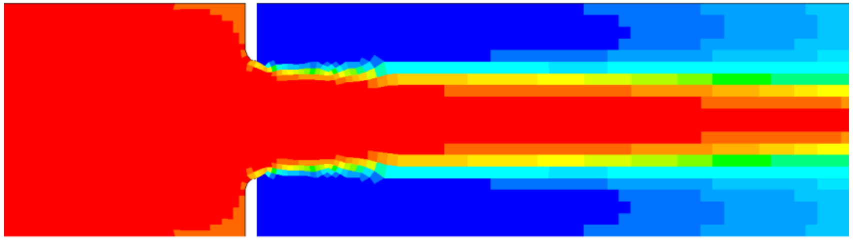
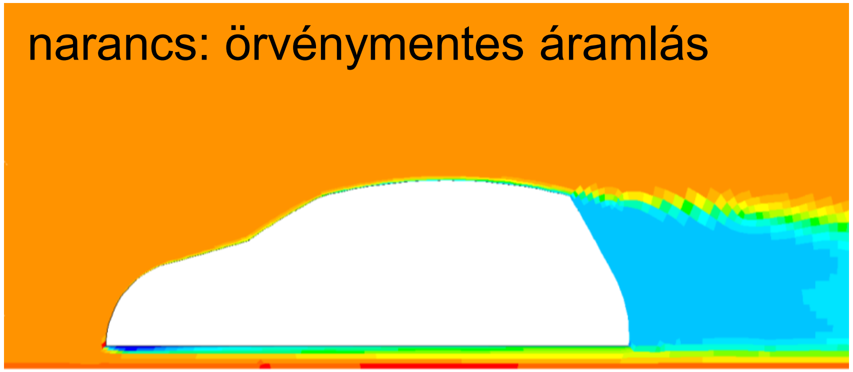
Potenciálos áramlás viszkózus folyadékban

Össznyomás megoszlása 2D CFD modellek alapján:

szárny körül



szűk nyílás esetében



egy autó körül

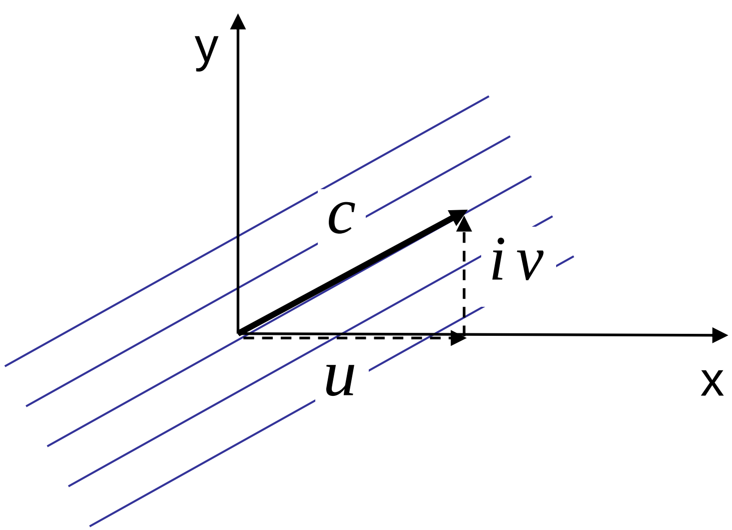
Párhuzamos áramlás

$$w = \bar{c}\, z$$

$$\bar{c} = \frac{dw}{dz} = u - i\,v$$

$$w = (u - i\,v)(x + i\,y) = \underbrace{ux + vy}_{\phi} + i\,(\underbrace{-vx + uy}_{\psi})$$

Pl: a ψ=0 áramvonal egy origón áthaladó egyenes:



$$y = \frac{v}{u}\, x$$

Potenciálos örvény

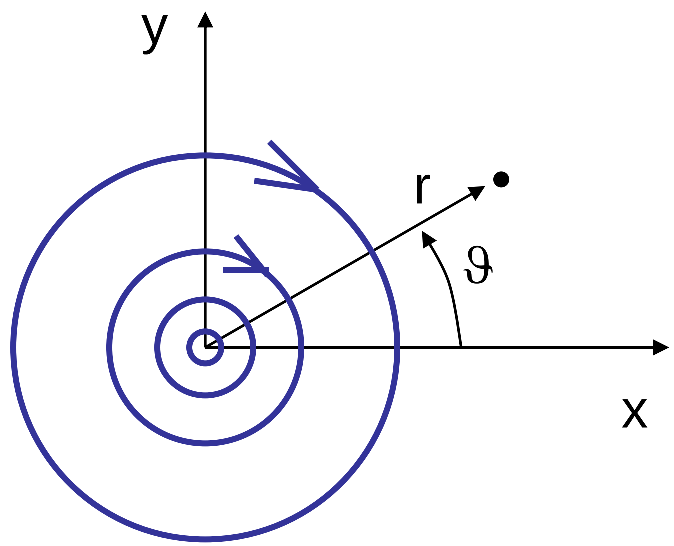
$$w = i\,k\ln z$$

k: tetszőleges valós szám.

