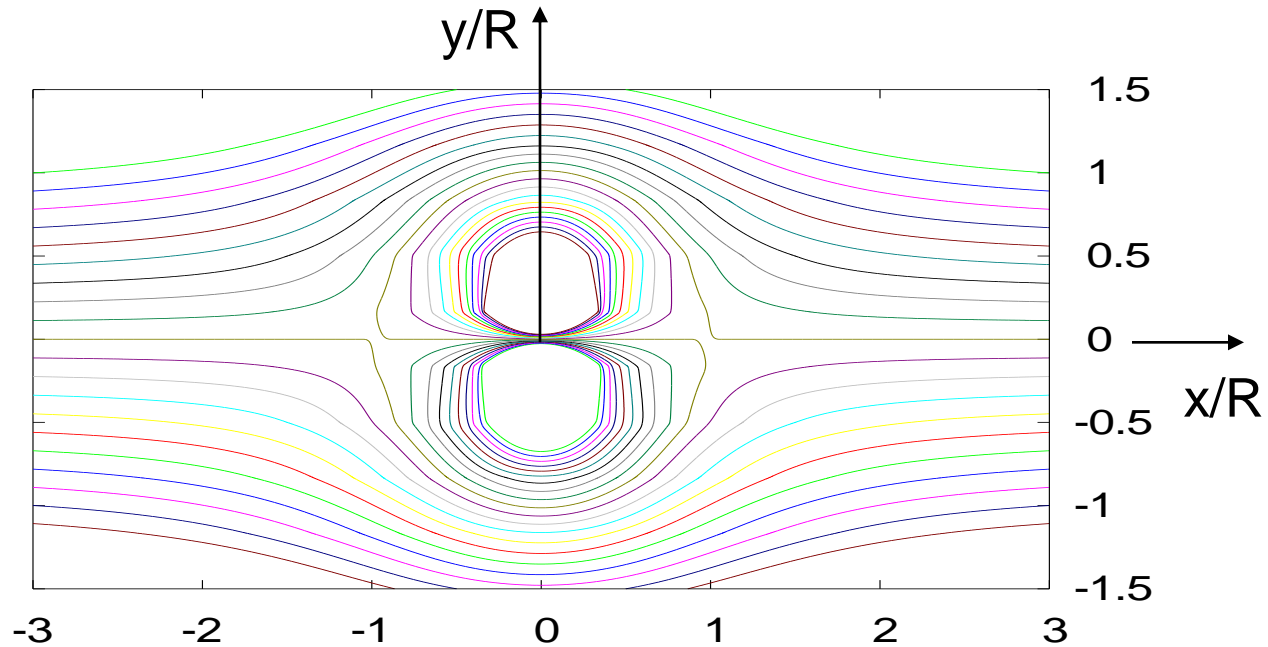


Henger körüli áramlás



$$w = c_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right) \longrightarrow \bar{c} = c_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right)$$

$$\bar{c}|_{r=R} = c_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{R^2} e^{-2i\vartheta} \right) = c_{\infty} (1 - \cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta)$$

Henger körüli áramlás

$$\bar{c}\Big|_{r=R} = c_\infty (1 - \cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta)$$

$$|c|_{r=R}^2 = (c \bar{c})_{r=R} = c_\infty^2 \left[(1 - \cos 2\vartheta)^2 + \sin^2 2\vartheta \right]$$

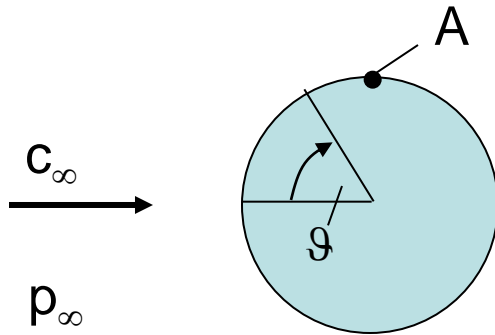
$$|c|_{r=R}^2 = c_\infty^2 \left[1 - 2\cos 2\vartheta + \underbrace{\cos^2 2\vartheta + \sin^2 2\vartheta}_1 \right]$$

$$|c|_{r=R}^2 = 2c_\infty^2 [1 - \cos 2\vartheta]$$

$$|c|_{r=R}^2 = 2c_\infty^2 \left[\underbrace{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}_1 - (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \right]$$

$$|c|_{r=R}^2 = 4c_\infty^2 \sin^2 \vartheta \quad \longrightarrow \quad |c|_{r=R} = 2c_\infty |\sin \vartheta|$$

Henger körüli áramlás



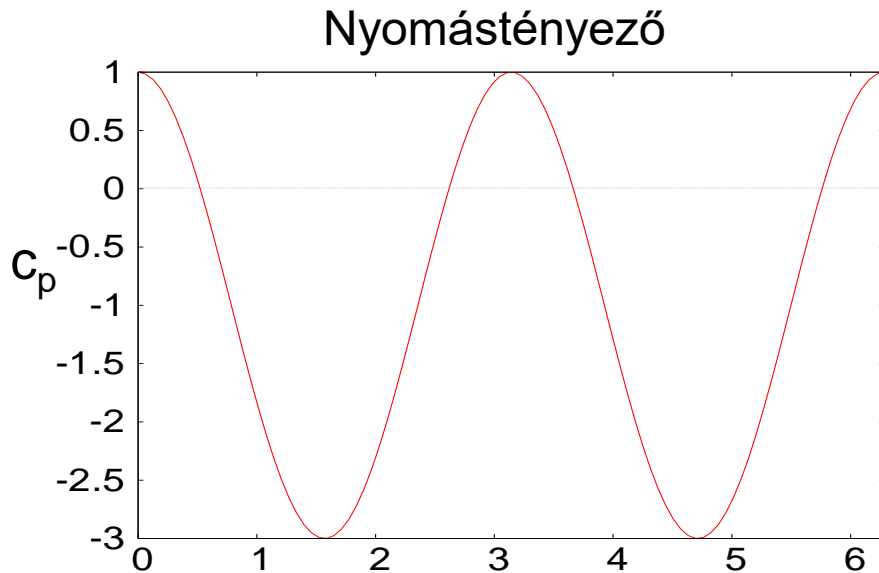
Maximális sebesség:

$$c_A = 2c_\infty$$

Nyomásmegoszlás:

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} c_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2} |c|^2$$

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} c_\infty^2} = \frac{\frac{\rho}{2} c_\infty^2 - \frac{\rho}{2} |c|^2}{\frac{\rho}{2} c_\infty^2}$$

