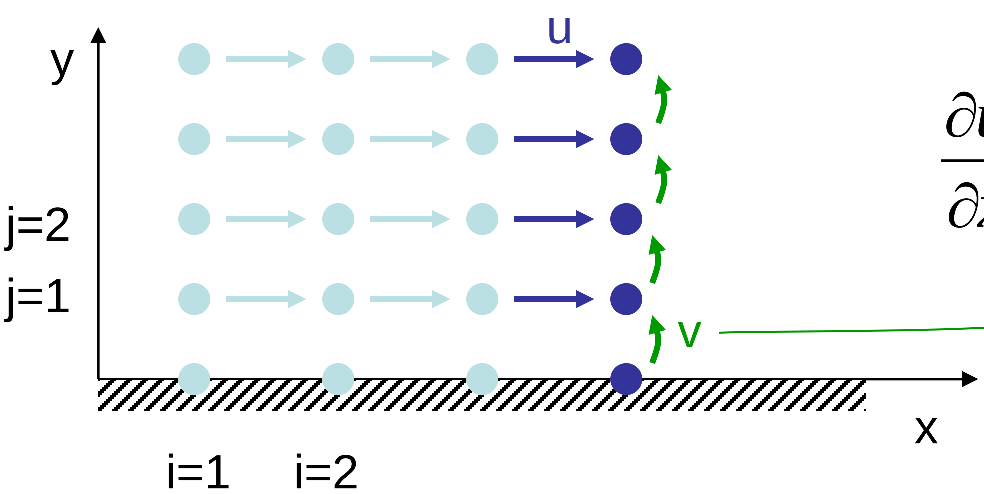
A numerikus megoldás módszere

$$u\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$



$$\frac{\partial u}{\partial x}+\boxed{\frac{\partial v}{\partial y}}=0$$

Parabolikus PDE ismeretlenek: $u(x,y)$ és $v(x,y)$

Diszkrét pontrácson reprezentáljuk: $u_{i,j}$ és $v_{i,j}$

Diszkretizálás

Explicit módszer: $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$$

Kiszámítjuk minden j-re

$$u_{i,j}\frac{\boxed{u_{i+1,j}} - u_{i,j}}{\Delta x} + v_{i,j}\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} = U_i\frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} +$$

$$+\frac{1}{\Delta y}\left(v_{i,j+1/2}\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} - v_{i,j-1/2}\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y}\right)$$

Kiszámítjuk minden j-re

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{\Delta x}\right) + \frac{\boxed{v_{i+1,j}} - v_{i+1,j-1}}{\Delta y} = 0$$

A numerikus stabilitás csak kicsi Δx lépések alkalmazásával érhető el.

Diszkretizálás

Implicit módszer: $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$$

$$u_{i,j}\frac{\boxed{u_{i+1,j}} - u_{i,j}}{\Delta x} + v_{i,j}\frac{\boxed{u_{i+1,j+1}} - \boxed{u_{i+1,j-1}}}{2\Delta y} = U_i\frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} +$$
$$+\frac{1}{\Delta y}\left(v_{i,j+1/2}\frac{\boxed{u_{i+1,j+1}} - \boxed{u_{i+1,j}}}{\Delta y} - v_{i,j-1/2}\frac{\boxed{u_{i+1,j}} - \boxed{u_{i+1,j-1}}}{\Delta y}\right)$$

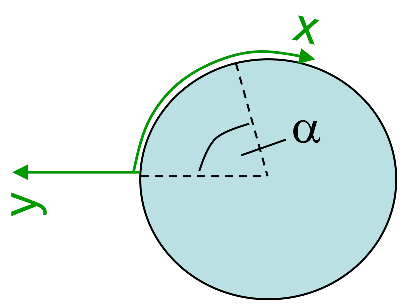
Minden új i érték esetén egy tridiagonál mx-ú egyenletrendszert oldunk meg.
A Gauss-elimináció speciális változata: Thomas-algoritmus.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{\Delta x}\right) + \frac{\boxed{v_{i+1,j}} - v_{i+1,j-1}}{\Delta y} = 0$$

3. szorgalmi feladat

a) Készítsen numerikus megoldást egy tengelyre merőlegesen megfújt körhenger homlokfelületén kialakuló lamináris határréteg sebességmegoszlására Re_D=10000 esetén! A külső áramlás U sebességét a henger körüli potenciálos áramlás alapján számítsa ki! A határréteg görbületéből adódó erők elhanyagolhatók. α: 0..100° tartományban változhat. Jelenítse meg a sebességmegoszlást α=45°-nál y függvényében és számítsa ki a leválási pont α értékét.