$$w = i\,k\ln\left(r\,e^{i\vartheta}\right) = \underbrace{-k\vartheta}_{\phi} + i\,\underbrace{k\ln r}_{\psi}$$

Az áramvonalak koncentrikus körök:

$$\psi = k\ln r = \text{áll.}$$



Potenciálos örvény

A sebességmező:

$$\bar{c} = \frac{dw}{dz} = i\,\frac{k}{z} = i\,\frac{k}{r\,e^{i\vartheta}} = i\,\frac{k}{r}\,e^{-i\vartheta}$$

$$\bar{c} = \frac{k}{r}\,i\left(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)\right)$$

$$c = \frac{k}{r}\left(\sin\vartheta - i\cos\vartheta\right)$$

Tangenciális irányú egységvektor.

A sebesség nagysága: $$|c| = \frac{k}{r}$$

Cirkuláció az origót egyszer megkerülő görbére:

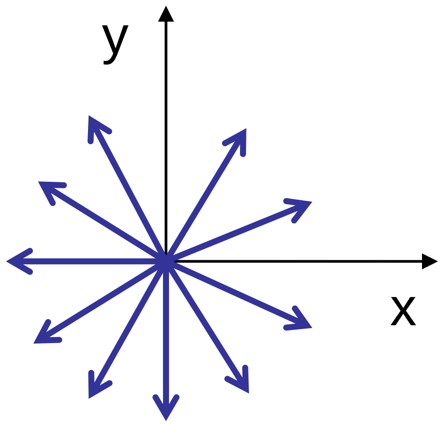
$$\Gamma\ \left[\frac{m^2}{s}\right] = 2\,r\,\pi\,|c| = 2\,r\,\pi\,\frac{k}{r} = 2\,\pi\,k$$

ezért: $$\boxed{k = \frac{\Gamma}{2\,\pi}}$$

Forrás

Ez 3D-ben szemlélve vonalforrás.

$$\boxed{w = k \ln z}$$ k: tetszőleges valós szám.



$$w = k \ln\left(r\, e^{i\vartheta}\right) = \underbrace{k \ln r}_{\phi} + i\, \underbrace{k\vartheta}_{\psi}$$

$$z = x + iy \longrightarrow \psi = k\, atg \frac{y}{x}$$

$$\bar{c} = \frac{dw}{dz} = \frac{k}{z} = \frac{k}{r}\left(\cos\vartheta - i \sin\vartheta\right)$$

$$c = \frac{k}{r}\left(\cos\vartheta + i \sin\vartheta\right)$$

Radiális egységvektor.

$$Q\left[\frac{m^2}{s}\right] = \psi_{\vartheta=2\pi} - \psi_{\vartheta=0} = k\,2\pi$$

ezért: $$\boxed{k = \frac{Q}{2\pi}}$$

Sarok körüli áramlás

$$\boxed{w = \frac{k}{n} z^n}$$

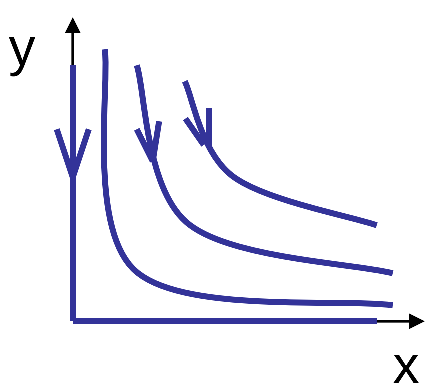
k, n: valós számok,
és n>0.

$$w = \frac{k}{n} r^n e^{in\vartheta} = \frac{k}{n} r^n \left(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta\right)$$