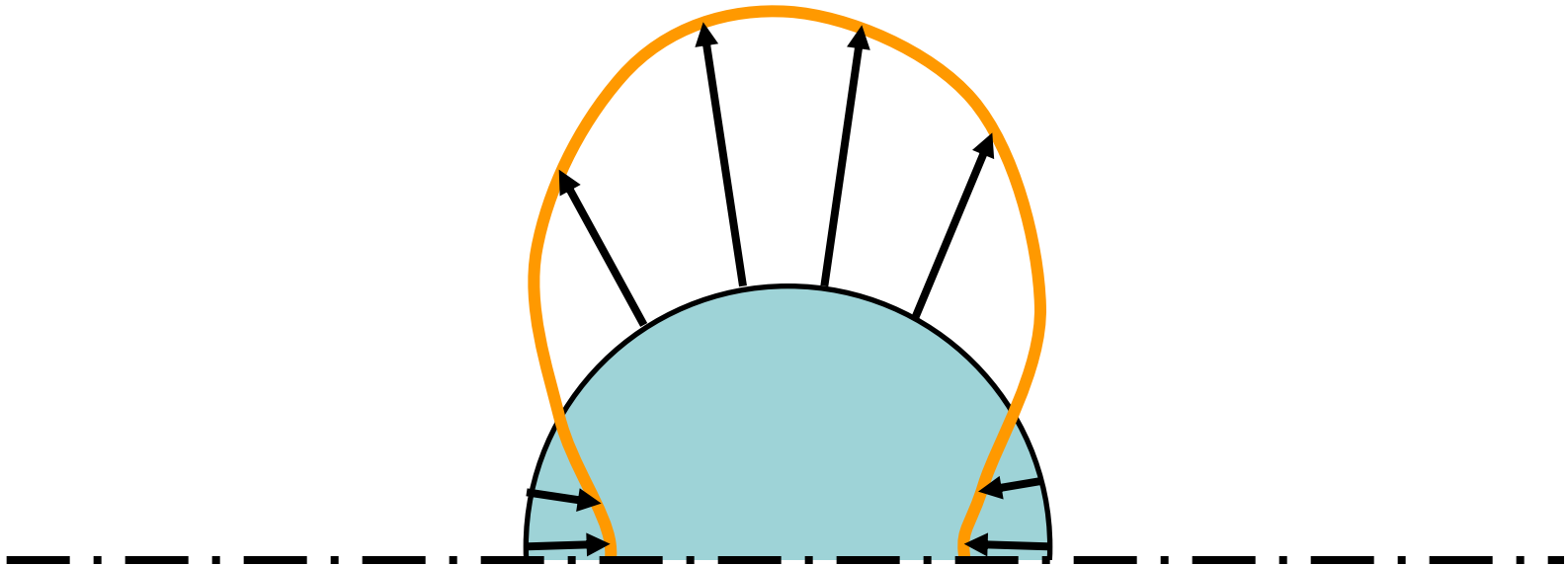


$$c_p = 1 - 4 \sin^2 \vartheta$$



$$c_p = 1 - \left(\frac{|c|}{c_\infty} \right)^2$$

Henger körüli áramlás

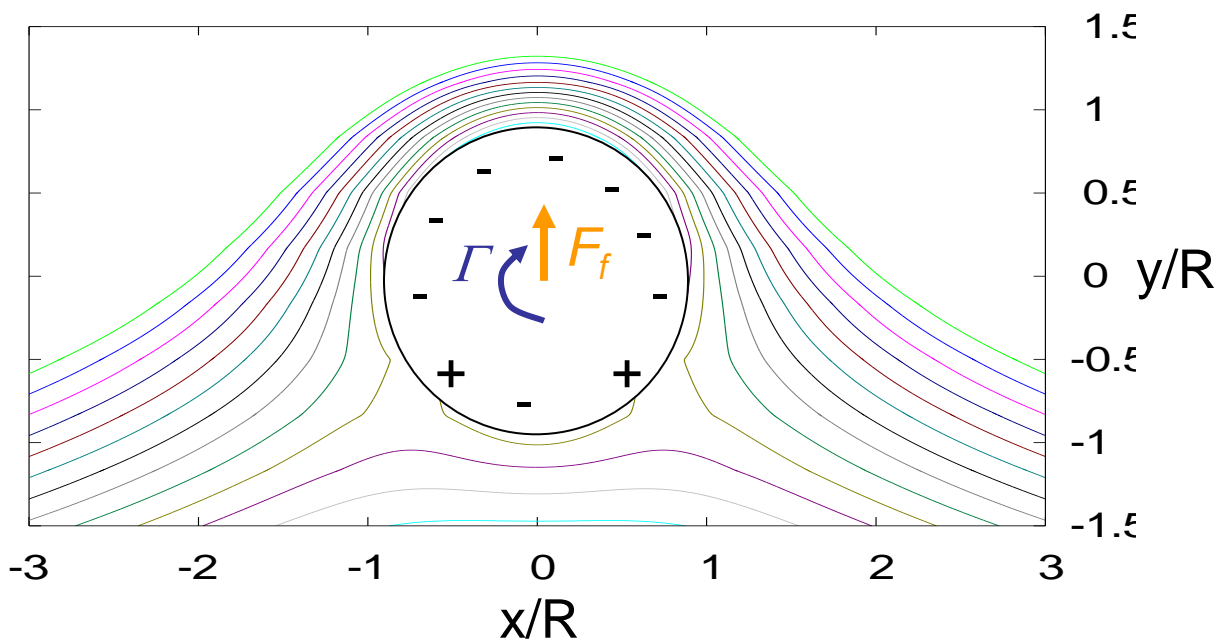


A legtöbb mozgó járműre felhajtóerő hat.

Flettner rotor

$$w = c_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$\frac{\Gamma}{c_\infty 2R\pi} = 1.6$$

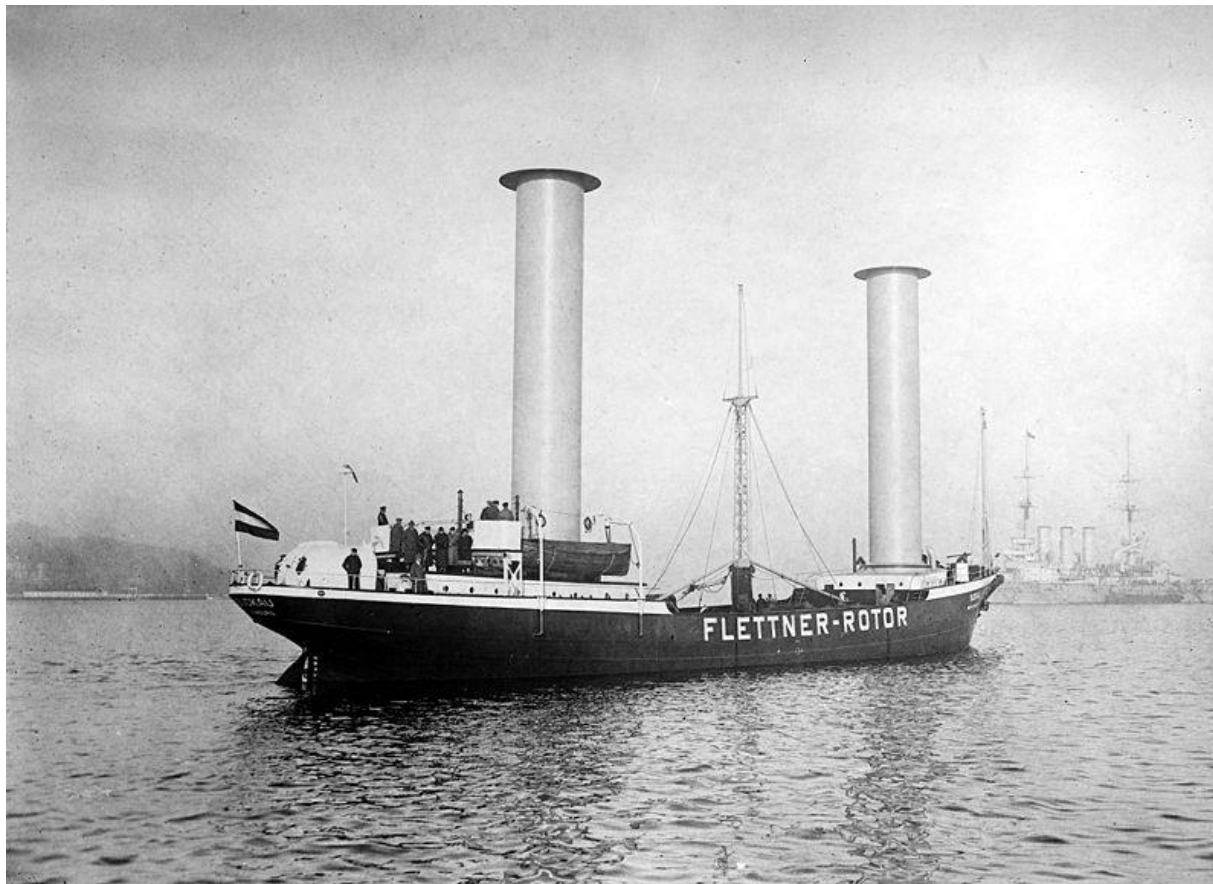
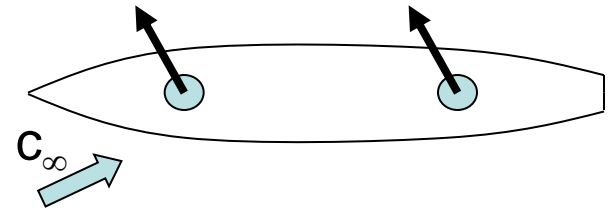


Mindkét torlópont eltolódik lefelé.
A cirkulációval arányos felhajtóerő keletkezik.

Magnus-hatás

Kutta-Zsukovszkij tétel:

$$F_f \left[\frac{N}{m} \right] = \rho c_\infty \Gamma$$



[<http://hu.wikipedia.org/wiki/Magnus-effektus>]

A torlópont

A felületi sebesség 0:

$$\underbrace{c_\infty 2 \sin \vartheta_0}_{\text{henger}} + \frac{\Gamma}{\underbrace{2R\pi}_{\text{örvény}}} = 0$$

Mekkora cirkuláció szükséges, hogy éppen ϑ_0 szöggel tolódjanak lejjebb a torlópontok?

