Hő- és áramlástan

1. előadás – Az örvényesség evolúciója

Dr. Tomor András
BME Áramlástan Tanszék
2019 február 4.

Tematika

Okt.hét	Téma
1	Ismétlés: szubsztanciális derivált, tömegáram, alapegyenletek alkalmazási példákkal. Div(v)=0. Örvényesség. **Örvénytranszport** egyenlet (3D-ben). Egyszerűsített levezetés 2D-ben. Helmholtz-féle analógia.
2	**Potenciálos áramlások**. Alkalmazási területek. Nyomás meghatározása. Sebességi potenciál, áramfüggvény, komplex potenciál.
3	Párhuzamos áramlás. Forrás-nyelő. Potenciálos örvény. A szuperpozíció elve. Sarok körüli áramlás, torló áramlás. Dipólus, henger körüli potenciálos áramlás.
4	Flettner-rotor. Zsukovszkij transzformáció, szárny körüli áramlás, Kutta feltétel, ívelt lap felhajtóereje. Ismétlés: a határrétegek tulajdonságai. Határréteg hengeren, szárnyon. Változó cirkuláció, nyíróréteg keletkezése. Alkalmazások.
5	**Határrétegek.** A határréteg vastagsága. Határréteg egyenlet és annak Re-től független alakja. Blasius-féle profil.
6	A HRE numerikus megoldása. Turbulencia keletkezése nyírórétegben. A határréteg stabilitása, Tollmien-Schlichting hullámok, tranzíció. Keveredési úthossz modell, logaritmikus faltörvény. A határrétegben zajló hő- és anyagátadási folyamatok modellezése.
7	**Műszaki alkalmazások.** Szárnyakra ható erő. A határréteg szabályzása szárnyak esetében. Tompa testek ellenállása. Szabadsugár. Légfüggöny.

Az advekció leírása

Folyadéksebesség: $\underline{v}(t,\underline{r}) = u(t,x,y,z)\underline{i} + v(t,x,y,z)\underline{j} + w(t,x,y,z)\underline{k}$

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Egy folyadékrészre: $\dfrac{dx}{dt} = u, \quad \dfrac{dy}{dt} = v, \quad \dfrac{dz}{dt} = w$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla u$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla v$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla w$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}}_{\text{lokális gyorsulás}} + \underbrace{\underline{v}\cdot\overbrace{\nabla \underline{v}}^{\text{sebességgradiens}}}_{\text{konvektív gyorsulás}}$$

A Navier-Stokes egyenlet

$$\rho = \text{állandó}, \quad \nu = \text{állandó}$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} + \nu \, \Delta \underline{v} \qquad \left[\frac{N}{kg} \right]$$

nyomásból származó erő **térerősség** **nyíróerők**

Kontinuitás

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV + \int_A \rho\, \underline{v}\cdot d\underline{A} = 0$$

felhalmozódó tömeg

kilépő tömegáram

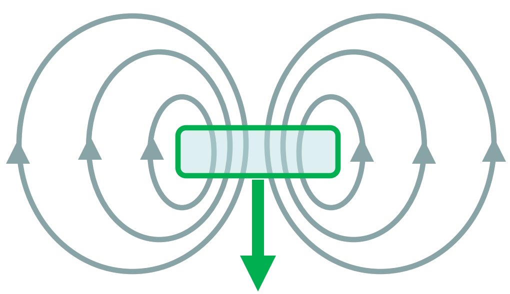
azaz

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \underline{v}) = 0$$

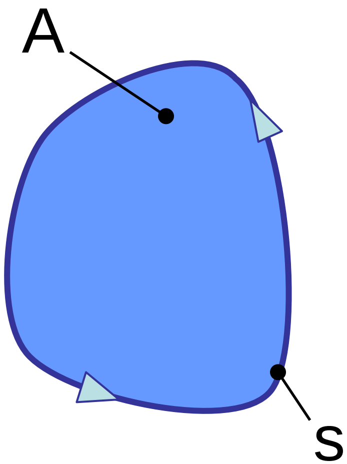
ρ=állandó esetén: $\nabla\cdot\underline{v} = 0$ azaz $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Az áramcső is az áramlási tér határáig tart, vagy önmagába záródik.