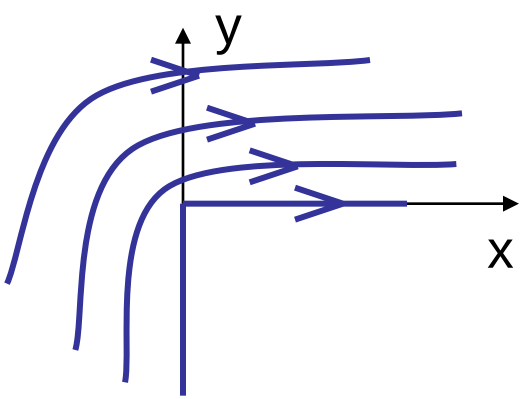
$$\psi = \frac{k}{n} r^n \sin n\vartheta$$

$$\psi = 0, \text{ ahol } \quad \vartheta = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots$$

n=2 :
Ψ=0, ha
0, π/2

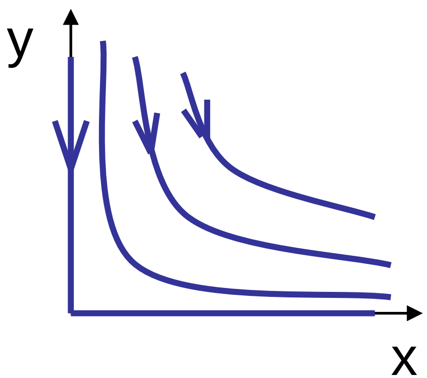


n=2/3 :
Ψ=0, ha
0, 3π/2



Sarok körüli áramlás

a. Milyen alakúak az áramvonalak? y=f(x) ?
b. Hogyan változik a torlóponti áramvonalon (y tengely mentén) mozgó folyadékrész sebessége? v=g(y) ?



$$\psi = \frac{k}{2} r^2 \sin 2\vartheta$$ áramvonalon: Ψ=áll.

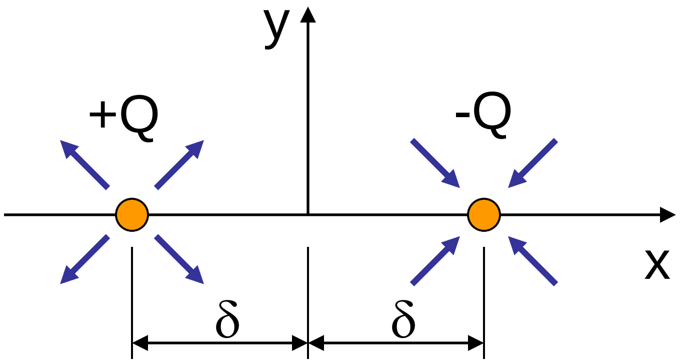
$$\psi = k\, r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$$

$$\psi = k\, x\, y$$

$$y = \frac{\psi}{k} x^{-1}$$ Tehát az áramvonalak hiperbolák.

$$\bar{c} = kz \longrightarrow v = -k\, y$$

Dipólus



$$\delta \to 0, \quad Q \to \infty, \quad Q \cdot \delta = \text{áll.}$$

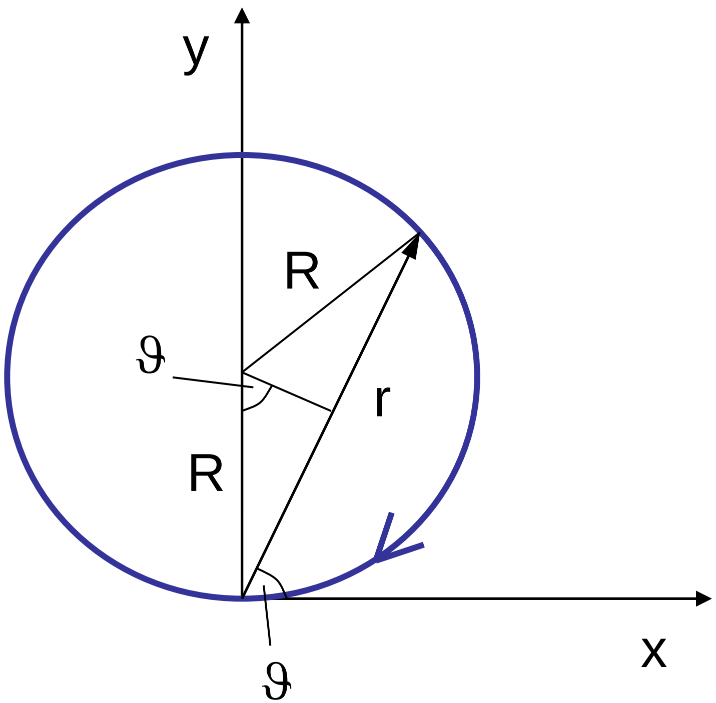
$$w = \frac{Q}{2\pi}\left[ln(z+\delta) - ln(z-\delta)\right]$$