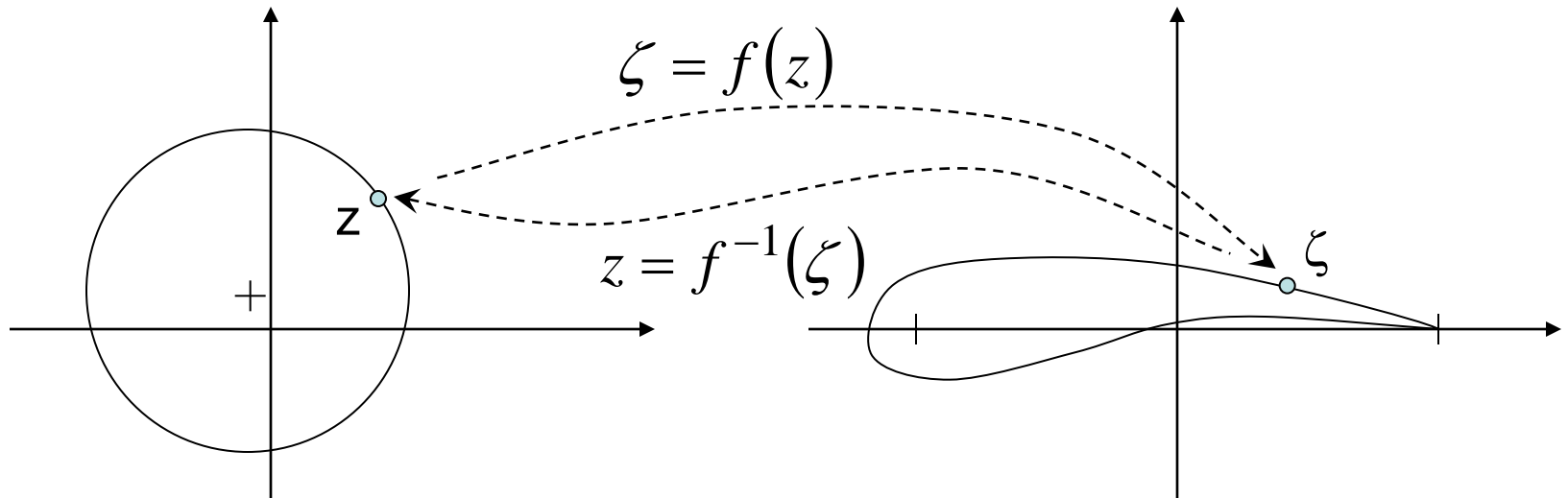
$$\Gamma = -c_\infty R 4\pi \sin \vartheta_0$$

$$\frac{\Gamma}{c_\infty 2R\pi} \begin{cases} < 2 & \text{két torlópont} \\ = 2 & \text{egy torlópont} \\ > 2 & \text{nincs torlópont a henger felületén} \end{cases}$$

Komplex leképezések

w más pontokban fogja fölvenni ugyanazokat az értékeket:

$$w(z) = w(\zeta)$$



Pl. egy forgó henger körüli áramlásból szárny körüli áramlást csinálhatunk.

Zsukovszkij transzformáció

Egy komplex leképezést konform, ha nem módosítja a függvény távoltéri jellemzőit.

Az ilyen transzformációk a következő alakban írhatók fel általánosan:

$$\zeta = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots \quad \text{ahol } a_1, a_2, a_3, \dots \text{ komplex számok.}$$

A legegyszerűbb változatot a Zsukovszkij transzformáció:

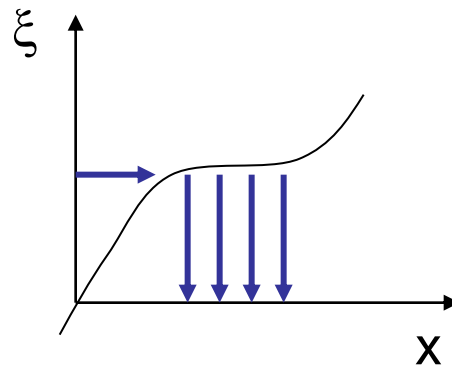
$$\zeta = z + \frac{a_{10}}{z}$$

ahol a_{10} valós.

Szinguláris pontok

Ahol a transzformációs összefüggés deriváltja 0, a transzformáció inverze nem egyértelmű.

Egy valós függvénnyel szemléltetve:



$$f'(x) = \frac{d\xi}{dx} = 0$$

$$\zeta = z + \frac{a_{10}}{z} \longrightarrow \frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{a_{10}}{z^2} = 0$$

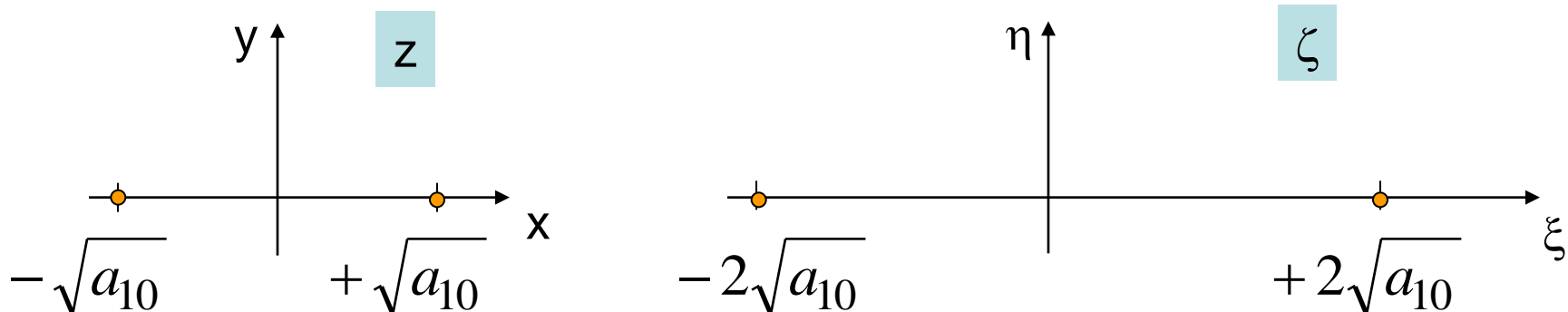
A Zsukovszkij transzformáció szinguláris pontjai:

$$z = \pm \sqrt{a_{10}}$$

Szinguláris pontok

A szinguláris pontok transzformált képei:

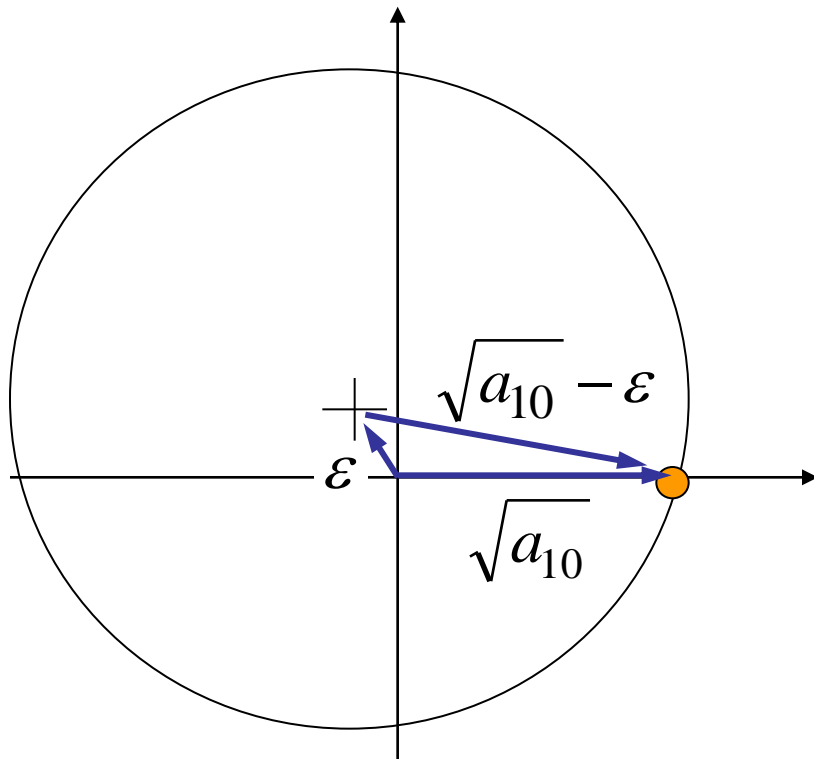
$$\zeta = \pm\sqrt{a_{10}} + \frac{a_{10}}{\pm\sqrt{a_{10}}} = \pm 2\sqrt{a_{10}}$$



A Zsukovszkij szárnyszelvények olyan körök képei, melyek legalább az egyik szinguláris ponton áthaladnak.

