlódás szerepe elhanyagolható, hiszen éppen a súrlódás következtében válik le a határréteg a henger felületéről – ezzel jelentősen megváltoztatva az áramlás jellegét.

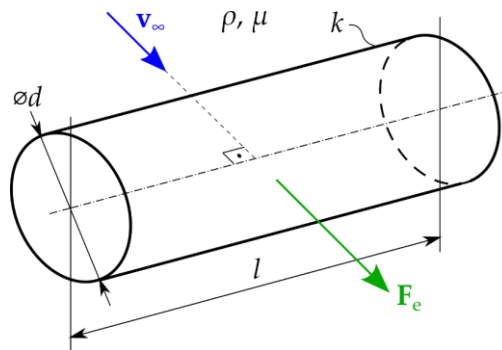
A statikus nyomástényező és a helyi fali súrlódási tényező szempontjából két testtípust különböztetünk meg (9.2. táblázat):

9.2. táblázat. Tompa és áramvonalas testek jellemzői.

Tompa test (pl. henger)	Áramvonalas test (pl. szárnyprofil)
kiterjedt nyom	keskeny nyom
az ellenállás-erőt a statikus nyomástényező eloszlása határozza meg	az ellenállás-erőben a fali csúsztatófeszültségből származó felületi viszkozus erők dominálnak
a fali súrlódás szerepe másodlagos	a felületi nyomáseloszlás szerepe másodlagos

9.5.1 Hengerre ható erő

Vizsgáljunk egy egyenes körhengert (9.6. ábra), melyet fújunk meg v_∞ sebességgel a tengelyére merőlegesen. A közeget jellemezze ρ sűrűség és μ dinamikai viszkozitás. A henger geometriai jellemzői: d átmérő, l hosszúság és k érdességmagasság. A megfúvás hatására egy F_e ellenálláserő ébred, amely iránya – definíció szerint – párhuzamos a megfúvási sebesség irányával.



9.6. ábra. Áramlásba helyezett henger.

9.5.1.1 Dimenzióanalízis

Hogyan függ az ellenálláserő az előbb felsorolt jellemzőktől? A válaszhoz egy olyan függvénykapcsolatot feltárása a cél, ami összefüggést ad az előbb felsorolt jellemzők között:

$$f(F_e, v_\infty, \rho, \mu, d, l, k)$$

Ennek meghatározásához emlékezzünk vissza a csőszűrlődésnél alkalmazott (7.1.1 fejezet) **dimenzióanalízis** eszközére, mely által dimenziótlan jellemzők származtathatók. Ennek nagy előnye, hogy elegendő mérsékelt számú dimenziótlan jellemző közötti kapcsolatot vizsgálni. A dimenziótlan jellemzők az alábbiak:

9.3. táblázat. Áramlásba helyezett henger: dimenziótlan jellemzők.

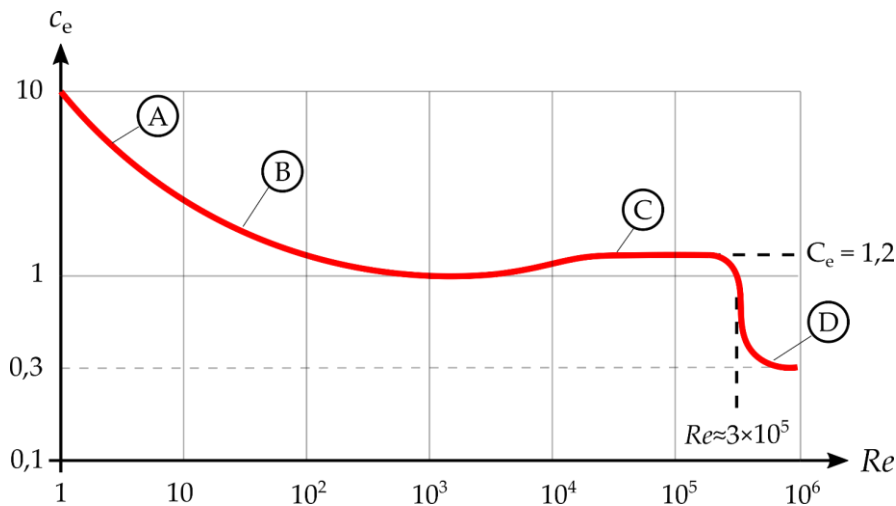
Dimenziótlan jellemző	Mennyiség	Jelölés	Megnevezés
Π_1	$\frac{F_e}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2 (l \cdot d)}$	c_e	ellenállástényező
Π_2	$\frac{\bar{v} d \rho}{\mu} = \frac{\bar{v} d}{\nu}$	Re	Reynolds-szám
Π_3	$\frac{l}{d}$		karcsúsági viszony
Π_4	$\frac{k}{d}$		relatív érdesség

Az ellenálláserőt dimenziótlanítva a rááramlás megfúvási sebességével definiált dinamikus nyomás és a megfúvásra merőleges vetület-keresztmetszet szorzatával a c_e ellenállástényezőt kapjuk.