$$\bar{c} = \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{z+\delta} - \frac{1}{z-\delta}\right]$$

$$\bar{c} = \frac{Q}{2\pi}\frac{z-\delta-(z+\delta)}{z^2-\delta^2}$$

$$\boxed{w = \frac{M}{z}} \qquad \bar{c} = -\frac{M}{z^2} \xleftarrow{\delta \to 0, \quad Q \to \infty} \bar{c} = -\frac{Q\delta}{\pi}\frac{1}{z^2-\delta^2}$$

Dipólus



$$w = \frac{M}{z} = \frac{M}{r\,e^{i\vartheta}} = \frac{M}{r}\left(\cos\vartheta - i\sin\vartheta\right)$$

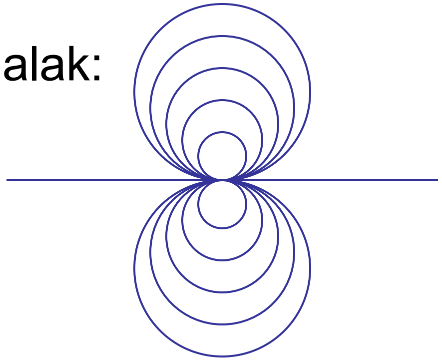
$$\psi = -\frac{M}{r}\sin\vartheta = \text{const.}$$

$$r = -\frac{M}{\psi}\sin\vartheta$$

Egy x tengelyt érintő kör egyenlete:

$$r = 2R\sin\vartheta$$

Az áramvonalak:



tehát az áramvonalak R sugarú körök:

$$2R = -\frac{M}{\psi} \longrightarrow R = -\frac{M}{2\psi}$$

Henger körüli áramlás

$$\boxed{w = c_\infty z + \frac{M}{z}}$$

c_∞ valós szám

$$w = c_\infty r\, e^{i\vartheta} + \frac{M}{r} e^{-i\vartheta} = c_\infty r\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right) + \frac{M}{r}\left(\cos\vartheta - i\sin\vartheta\right)$$

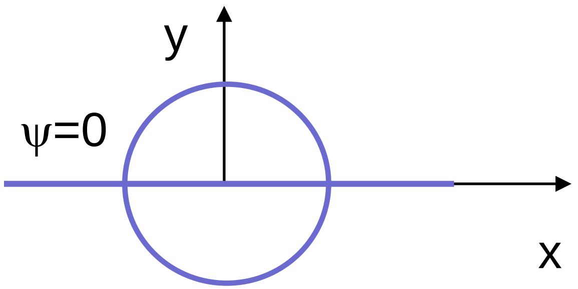
$$\psi = \left(c_\infty r - \frac{M}{r}\right)\sin\vartheta$$

Milyen alakú a ψ=0 áramvonal?

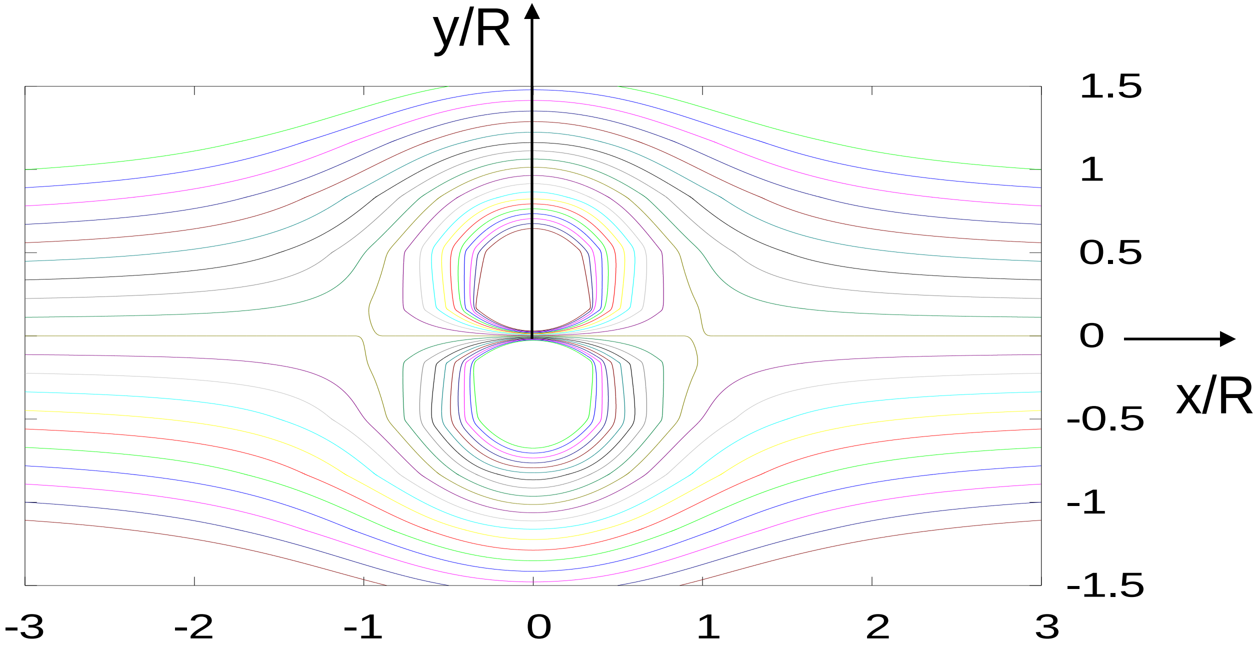
ha a zárójeles tényező 0: $c_\infty R - \frac{M}{R} = 0$