Zsukovszkij profilok

Hogyan írható fel egy ε középpontú, $\sqrt{a_{10}}$ -en áthaladó kör egyenlete?



Ha ε zérus, akkor:

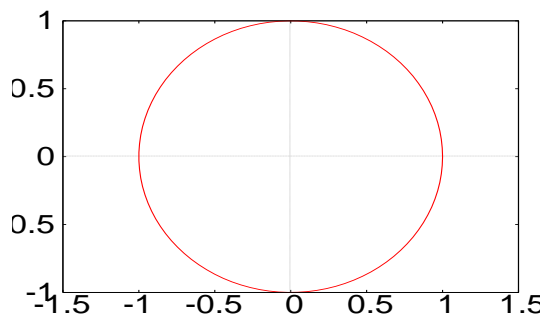
$$z_c = \sqrt{a_{10}} e^{i\vartheta}$$

Nem zérus ε esetén:

$$z_c = \left(\sqrt{a_{10}} - \varepsilon\right) e^{i\vartheta} + \varepsilon$$

Zsukovszij profilok

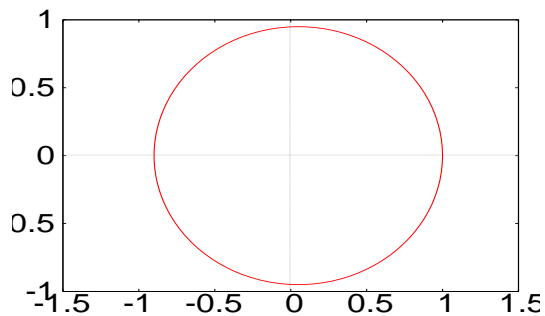
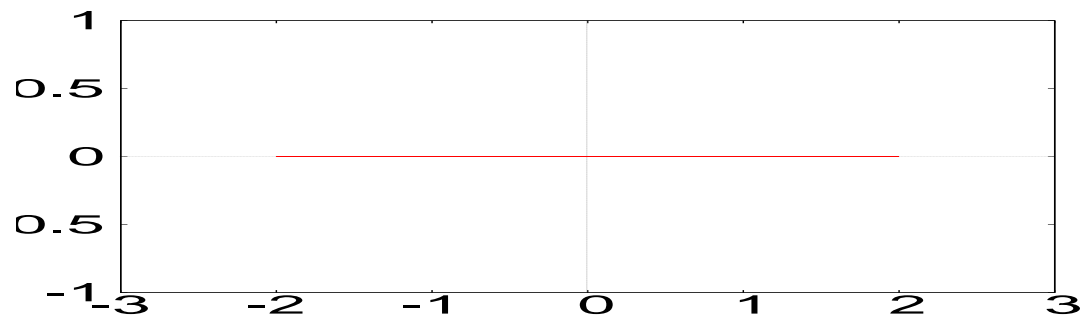
z sík



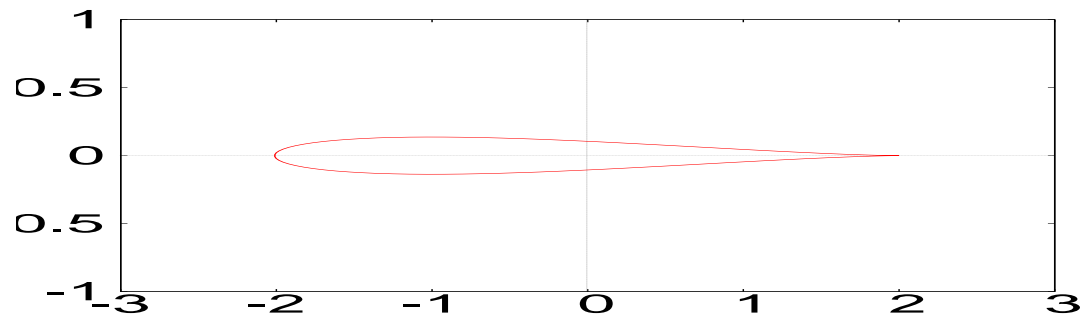
$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{a_{10}}} =$$

0

ζ sík

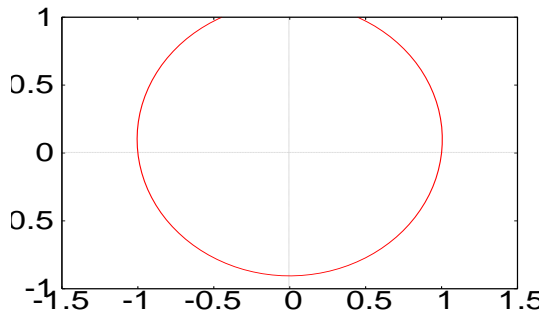


0.05



Zsukovszkij profilok

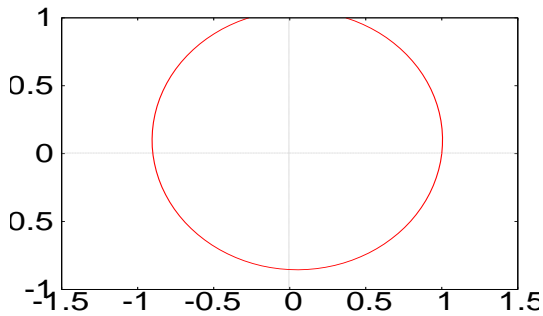
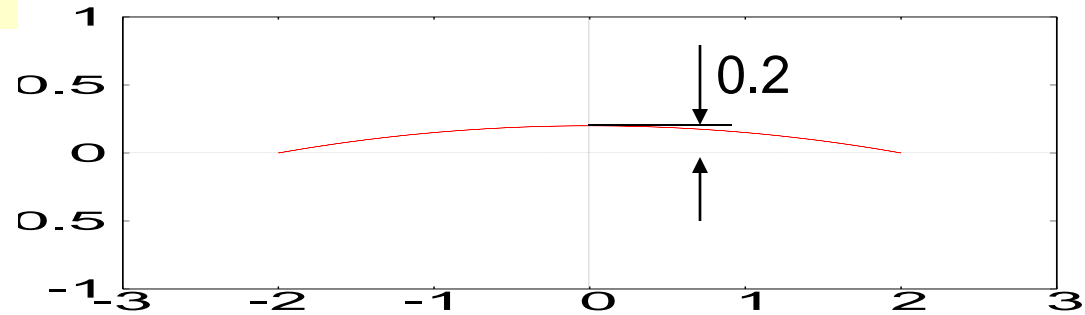
z sík



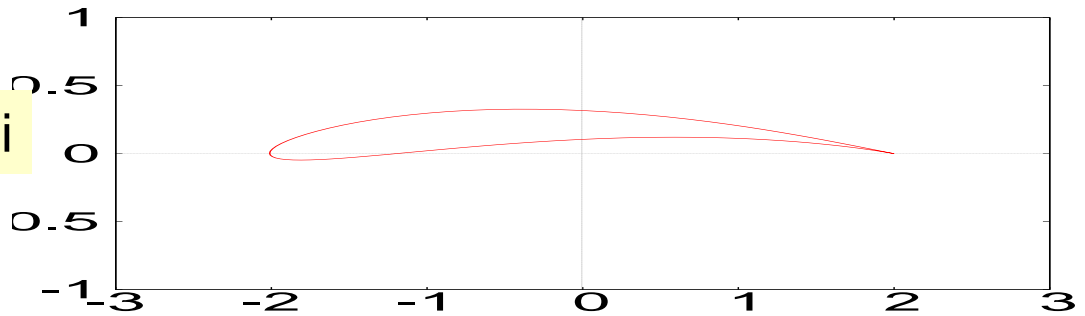
$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{a_{10}}} =$$