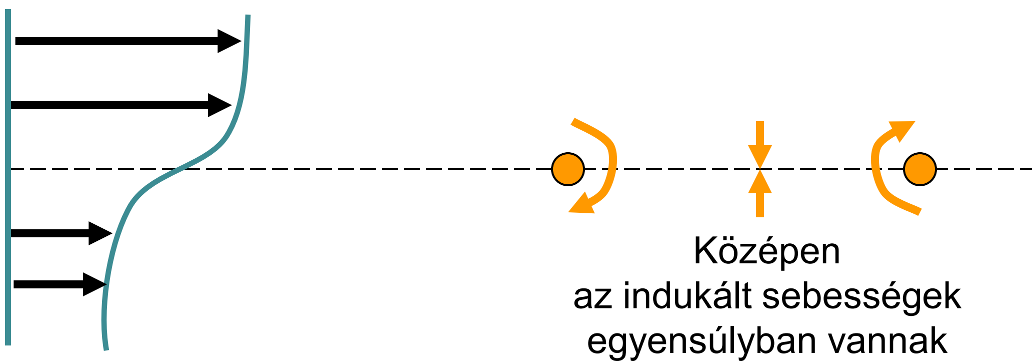
b) A lamináris határrétegre vonatkozó hasonlósági szabályok alkalmazásával skálázza át a 45°-hoz tartozó sebességmegoszlást Re_D=2500 Reynolds-számú áramlásra! A numerikus megoldóval ellenőrizze az átszámítás helyességét!



Kérem, hogy a válaszát képletekkel, ábrával és néhány mondatos indoklással max. 8 oldalas PPT fájlban adja meg a Poseidon rendszerben kiírt feladatra! Helyes megoldással 5 vizsgapont szerezhető.

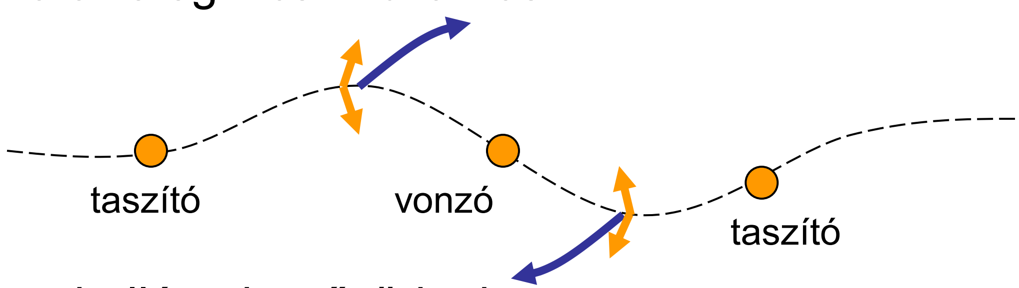
A határréteg instabilitása
1) Kelvin-Helmholtz instabilitás

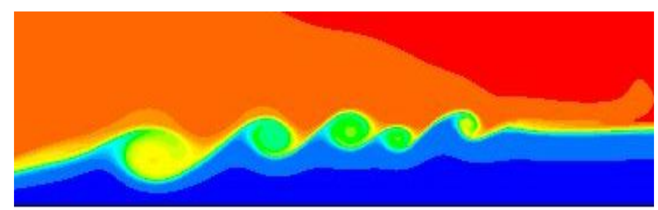
Bármely inflexiós ponttal rendelkező sebességprofil instabil.
Ez súrlódásmentes folyadékra is igazolható (inviscid instability)



Tekinthető egy örvényrétegnek, amit diszkrét örvényekkel modellezünk.