A kísérletek során a következő egyszerűsítéseket vezetjük be:

- $l/d \rightarrow \infty$: Amennyiben az ún. karcsúsági viszony értéke tart a végtelenhez (pl. villanyvezeték esetén), a henger tengelyére merőleges minden egyes metszetben jó közelítéssel ugyanaz az áramkép érvényes: vagyis kétdimenziós (2D) áramlásként modellezhetjük a jelenséget.
- $k/d \rightarrow 0$: A relatív érdesség tartson zérushoz, vagyis tökéletesen sima felületet feltételezünk.

A fenti egyszerűsítések mellett a korábban feltett kérdés arra redukálódik, hogy hogyan változik az ellenállástényező a Reynolds-szám függvényében ($c_e(Re) = ?$). A 9.7. ábra diagramján látható a $c_e(Re)$ kapcsolatra vonatkozó mérési tapasztalat. Érdemes megjegyezni, hogy az alább bemutatott hengerre vonatkozó diagram jellegre nagyon hasonló gömb esetén is, réven a gömb is egy tompa testnek tekinthető.



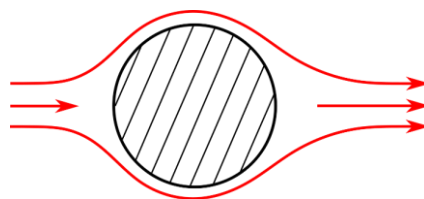
9.7. ábra. $c_e(Re)$ grafikon.

A. Lamináris áramlás

Ebben az esetben a Reynolds-szám értéke kicsi, a súrlódási erők dominálnak a tehetetlenségi erők felett. Ez előállhat akár nagy sebességek mellett is, amennyiben nagyon kicsi az átmérő (\sim néhány μm), például szűrőszövetekben. A tapasztalat azt mutatja, hogy az ellenállás arányos a megfúvási sebességgel:

$$F_e \sim v_\infty \Rightarrow c_e \sim 1/Re$$

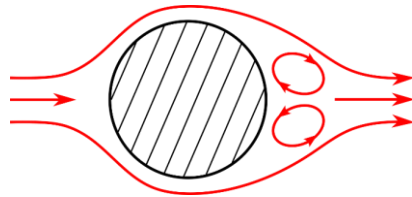
Ez lamináris csőáramlás esetén analóg azzal, hogy a csősúrlódási veszteség arányos az áramlási sebességgel. Az áramlás szerkezetét tekintve még nincs jelen kiterjedt leválási buborék (9.8. ábra).



9.8. ábra. Lamináris áramlás henger körül.

B. Átmeneti szakasz

A Reynolds-szám növelésével a tehetetlenségi erők hatása fokozódik, a henger mögött megjelenik egy leválási buborék, melyben létrejön egy ellenforgó örvénypár (9.9. ábra).



9.9. ábra. Átmeneti szakasz henger körül áramlásra.

C. Turbulens áramlás

Tovább növelve a Reynolds-számot, a tehetetlenségi erők dominálnak a súrlódási erők felett. Ezen tartományban az ellenállás-erő a megfúvási sebesség négyzetével arányos:

$$F_e \sim v_\infty^2 \Rightarrow c_e \approx \text{áll.}$$

Kármán-féle örvénysor ($Re = 10^3 - 10^5$):

Egy bizonyos Reynolds-szám tartományon belül a hengerről periodikusan örvények válhatnak le (9.10. ábra), melyet a felfedezője - Kármán Tódor - után Kármán-féle örvénysornak nevezünk.



9.10. ábra. Kármán-féle örvénysor.

A leúszó örvények frekvenciáját jelölje f . Ha visszatekintünk az áramlások hasonlóságának témakörére, ott instacionárius és periodikus esetben bevezettük a Strouhal-számot. Származtassuk ezt jelen esetre:

$$Str = \frac{fd}{v_\infty} \approx 0,2$$

A mérések azt mutatják, hogy ezt az örvényleválási jelenséget egy jól definiált Strouhal-szám jellemzi, melynek értéke **jó közelítéssel állandó** ($\approx 0,2$). Az örvényleválásnak gyakorlati szempontból a következő jelentősége lehet:

- **Káros:** vizsgáljunk egy d átmérőjű kéményt, melyet a szél v_∞ sebességgel fúj. Amennyiben a Reynolds-szám beleesik az említett tartományba, a kémény mögött Kármán-féle örvénysor alakul ki. A leúszó örvények visszahatnak a kéményre egy ingadozó erőt képviselve. Ha az örvényleválás frekvenciája egybeesik a kémény valamely sajátfrekvenciájával ($f \approx f_{\text{saját}}$) rezonancia léphet fel, amely tönkremenetelhez vezethet. Ennek elkerülése végett a kéményekre pl. spirális lemezcsíkot alakítanak ki, amely a széliránytól függetlenül gátolja az örvénysor kialakulását.