0.1i

ζ sík

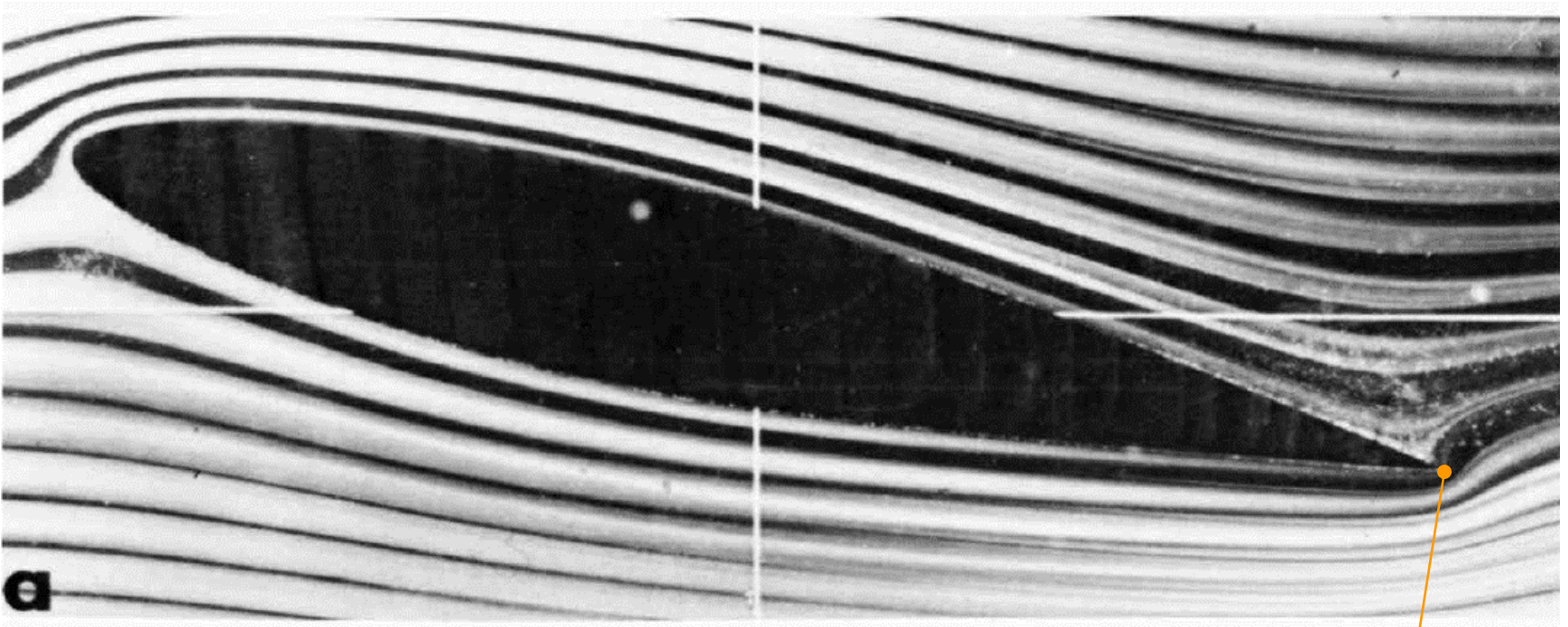


0.05+0.1i



Cirkuláció nélkül

... így néz ki a henger körüli áramlás képe:



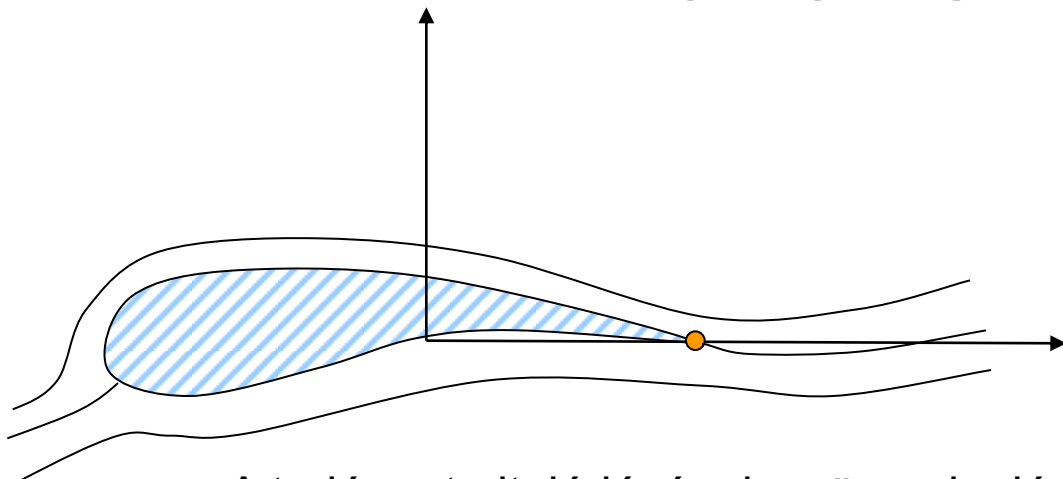
Hele-Shaw kísérlet: egy 13° állásszögű szárny körüli áramlás képe. Ilyen áramlásban nem lenne felhajtóerő!

Végtelen sebesség jön létre itt

A cirkuláció meghatározásához fel kell használjunk a szélcsatornás tapasztalatokat!

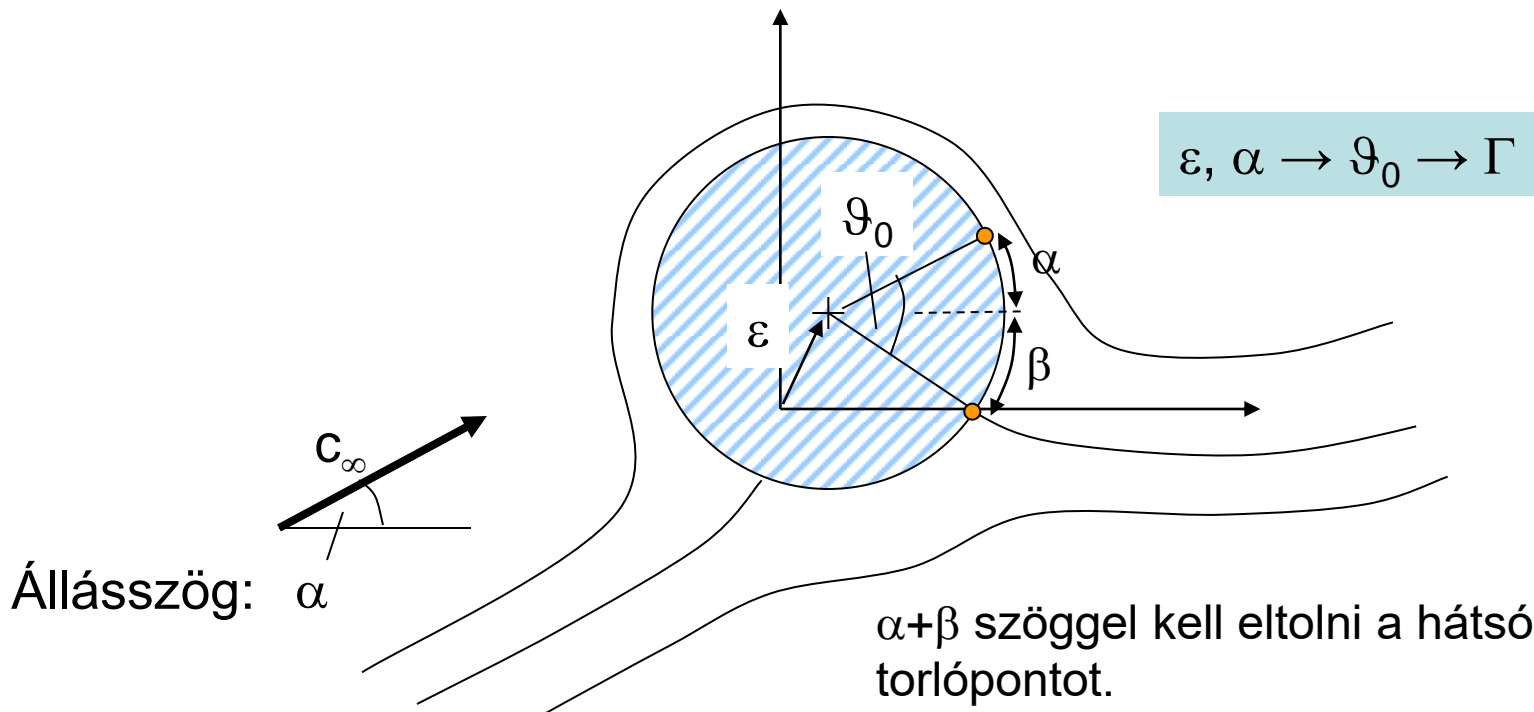
[An album of fluid motion]

Kutta feltétel



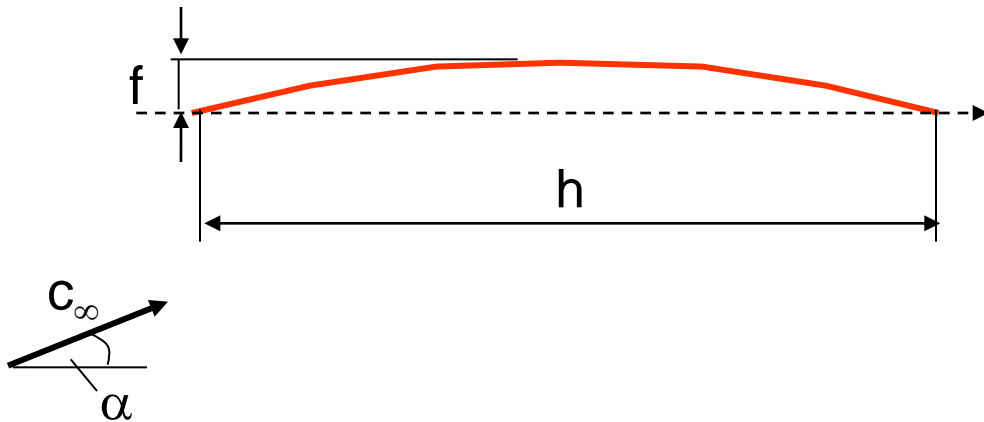
A valóságban a hátsó torlópont mindig a kilépő élbe kerül.