Ha a réteg kicsit hullámos:





...a hullámok erősödnek.

Pl. inflexiós pont alakul ki a határrétegben, az áramlás irányában növekvő nyomás miatt, vagy leválás következtében.

Az atmoszférikus határrétegben

vagy atmoszférikus határrétegben, ha a hideg levegő a meleg levegő alá folyik...

[Vincent van Gogh, Csillagos éj]

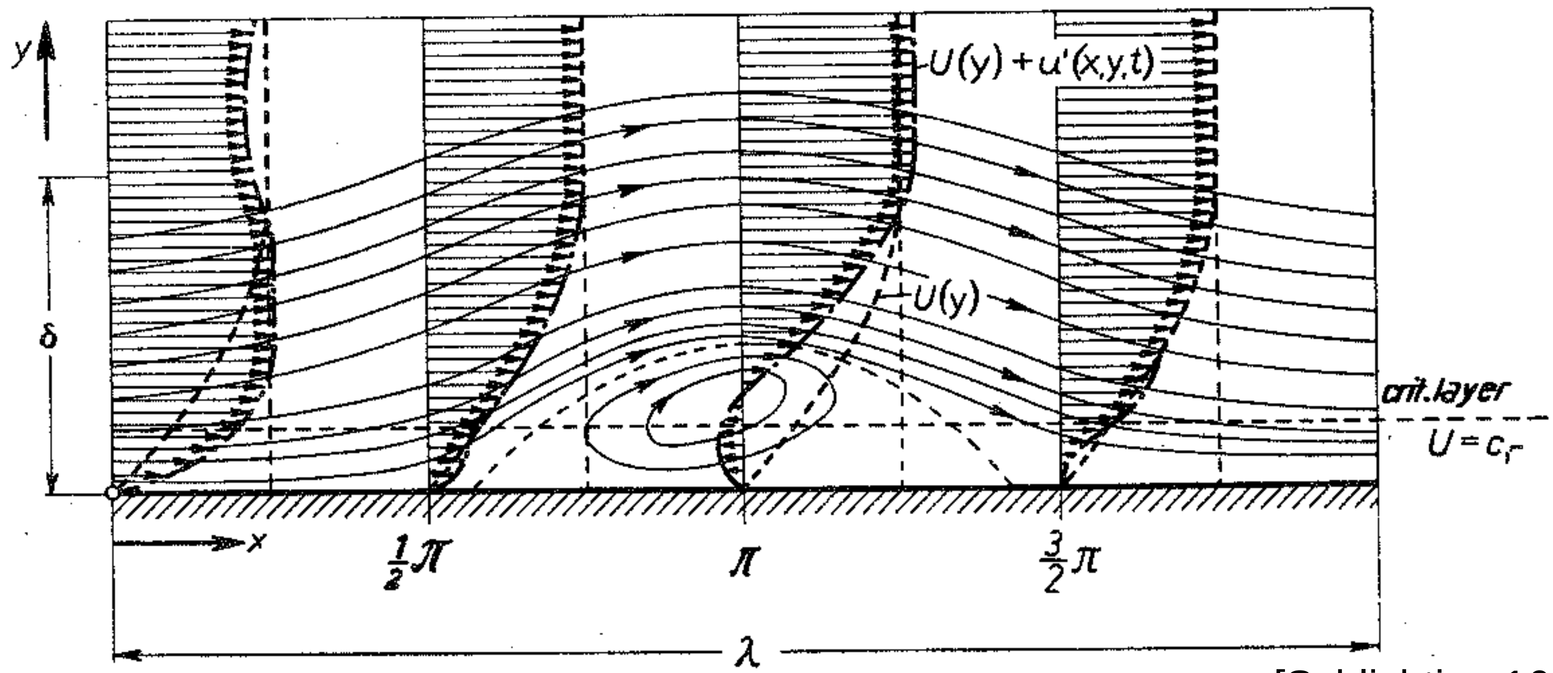
Ez azonban nem magyarázza, hogy miért válik turbulenssé egy konvex sebességprofi.