ha sinϑ=0, akkor ϑ = 0, π...

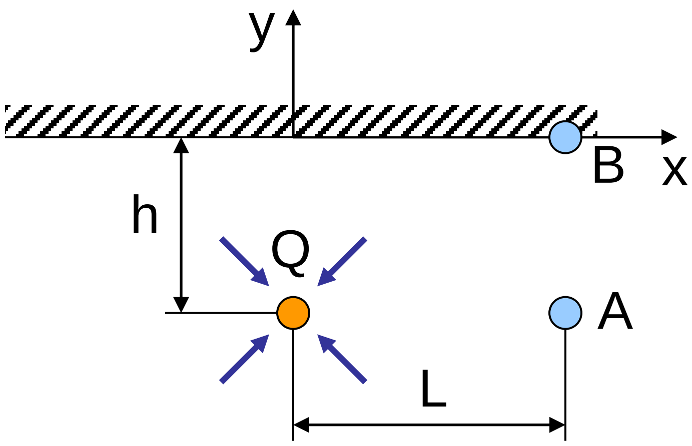
$$\boxed{w = c_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right)} \longleftarrow \frac{M}{c_\infty} = R^2$$



Henger körüli áramlás

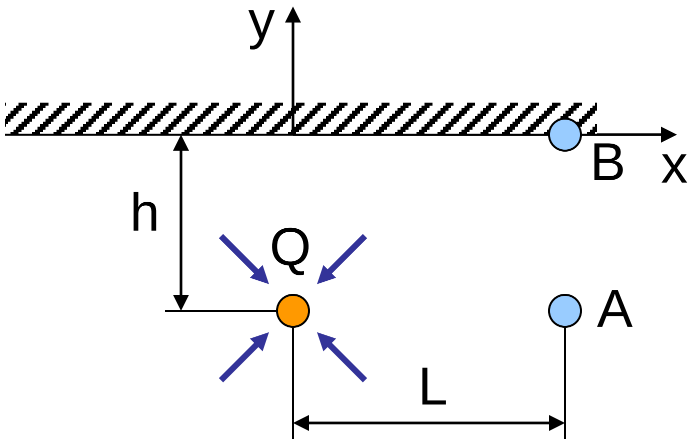


Feladat



a) Adja meg az ábrán látható áramlás komplex potenciálját adott Q, h és L esetén! (A sraffozott felületen függőleges áramlás nem lehetséges.)
b) Határozza meg a sebesség nagyságát a B pontban.
c) Határozza meg a térfogatáramot A és B pontok között?
d) Határozza meg a nyomásmegoszlást az x tengely mentén!
e) Milyen feltételből lehetne meghatározni egy vízszintes kút maximális megengedhető térfogatáramát (Q_{max})?