- **Hasznos:** a Strouhal-szám állandóságát kihasználva képesek vagyunk ún. 'vortex áramlásmérő' berendezést építeni. Ennek elve: $Str = áll.$ értéke esetén az örvényleválás frekvenciája arányos a megfúvási sebességgel. Vagyis, ha egy ismert méretű tompa testet / örvényhagyó elemet az áramlásba helyezünk és mérjük az örvényleválás frekvenciáját, abból meghatározható az áramlás sebessége.

D. Leválás előtti turbulens határréteg esete

Még tovább növelve a Reynolds-számot, mintegy $Re \approx 3 \cdot 10^5$ esetén az ellenállástényező drasztikusan lecsökken ($1,2 \rightarrow 0,3$). A henger körüli határréteg már a leválás előtt turbulenssé válik, melynek eredményeképp a turbulens örvények energizálják a határréteget. Ennek hatására később következik be a határréteg leválása, keskenyebb nyom keletkezik, ezáltal csökken az ellenállásérő.

9.5.1.2 Karcsúsági viszony (l/d) csökkentése

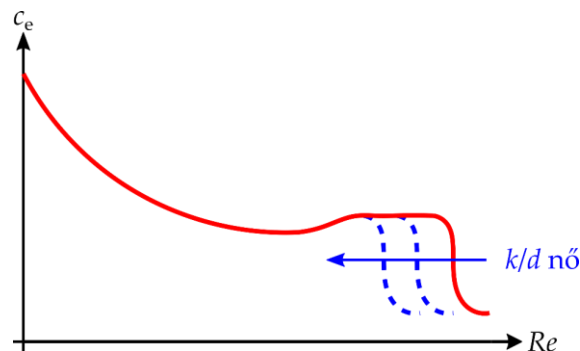
Az előző gondolatmenet két alapvető feltevésre ($l/d \rightarrow \infty$; $k/d \rightarrow 0$) épült. A következőkben vizsgáljuk meg ezen két paraméter módosulásának az ellenállástényezőre gyakorolt hatását.

Abban az esetben, ha nem 2D közelítéssel élünk, hanem véges hosszúságú hengert vizsgálunk, az ellenállástényező csökkenése figyelhető meg. Ennek oka, hogy a henger végein egy megkerülő áramlás jön létre, melynek a következő hatásai vannak:

- csökkenti a homlokfali túlnyomást,
- táplálja a leválási buborékot ezzel csökkentve a hátfali depressziót,
- mérsékli a leváló örvények negatív hatását.

9.5.1.3 Relatív érdességmagasság (k/d) növelése

Ennek hatására a sima felületre érvényes $Re \approx 3 \cdot 10^5$ határ eltolódik a kisebb Reynolds-számok irányába (9.11. ábra). Vagyis a felületi érdesség következtében "hamarabb" következik be a drasztikus ellenállástényező csökkenés. Ennek oka, hogy a felületérdességi elemek „turbulenciagenerátorként” jelentkeznek, ezzel frissítve a határréteget és mérsékelve a leválás miatti ellenállástényező-növekedést (pl. golf labda barázdái).



9.11. ábra. $c_e(Re)$ grafikon változása k/d arány növelésének hatására.

9.5.2 Szárnyra ható erő

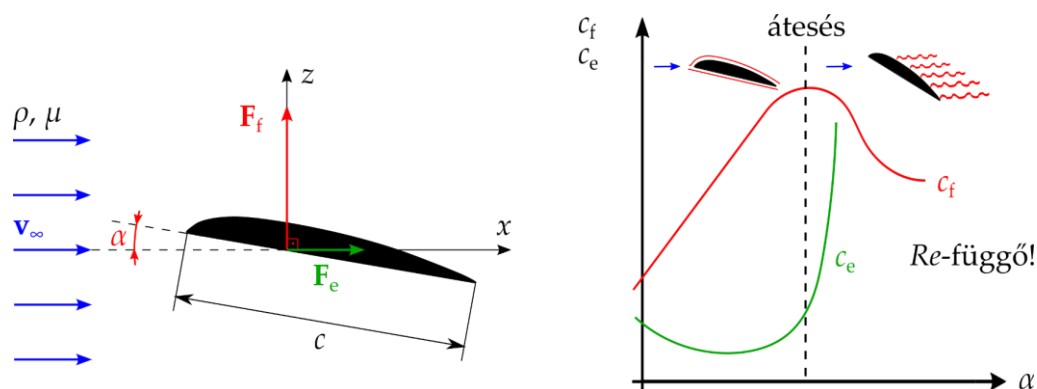
Vegyünk egy véges l hosszúságú, c húr hosszú szárnymetszetet (9.12. ábra). A megfúvási sebességet jelölje v_∞ , továbbá vezessük be az α megfúvási irányt, amely a szárnymetszet húrja és a megfúvási irány által bezárt szög. A szárnyon két erőkomponens jelenik meg: egyrészt az ellenálláserő, amely a megfúvási sebesség irányával párhuzamos irányba hat a testre, másrészt a felhajtóerő, ami a megfúvási sebesség irányára merőleges.