Pl. abszolút áramvonalak a tenyerem körül:



Örvények



Cirkuláció:

$$\Gamma = \oint_s \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

arányos a felhajtóerővel

Örvényesség:

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

a szögsebesség kétszerese

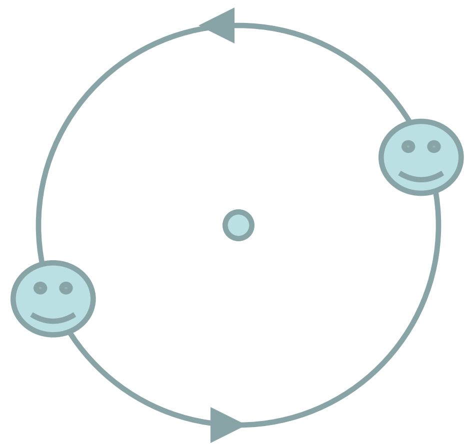
A Thomson-tétel szerint ν=0, ρ=áll, és potenciálos erőtér esetén bármely folyékony zárt görbére:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

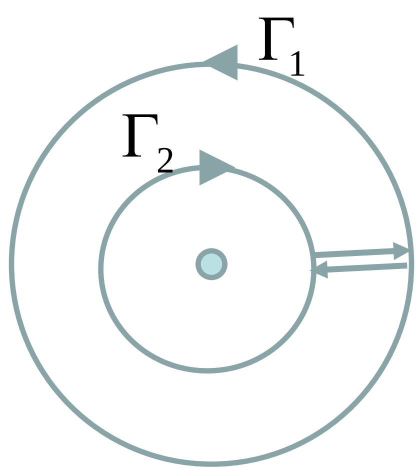
Hogyan kerül az örvényesség az áramlásba?

Potenciálos örvény

Lehet-e cirkuláció, ha az örvényesség 0?



$$\omega_\perp = 0$$



$$\Gamma_1 = -\Gamma_2$$

$$2r\pi v = \text{áll.}$$

$$v = \frac{\text{áll.}}{r}$$

Az örvényesség a középpontban koncentrálódik.

Az örvényesség evolúciója

Örvénytranszpot egyenlet: $\nabla \times \left(\mathrm{Navier} - \mathrm{Stokes}\right)$

Először vezessük le 2D-ben! Ekkor ω skalár: $\omega = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial g_y}{\partial x} + \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial g_x}{\partial y} + \nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} + *** = 0 + 0 + \nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

$$*** = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0=} - \frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0=}$$

Nézzük csak a konvektív gyorsulás rotációját 3D-ben!

$$\underline{\omega} = \nabla \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_y - v'_z \\ u'_z - w'_x \\ v'_x - u'_y \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \left(\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = \nabla \times \left[\begin{pmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} w''_{xy} - v''_{xz} & w''_{yy} - v''_{yz} & w''_{zy} - v''_{zz} \\ u''_{xz} - w''_{xx} & u''_{yz} - w''_{yx} & u''_{zz} - w''_{zx} \\ v''_{xx} - u''_{xy} & v''_{yx} - u''_{yy} & v''_{zx} - u''_{zy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} w'_x u'_y - v'_x u'_z + w'_y v'_y - v'_y v'_z + w'_z w'_y - v'_z w'_z \\ u'_x u'_z - w'_x u'_x + u'_y v'_z - w'_y v'_x + u'_z w'_z - w'_z w'_x \\ v'_x u'_x - u'_x u'_y + v'_y v'_x - u'_y v'_y + v'_z w'_x - u'_z w'_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_y - v'_z \\ u'_z - w'_x \\ v'_x - u'_y \end{pmatrix}}$$

$$\nabla \times \left(\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha'_x & \alpha'_y & \alpha'_z \\ \beta'_x & \beta'_y & \beta'_z \\ \gamma'_x & \gamma'_y & \gamma'_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \left(u'_x + v'_y + w'_z \right) + \begin{pmatrix} w'_x u'_y - v'_x u'_z - u'_x w'_y + u'_x v'_z \\ u'_y v'_z - w'_y v'_x - v'_y u'_z + v'_y w'_x \\ v'_z w'_x - u'_z w'_y - w'_z v'_x + w'_z u'_y \end{pmatrix}$$

$$\underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v} = \begin{pmatrix} u'_x w'_y - u'_x v'_z + \cancel{u'_y u'_z} - u'_y w'_x + u'_z v'_x - \cancel{u'_z u'_y} \\ v'_x w'_y - \cancel{v'_x v'_z} + v'_y u'_z - v'_y w'_x + \cancel{v'_z v'_x} - v'_z u'_y \\ \cancel{w'_x w'_y} - w'_x v'_z + w'_y u'_z - \cancel{w'_y w'_x} + w'_z v'_x - w'_z u'_y \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \left(\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = \underline{v} \cdot \nabla \underline{\omega} + \underline{\omega} \nabla \cdot \underline{v} - \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v}$$

3D-ben egy új tag keletkezik!