A határréteg instabilitása
2) Tollmien-Schlichting hullámok

A súrlódás következtében még konvex sebességprofil esetén is erősödő hullámok alakulnak ki a határrétegben. Ennek igazolására a határréteg alapáramláson hullám alakú zavarást feltételezzük, melynek áramfüggvénye:

$$\psi(x,y,t) = f(y)\, e^{i(\alpha x - \beta t)}$$

$\alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda}$: valós $\quad \beta$: komplex, képzetes része a nagyítási tényező



[Schlichting 16.8]

A határréteg instabilitása

Stabilitási határ

Dimenziótlan nyomásgradiens:

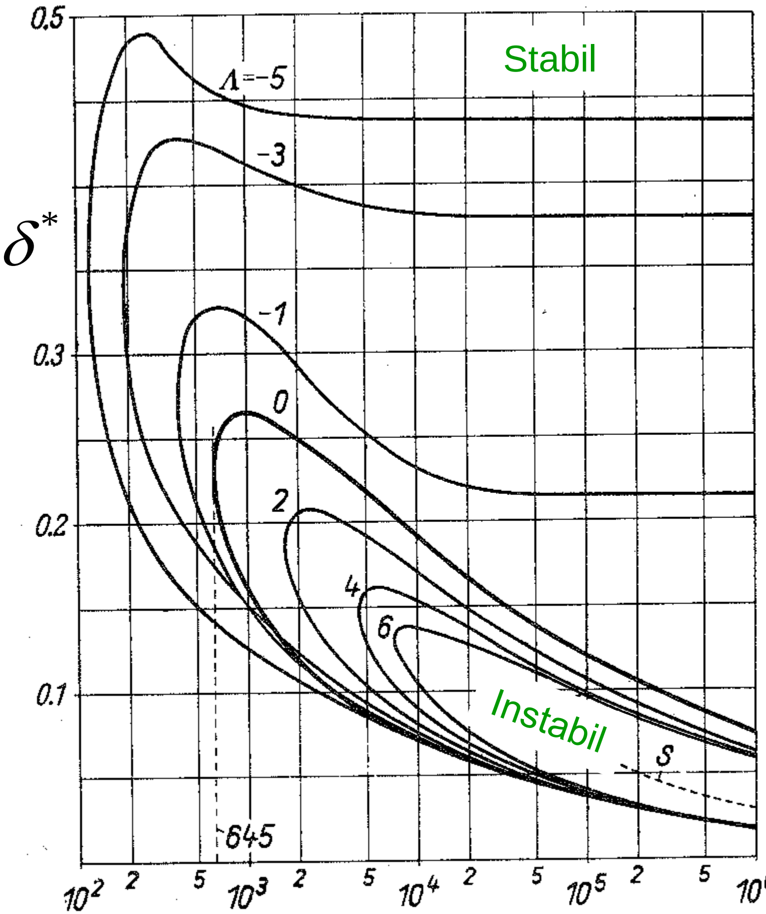
$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu}\frac{dU}{dx}$$

$\Lambda<0$: diffuzor

$\Lambda>0$: konfúzor

$$\Lambda \sim -\frac{d\left(\dfrac{p}{\rho U_\infty^2}\right)}{d\left(\dfrac{x}{\ell}\right)} = -\frac{dp'}{dx'}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\delta^*$$



$$\mathrm{Re}_{\delta^*} = \frac{U_\infty \delta^*}{\nu}$$

Ha a nyomás áramlás irányában nő, egyre szélesebb hullámszám tartományban és egyre jobban erősödnek a zavarások.