Az ezekből származtatott dimenziótlan jellemzők az ellenállástényező és a felhajtóerő-tényező:

$$c_e = \frac{F_e}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2 (c \cdot l)} \quad \text{és} \quad c_f = \frac{F_f}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2 (c \cdot l)}$$

A dimenziótlanításhoz felhasznált jellemző felület a tipikusan változó állásszögbe helyezhető áramvonalas testek, így szárnyak esetén nem a megfúvási merőleges homlok(vetület)-keresztmetszet, hanem a $(c \cdot l)$ effektív felület, mivel a felhajtóerő képzéséhez ez a felület kapcsolódik. Másfelől áramvonalas testek esetén az ellenálláserőt a fali csúsztatófeszültség határozza meg, az ebből adódó viszkozus ellenálláserő nagysága pedig értelemszerűen összefügg a falfelület nagyságával.

Nézzük meg az újonnan bevezetett két erő-tényező alakulását az α megfúvási szög függvényében (9.12. ábra). A diagramon egyetlen görbe-pár szerepel, de fontos kiemelni, hogy a jelenség függ a Reynolds-számtól is, azonban ezt jelen tárgy keretein belül nem vizsgáljuk.



9.12. ábra. Erő-tényező alakulása megfúvási a megfúvási szög függvényében.

Viszonylag kis megfúvási szögek esetén a felhajtóerő-tényező közel lineárisan növekszik, és áramvonalas test révén relatív kicsiny ellenállástényező jellemzők. A megfúvási szög növelésével, amennyiben túlságosan "meredek" megfúvás éri a szárnyat, a felhajtóerő-tényező szempontjából elérünk a szárny teljesítőképességének határáig. Egy maximális érték után jelentősen csökken a felhajtóerő-tényező, a szárny átésik. Ebben a megfúvási szög tartományban figyelhető meg az ellenállástényező drasztikus növekedése, ugyanis a szárny áramvonalas test jellege megszűnik. Egy kiterjedt leválási zóna jelenik meg a test mögött, az áramvonalas test tompa testté válik. Vagyis az áramlásba helyezett test aerodinamikai viselkedése nemcsak a geometriájától, hanem az üzemeltetési körülményektől (megfúvási iránytól) is nagyban függ.

Egy további fontos jellemzője a szárnyprofiloknak az ún. siklószám (S), ami egy adott megfúvási szög mellett megmutatja a felhajtóerő-tényező és az ellenállástényező viszonyát:

$$S = \frac{c_f}{c_e}$$

További magyarázat nélkül ez egy adott üzemállapotban a szárnymetszet aerodinamikai „jóságát” mutatja meg. Például forgógép-lapátozás tervezésénél, amennyiben lehet, törekszünk a siklószám maximalizálására, ugyanis általános igény a szárnymetszetek munkavégző képességének kiaknázása, mérsékelt áramlási ellenállás és veszteségek mellett.

10 Hivatkozások

- [1] <https://www.valeoservice.com/en-com/passenger-car/cooling-system-air-management-technologies/car-motor-fan-0>, Elérhetőség: 2023. február 10.
- [2] <https://www.rodelta.com/pump-cavitation/>, Elérhetőség: 2023. február 10.
- [3] Lajos Tamás. Az áramlástan alapjai. Budapest, 2019.
- [4] <https://edition.cnn.com/style/article/x-15-rocket-aircraft/index.html>, Elérhetőség: 2023. február 10.
- [5] <https://www.hitechcfcd.com/cfd-knowledgebase/how-coefficient-drag-cd-and-wind-tunnels-are-an-important-factors-when-it-comes-to-aerodynamics-car-design.html>, Elérhetőség: 2023. február 10.
- [6] <https://avcovalve.com/product/orifice-flange-sets/>, Elérhetőség: 2023. február 10.
- [7] https://www.freepik.com/free-vector/golf-ball-white-isolated_4559748.htm#query=golfball&position=0&from_view=keyword&track=sph, Elérhetőség: 2023. február 10.
- [8] https://airandspace.si.edu/collection-objects/rocket-engine-liquid-fuel-f-1/nasm_A19700271000, Elérhetőség: 2023. február 10.