Örvénytranszport-egyenlet

(ρ és ν állandó)

Képezzük a Navier-Stokes egyenlet rotációját!

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} + \nu \Delta \underline{v} \qquad / \; \nabla \times \ldots$$

$$\frac{d\underline{\omega}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{\omega}}_{\text{advekció}} = 0 + \nabla \times \underline{g} + \nu \Delta \underline{\omega} - \underline{\omega} \nabla \cdot \underline{v} + \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v}$$

0, ha $\underline{g}$ potenciálos | örvény-diffúzió | 0, ha ρ állandó | örvény-nyúlás

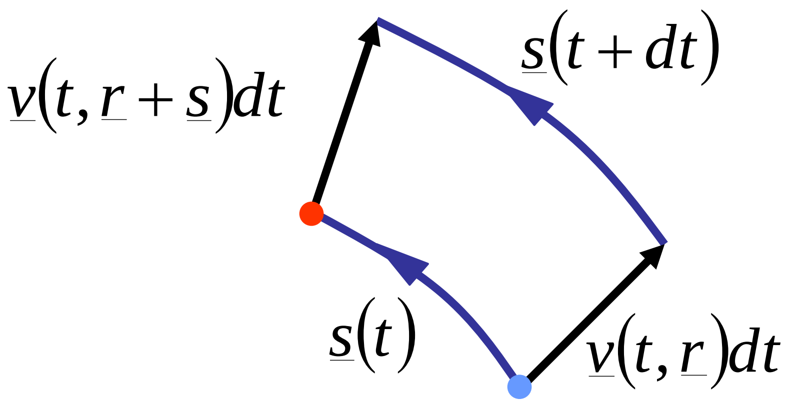
$$\frac{d\underline{\omega}}{dt} = \nu \Delta \underline{\omega} + \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v}$$

Mit jelent az örvény-nyúlás?

Egy elemi folyadékszakasz evolúciója:

$$d\underline{s} = \underline{s}(t+dt) - \underline{s}(t) = \left[\underline{v}(t,\underline{r}+\underline{s}) - \underline{v}(t,\underline{r})\right]dt$$

$$\underline{v}(t,\underline{r}) + \underline{s}\cdot\nabla\underline{v}$$



$$\frac{d\underline{s}}{dt} = \underline{s}\cdot\nabla\underline{v}$$

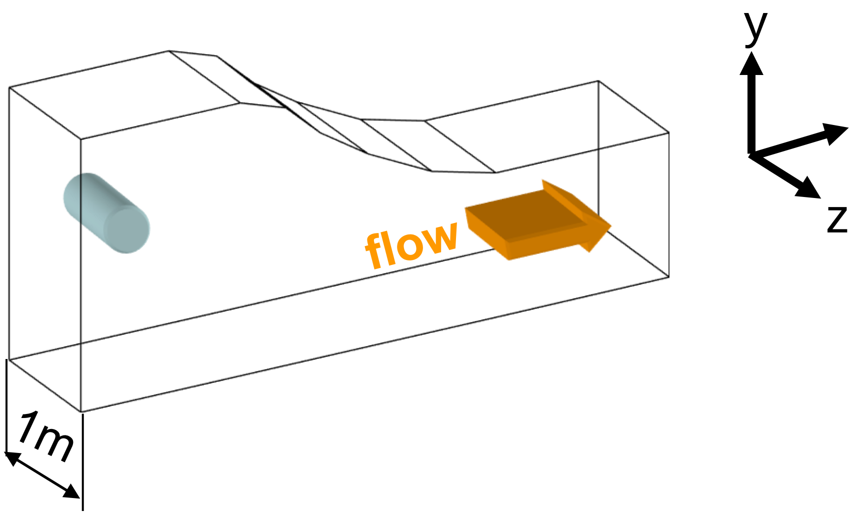
Az örvénytranszport-egyenlet súrlódásmentes folyadékra:

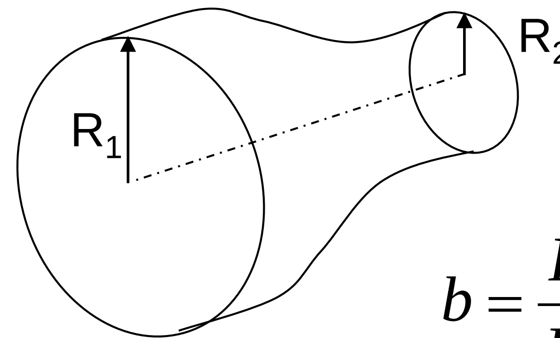
$$\frac{d\underline{\omega}}{dt} = \underline{\omega}\cdot\nabla\underline{v}$$

<u>s</u> szakasz tetszőlegesen választható!

Súrlódásmentes áramlásban az örvényesség vektor úgy változik, mint egy elemi folyadékszakasz. (Helmholtz)

Feladat





$$b = \frac{R_1}{R_2}$$

Hasonlítsa össze az örvényesség változását szűkülő csőben síkáramlás és forgásszimmetrikus konfúzor esetében a Helmholtz-analógia segítségével:

A. Az örvényesség mely komponensei lehetnek nem zérus értékűek? Használjon henger koordinátákat (x,r,ϕ) a forgásszimmetrikus esetben!
B. Milyen arányban változik az adott irányú folyadékszakasz hossza?
C. Hogyan változik az örvényesség, ha az örvénydiffúzió elhanyagolható?

Mit jelent az örvénydiffúzió?

A 2D örvénytranszport-egyenlet ρ=álandó, ν=állandó esetén:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \omega = \nu \, \Delta \omega \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

kinematikai viszkozitás

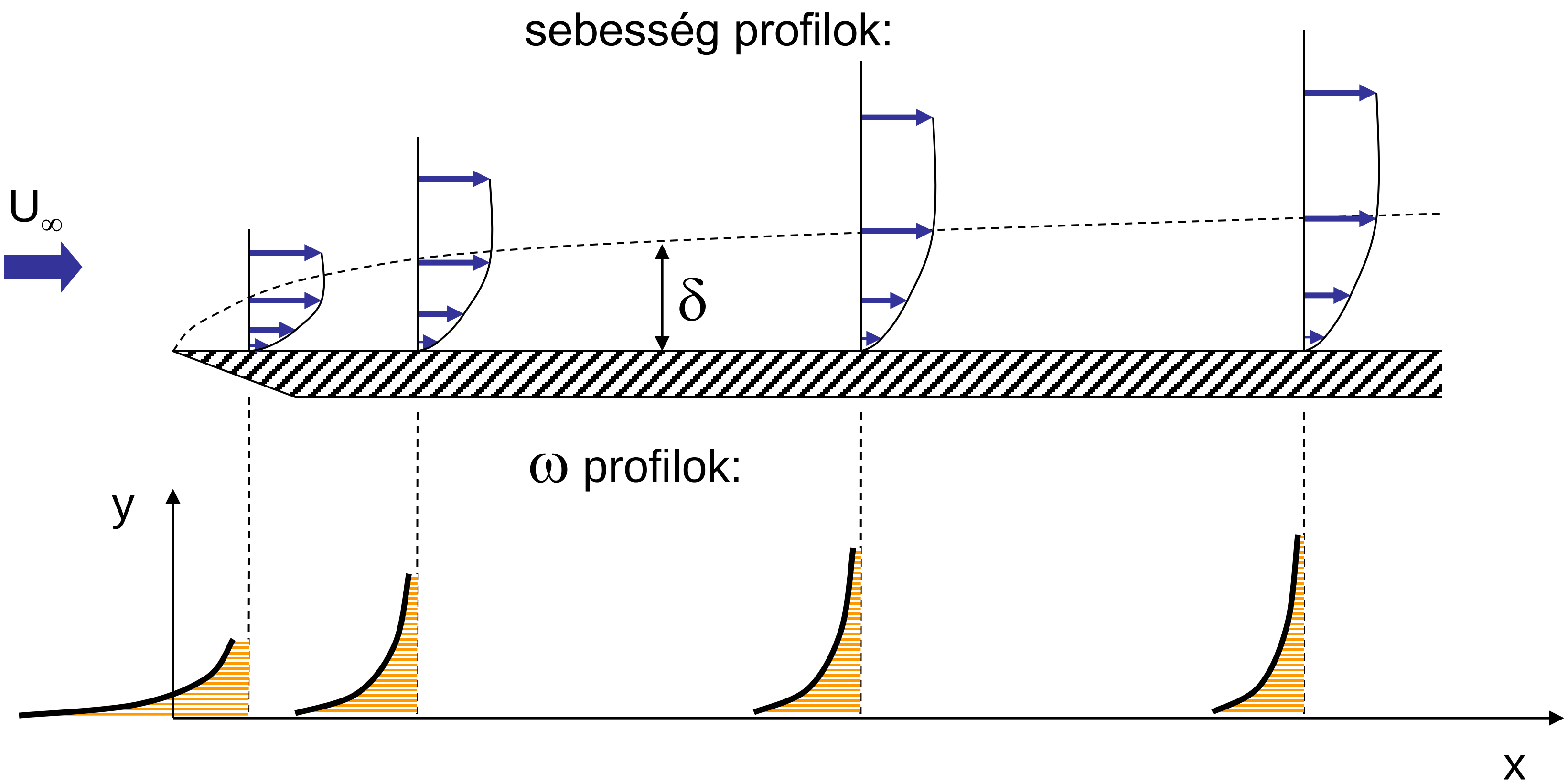
Analóg a hővezetési egyenlettel:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla T = a \, \Delta T \qquad a = \frac{\lambda}{\rho \, c} \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