A torlópont eltolódásának szöge alapján a cirkuláció kiszámítható!



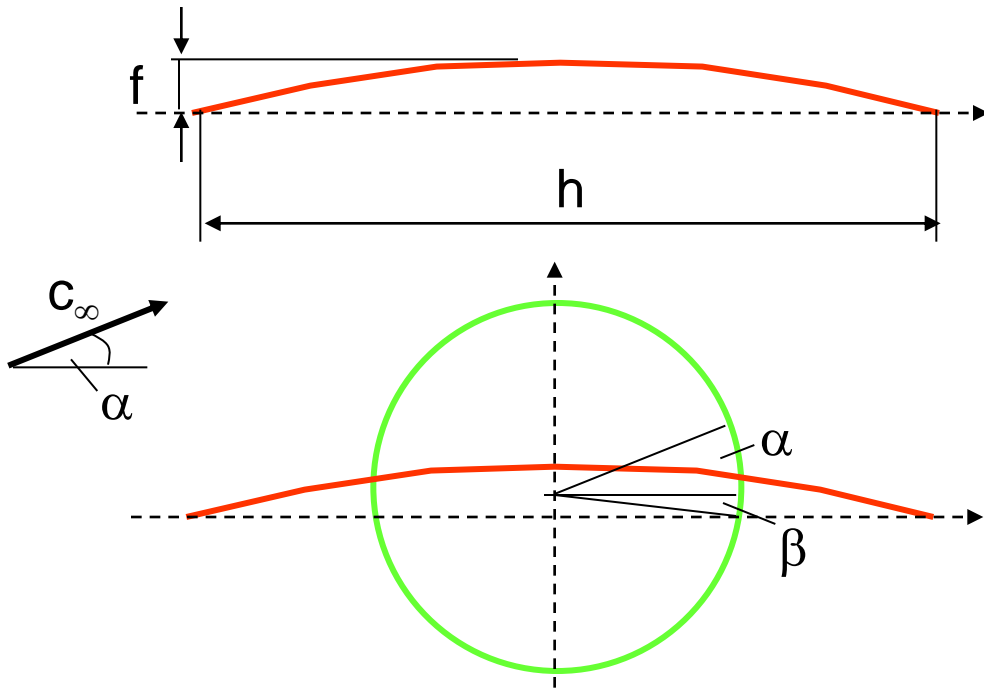
Ívelt lap

Becsüljük meg c_f felhajtóerő-tényező értékét ívelt lap esetén!
Feltételezhető, hogy α , f , h adottak, továbbá α és f/h értékei kicsik.



$$c_f = \frac{F_f}{\frac{\rho}{2} c_\infty^2 h}$$

Ívelt lap



A torlópont eltolásának szöge:

$$\vartheta_0 = -(\alpha + \beta)$$

melyből a cirkuláció:

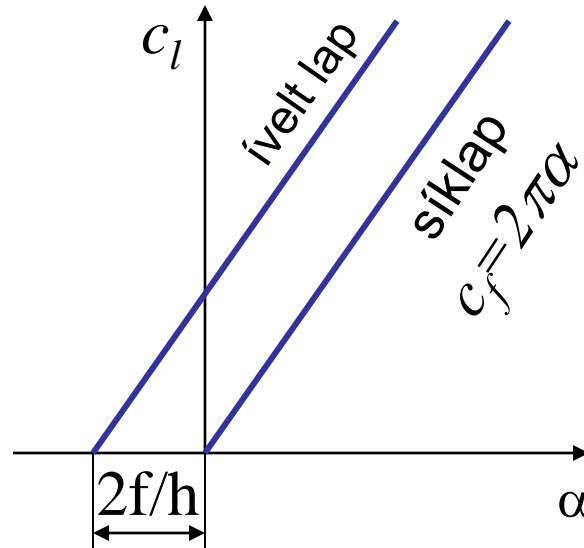
$$\Gamma = c_\infty 4R\pi \sin(\alpha + \beta)$$

$$\Gamma \approx c_\infty h\pi(\alpha + \beta)$$

$$\beta = \operatorname{atg}\left(\frac{f/2}{h/4}\right) \approx \frac{2f}{h}$$

$$c_f = \frac{\rho c_\infty \Gamma}{\frac{\rho}{2} c_\infty^2 h} = \frac{2\Gamma}{c_\infty h} \approx 2\pi \left(\alpha + \frac{2f}{h} \right)$$

Ívelt lap



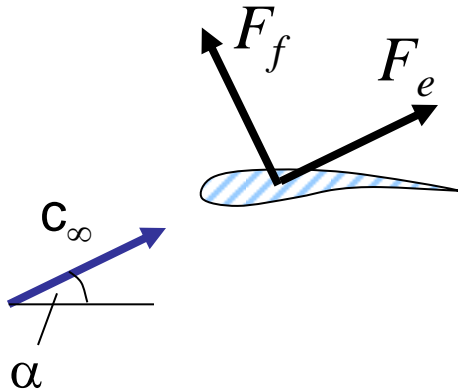
Pl. $\alpha=2^\circ$:

$$c_f=0.219$$

Mért érték:

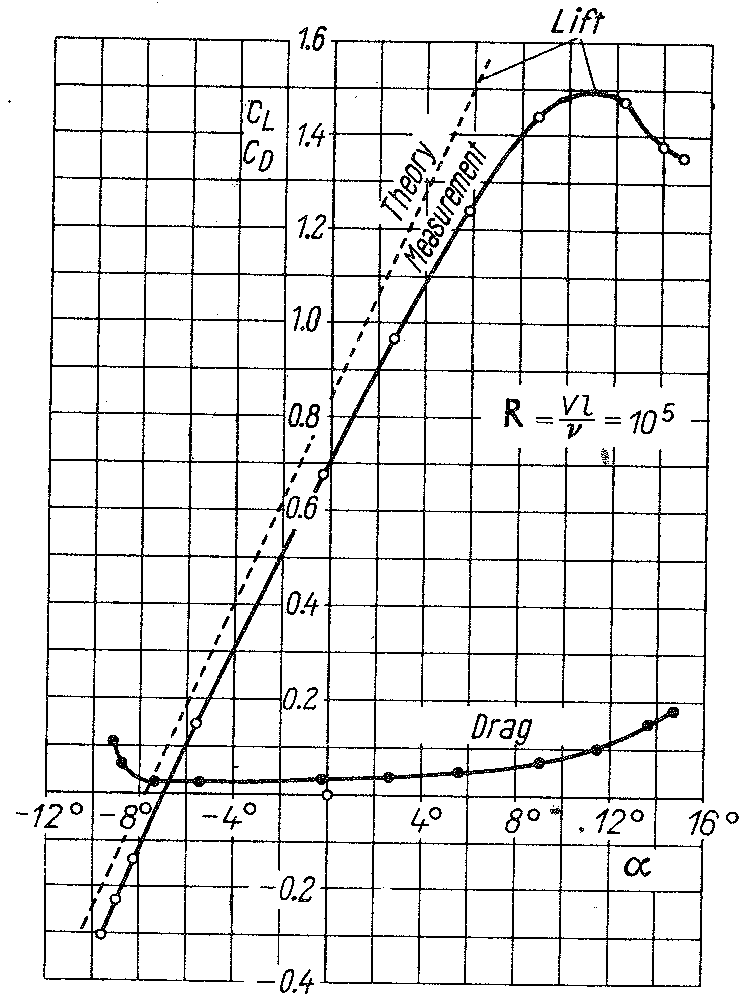
$$c_f=0.200$$

Mérésekkel összevetve

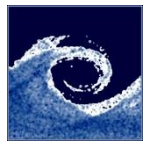


$$c_f = \frac{F_f}{\frac{\rho}{2} c_\infty^2 A}$$

$$c_e = \frac{F_e}{\frac{\rho}{2} c_\infty^2 A}$$

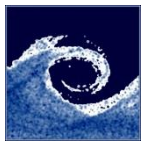


Egy Zsukovszkij felhajtóerő- és ellenállás-tényezője.