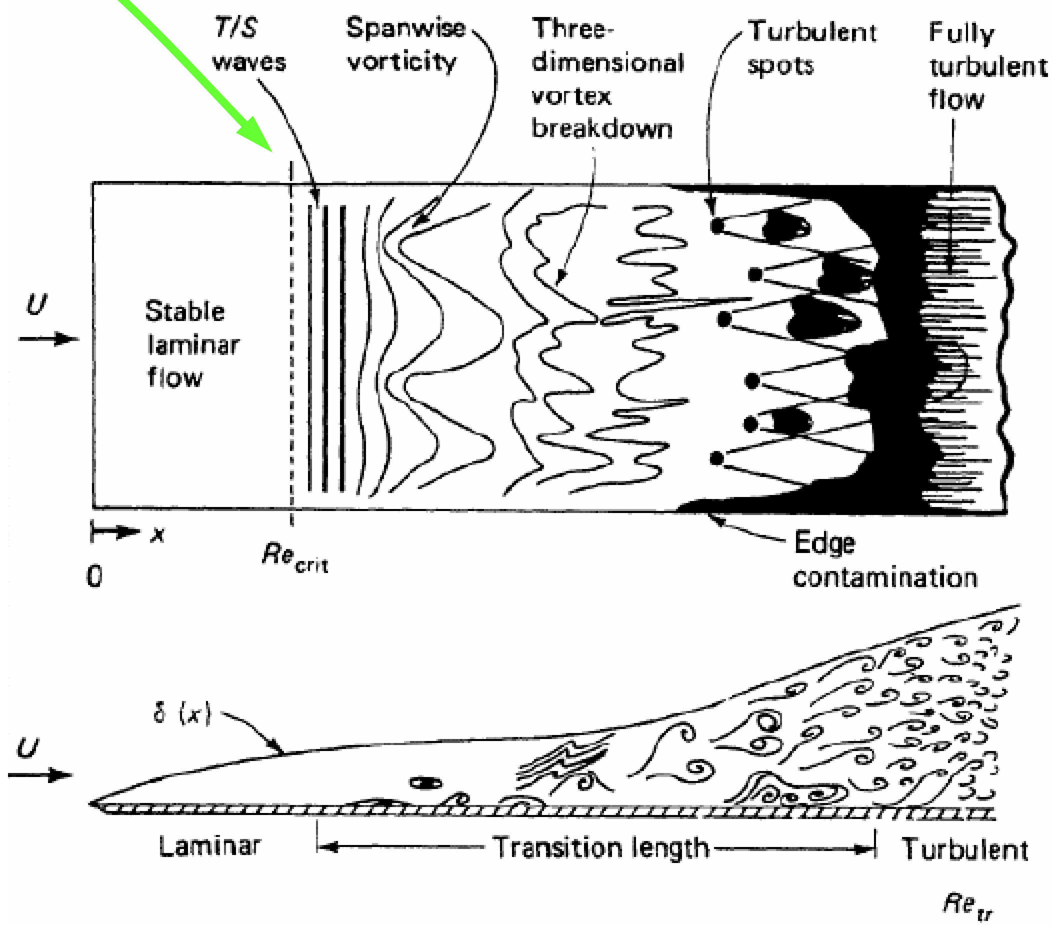
Tranzíció

A lamináris határréteg instabilitása:
A Tollmien-Schlichting hullámok amplitúdója exponenciálisan nő.

<u>Tranzíció okai:</u>

1. **Természetes tranzíció**
   Az egyenetlen felszín által keltett kezdeti zavarások; ezek erősödése dp/dx –től függően.
2. **Bypass tranzíció**
   A tanzíciót a főáramlás turbulenciája segíti.
3. **Leválás okozta tranzíció**
   A laminnáris határréteg leválása inflexiós pontot hoz létre az u(y) sebességprofilon, ami instabil.
4. **Keresztáramlás okozta tranzíció**
   Pl. hátranyilazott szárnyon vagy forgó test felületén.

Felülnézetben:



[White: Viscous Fluid Flow, 1991]

Reynolds-átlagolás

A sebességet és nyomást felbonthatjuk átlagértékre és ingadozásra:

$$\underline{v} = \overline{\underline{v}} + \underline{v}' \qquad\qquad p = \overline{p} + p'$$

Így az ingadozások átlagértéke 0.