hőmérsékletvezetési-tényező

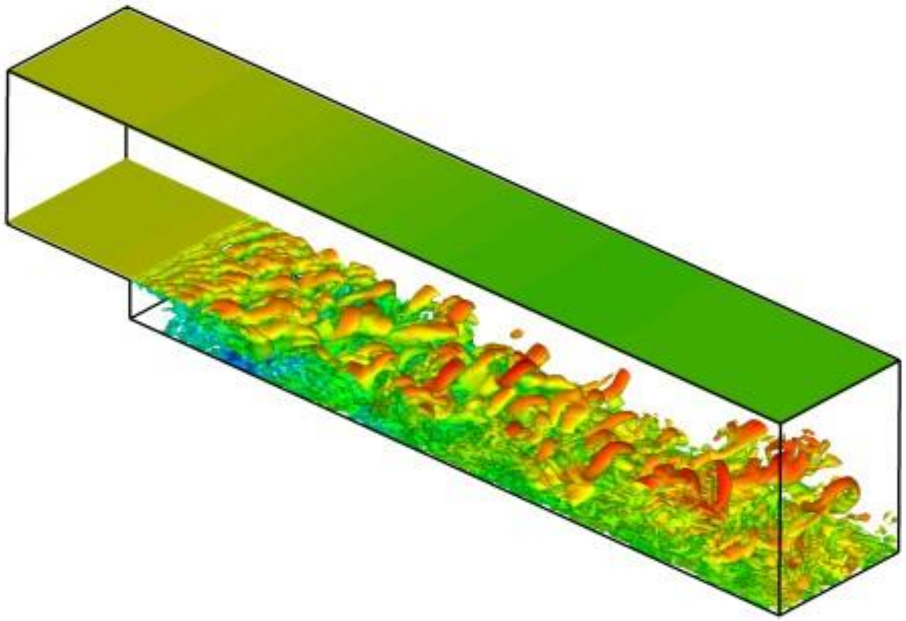
A kinematikai viszkozitás örvénydiffúziós együtthatónak tekinthető.

Sík lap feletti határréteg



Az örvényesség a fal felületén keletkezik a folyadék tapadása miatt és a határrétegben vezetés révén kerül be az áramlási térbe.

A határréteg leválás szerepe



http://www.computationalfluiddynamics.com.au/cfd-turbulence-part5-scale-resolving-simulations_srs/

Összefoglalás

Az örvénytranszport-egyenlet ρ=áll, ν=áll esetében:

$$\frac{d\underline{\omega}}{dt} = \nabla \times \underline{g} + \nu \, \Delta\underline{\omega} + \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v}$$

Az örvényesség keletkezése:
- Fali tapadás
- Nem konzervatív erőtér
  (pl. Coriolis-erő)

Örvények átrendeződése:
- Advekció
- Örvénnyúlás
- Örvény diffúzió