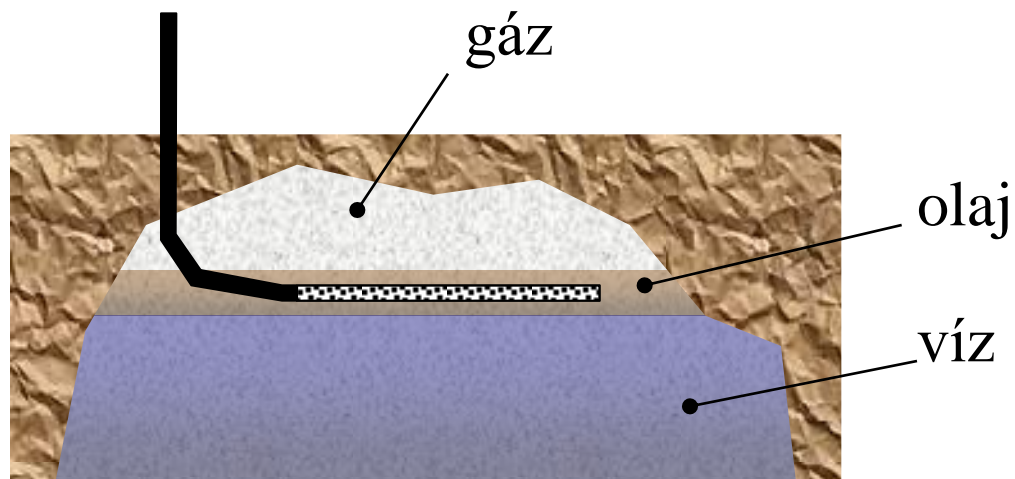
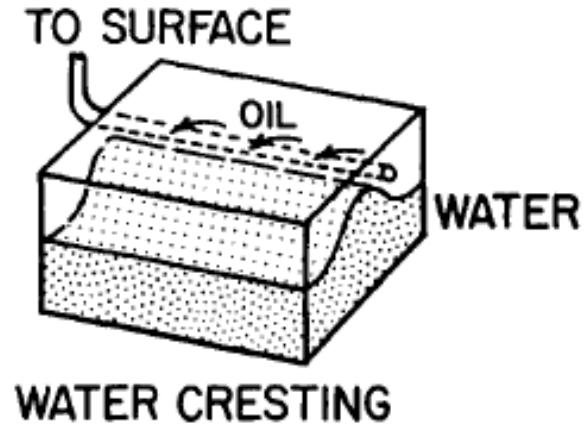
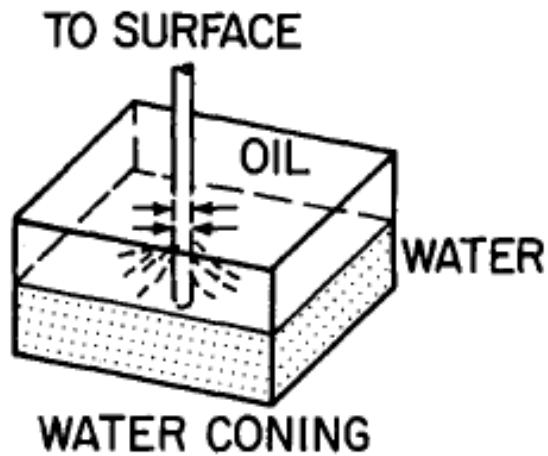


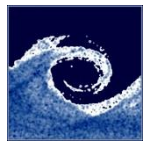
Alkalmazási példák

BME Áramlástan Tanszék

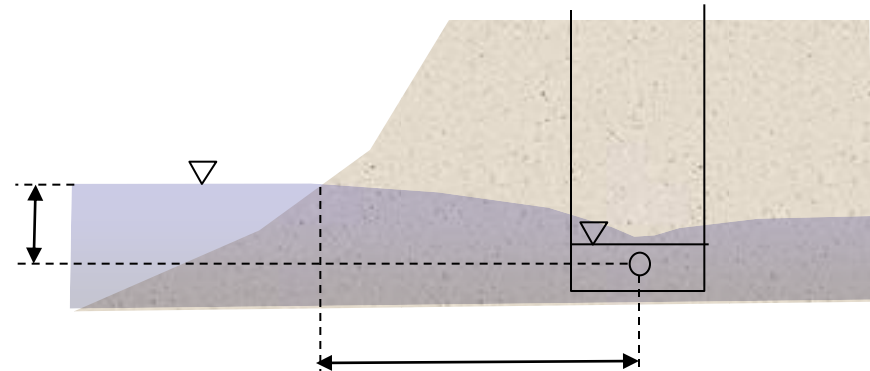
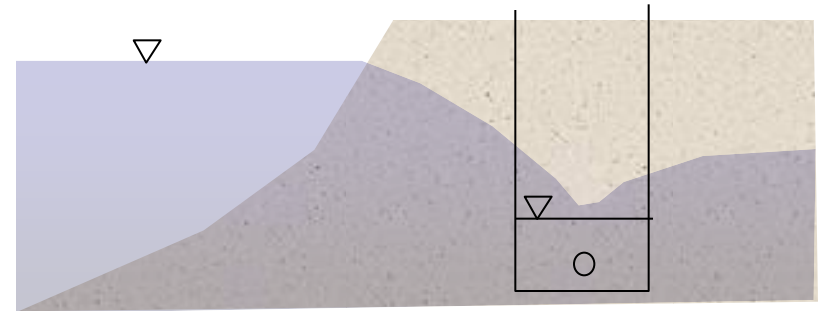
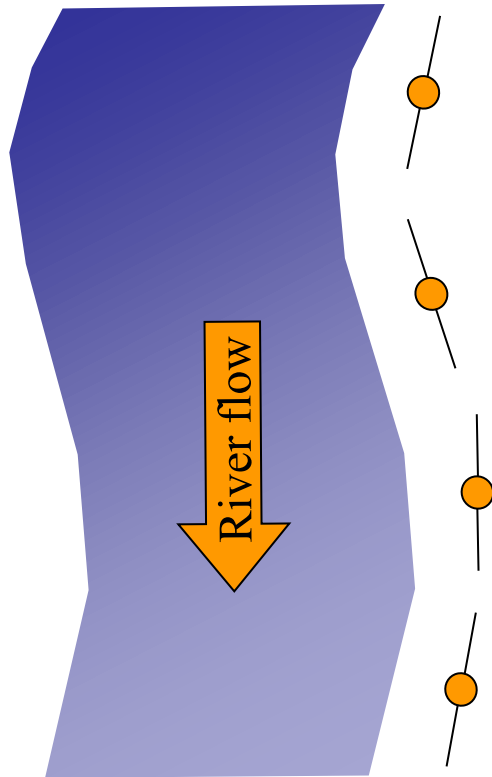


Olajtermelés vízszintes kúttal



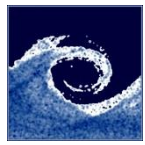


Partiszűrés



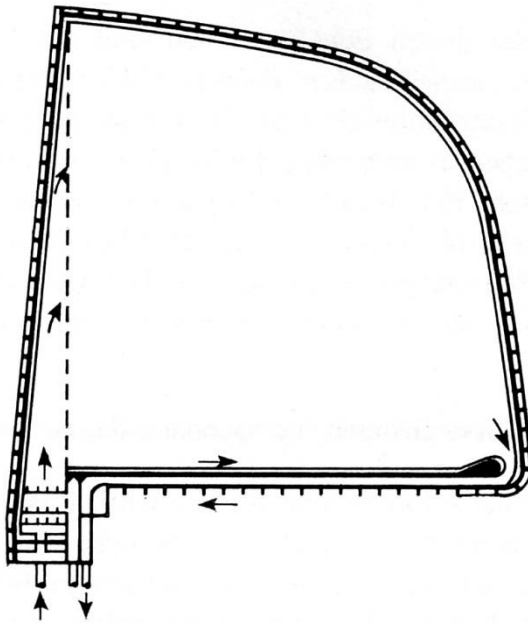
A kút termelőkapacitása függ:

1. A folyó szintjétől és a part alakjától (lásd fenti ábra);
2. A maximális megengedhető beszivárgási sebességtől;
3. A kavicságyban megengedhető maximális sebességtől.