Ezt a felbontást beírva a mozgásegyenletbe, képezzük annak átlagát. Ennek eredményeként minden lineáris tagban zérussá válik az ingadozások átlaga és az eredeti Navier-Stokes egyenlethez hasonló összefüggést kapunk az átlagsebességre:

$$\rho \frac{\partial \overline{\underline{v}}}{\partial t} + \rho \overline{\underline{v}} \cdot \nabla \overline{\underline{v}} = -\nabla \overline{p} + \rho\, \underline{g} + \mu \Delta \overline{\underline{v}} \underbrace{- \rho \overline{\underline{v}' \cdot \nabla \underline{v}'}}_{\textbf{Új tagok keletkeznek a konvektív tagból}}$$

Reynolds-feszültségek

Az átlagolt mozgásegyenletben fellépő új erő felírható egy tenzor divergenciájaként:

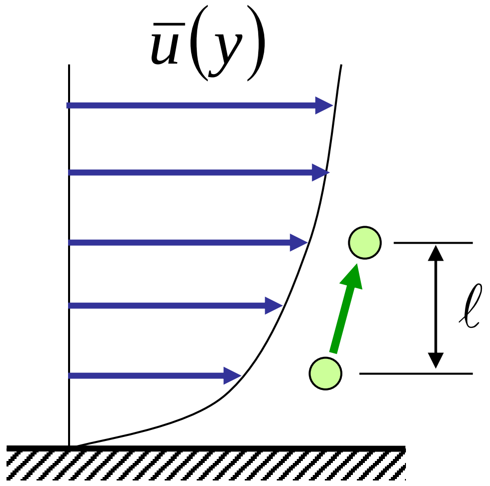
$$-\rho\overline{\underline{v}'\cdot\nabla\,\underline{v}'} = \nabla\cdot\tau_R$$

$$\tau_R = \begin{pmatrix} -\rho\overline{u'^2} & -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{u'w'} \\ -\rho\overline{v'u'} & -\rho\overline{v'^2} & -\rho\overline{v'w'} \\ -\rho\overline{w'u'} & -\rho\overline{w'v'} & -\rho\overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

τ_R a Reynolds-féle feszültség tenzor.

Az átlag-sebességmező kiszámítása érdekében módszert kell találnunk τ_R komponenseinek számítására, modellezni kell a turbulencia hatását.

A Prandtl-féle keveredési úthossz modell



1.) Átlagosan u’ nagyságú sebességingadozást okoz, ha egy folyadékrész l úthosszal elmozdul a falra merőlegesen:

$$u' = \ell \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

l keveredési úthossz a faltól távolodva nő, mert az örvények egyre nagyobbak lehetnek.

2.) A többi ingadozó sebességkomponens hasonló nagyságú:

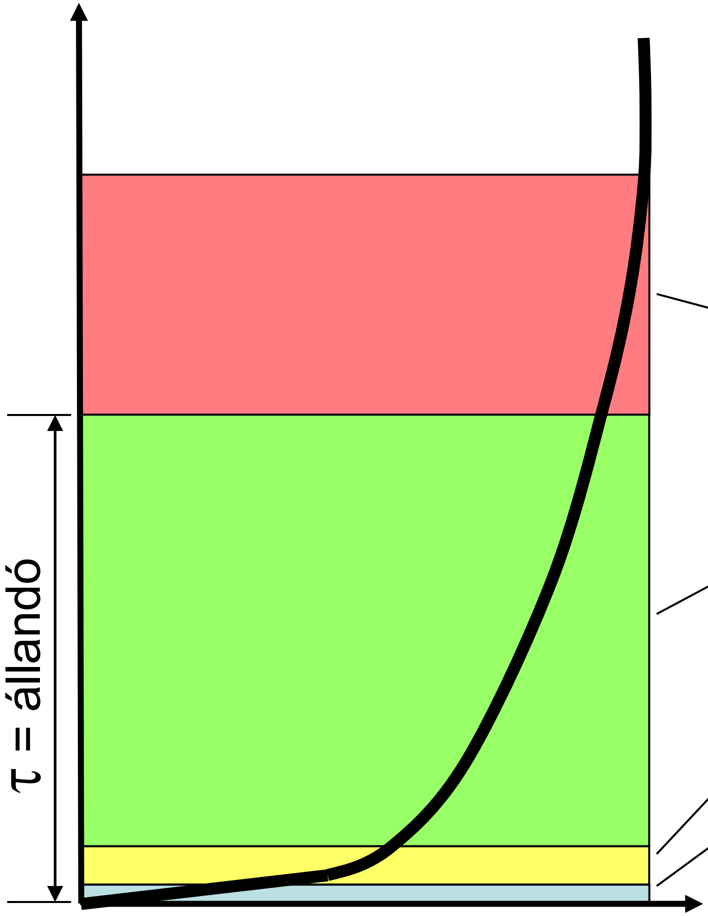
$$u' \cong v'$$

Ezekből a megfontolásokból kiindulva kiszámíthatjuk a Reynolds-feszültségeket:

$$\rho \overline{u'v'} = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

ν_t turbulens viszkozitás nem állandó értékű

A turbulens határréteg szerkezete



4. Külső réteg → fékeződés, τ nem állandó

3. Logaritmikus réteg → $\boxed{\bar{u} \propto ln(y) + C}$

2. Átmeneti réteg

1. Viszkózus alapréteg → $\boxed{\bar{u} \propto y}$

Sebesség profilok

Viszkózus alapréteg

$$\tau = \rho \nu \frac{d\bar{u}}{dy} = \tau_w$$

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

$$(u^*)^2 = \nu \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{u^* y}{\nu} = y^+$$

0<y₊<5 (..10)

Logaritmikus réteg

$$\tau = \rho \ell^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \cong \tau_w$$

$$\ell = \kappa y$$

Kármán konstans:

$$\kappa = 0.4$$

$$(u^*)^2 = \kappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

$$\frac{d\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{y}$$

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\underbrace{\frac{u^* y}{\nu_0}}_{y^+} \right) + C$$

Sima lapra:

$$C = 5.45$$

(C érdesség-függő)

(30..) 60<y₊<300 ?

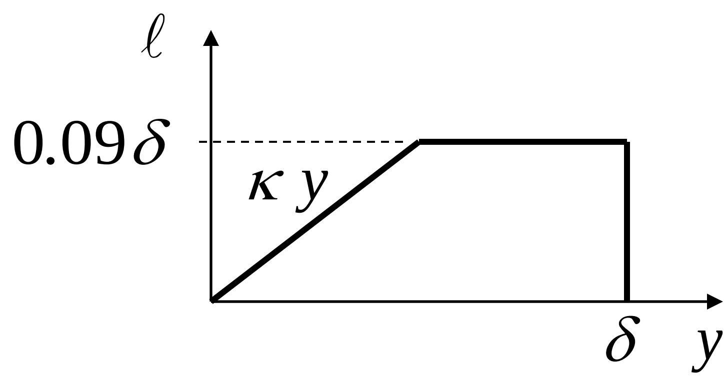
Numerikus megoldás

A numerikus modellben a turbulencia hatását figyelembe vehetjük úgy, hogy a folyadék viszkozitásához egyszerűen hozzáadjuk ν_t turbulens viszkozitást:

$$\nu_t = \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

l értékét a logaritmikus rétegen kívül korlátozni kell!

Escudier korreláció: $\ell = \min\left(\kappa y,\ 0.09\delta\right)$



Kapcsolt transzportfolyamatok

Ha u és v már ismertek, a határréteg megoldó programunkkal kiszámíthatjuk a hőmérséklet és koncentráció mezőket is:

$$u\boxed{\frac{\partial T}{\partial x}}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(a_t+a\right)\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$u\boxed{\frac{\partial c}{\partial x}}+v\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(D_t+D\right)\frac{\partial c}{\partial y}\right)$$

Hővezetési tényező.

Hőmérsékletvezetési tényező [m^2s^{-1}]: $a=\dfrac{\lambda}{\rho_0 c_p}$

fajhő állandó nyomáson

ν_t alapján számolhatjuk a többi transzport tényezőt:

$$a_t=\frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_t} \longleftarrow$$

Turb. **Prandtl-szám** adott empirikus állandó (kb. 1)

$$D_t=\frac{\nu_t}{\mathrm{Sc}_t} \longleftarrow$$

Turb. **Schmidt-szám** adott empirikus állandó, (kb. 1)