Megoldás



Szimmetria miatt tükrözés:

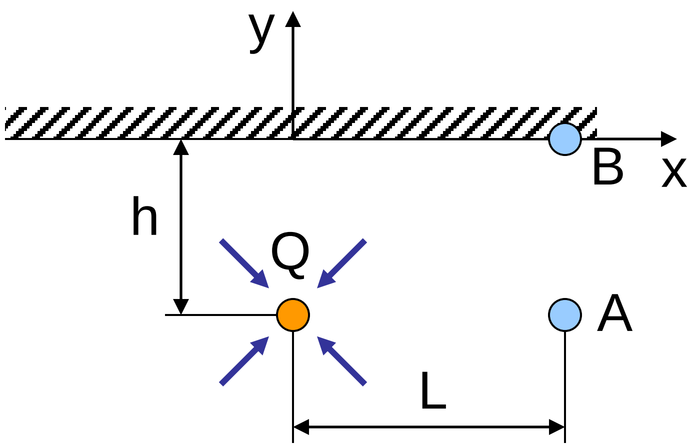
$$w = -\frac{Q}{2\pi}\left[ln(z + i\,h) + ln(z - i\,h)\right]$$

$$w = -\frac{Q}{2\pi}\,ln\left(z^2 + h^2\right)$$

$$\bar{c} = -\frac{Q}{\pi}\left[\frac{z}{z^2 + h^2}\right]$$

$$c_B = -\frac{Q}{\pi}\frac{L}{L^2 + h^2}$$

Megoldás



$$w = -\frac{Q}{2\pi} ln\left(z^2 + h^2\right)$$

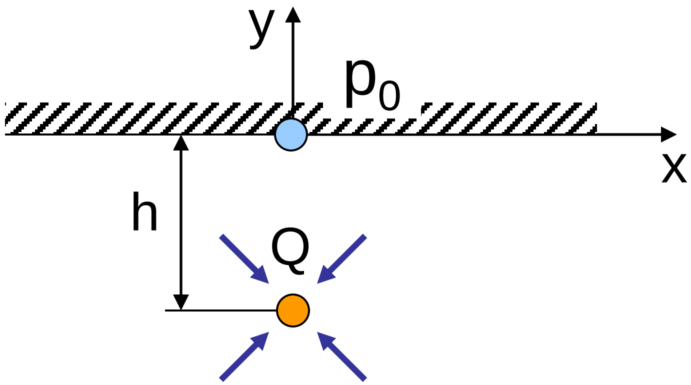
$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} atg \frac{Im(z^2 + h^2)}{Re(z^2 + h^2)}$$

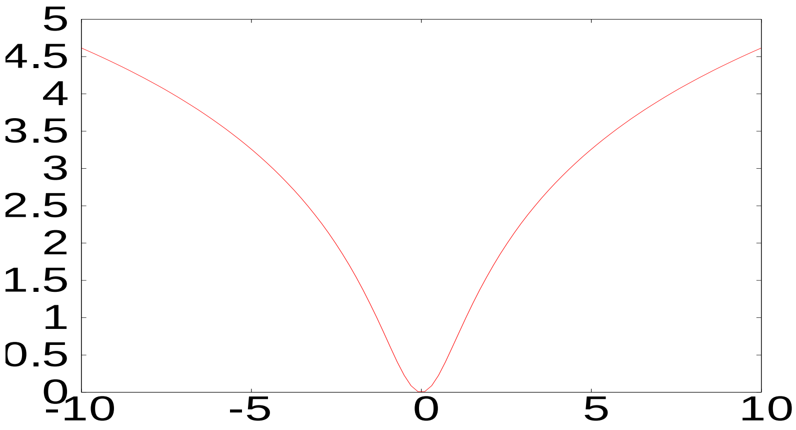
$\psi_B = 0$ mivel az áramvonalak áthaladnak az origón.

$$z_A^2 + h^2 = (L - i\,h)^2 + h^2 = L^2 - h^2 - i\,2\,h\,L + h^2 = L^2 - i\,2\,h\,L$$

$$Q_{AB}\left[\frac{m^2}{s}\right] = \psi_A = -\frac{Q}{2\pi} atg \frac{-2\,h\,L}{L^2} = \frac{Q}{2\pi} atg \frac{2\,h}{L}$$

Megoldás





$$w = -\frac{Q}{2\pi} ln\left(z^2 + h^2\right)$$

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi} ln\left(\left|z^2 + h^2\right| \right)$$

$$\phi_{y=0} = -\frac{Q}{2\pi} ln\left(x^2 + h^2\right)$$

$$p_x - p_0 = \frac{\mu}{k}\left(\phi_0 - \phi_x\right)$$

$$p_x - p_0 = \frac{Q\mu}{2\pi k}\left(ln\left(x^2 + h^2\right) - ln\left(h^2\right)\right) = \underline{\frac{Q\mu}{2\pi k} ln\left(\frac{x^2}{h^2} + 1\right)}$$