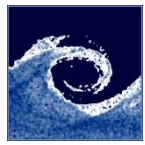


Guber József víztároló

A Fővárosi Vízművek 1970-ben átvette egy modern müncheni víztároló terveit.



2 zongora alakú, 40.000 m³ kapacitású tároló.

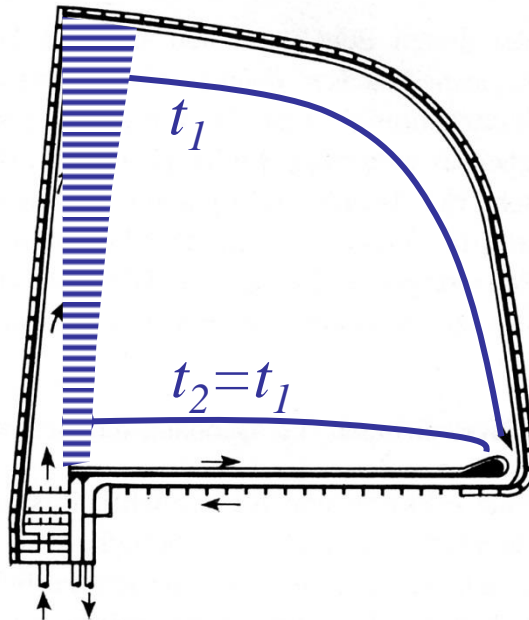


Eltérő üzemeltetés

Münchenben

Átfolyásos tároló.

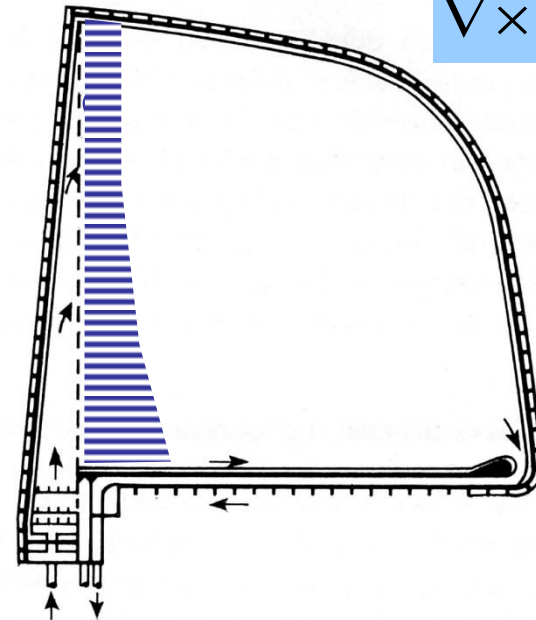
A teljes termelt vízmennyiség áthalad rajta, mindig van áramlás.



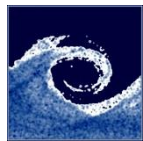
Budapesten

Ellennyomó tároló.

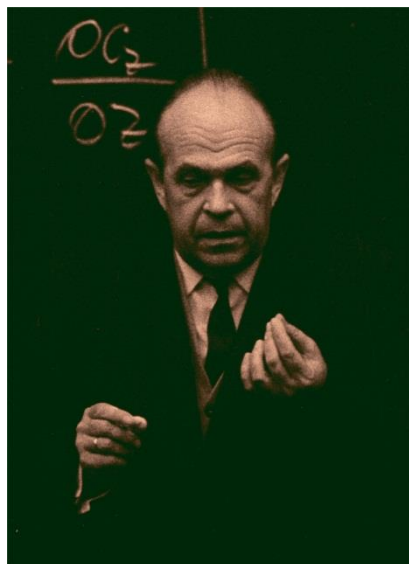
A hálózat nyomását stabilizálja, éjszaka töltődik, nappal ürül. A víz vagy csak be, vagy csak ki áramlik.



$$\nabla \times \vec{v} = 0 !$$

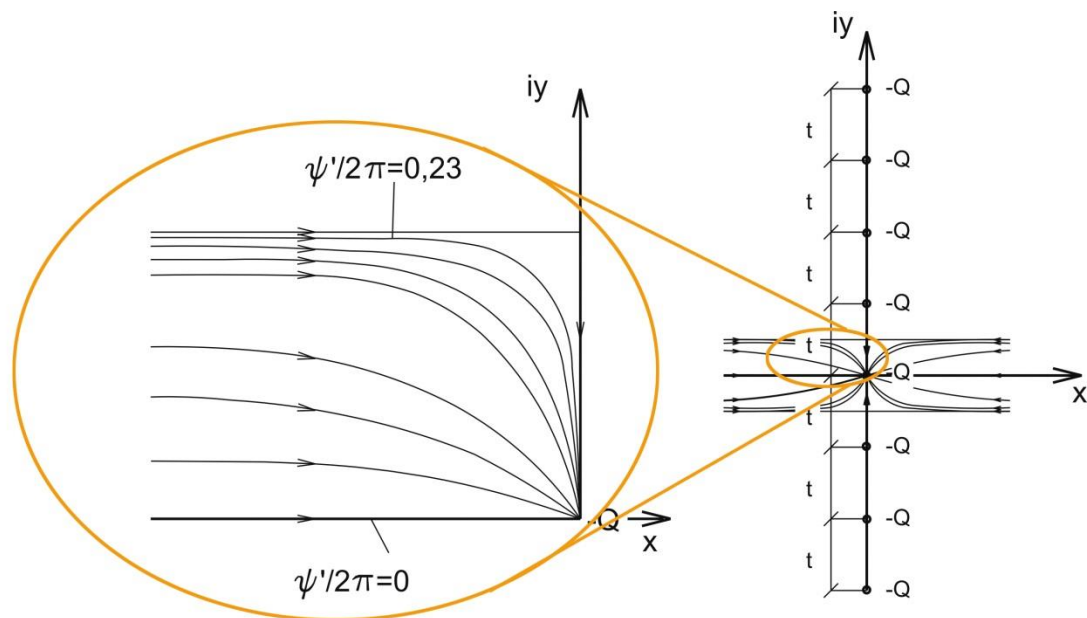


Gruber József (1915-1972)

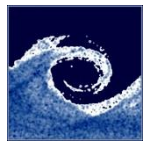


A BME Áramlástan Tanszék
tanszékvezetője: 1950-1972

Javasolta, hogy a potenciális áramképet
kellene megközelíteni. Szintén javaslatot tett az
analitikus megoldás módszerére:

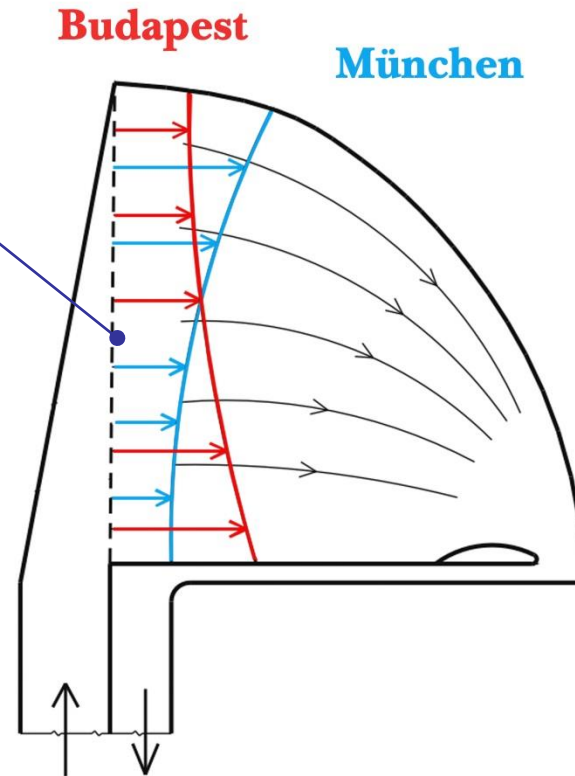


Végtelen nyelősor körüli
áramvonalak



Laborkísérletek

Variábilis vízelosztó
rács



- ➡ Kísérleti berendezés
- ➡ Egyenletes perforációval
- ➡ A müncheni változat
- ➡ A budapesti változat