

Diszkretizáció véges térfogatok módszerével

Kristóf Gergely
2010.október

1D példa

Stacionárius áramlás egyenes csőben, állandó ρ sűrűség mellett:

Kontinuitás: $\oint_A \rho v \cdot dA = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \xrightarrow{\rho=\text{ál.}} u = \text{állandó}$

Energiaegyenlet: $\oint_A [c_p T + \frac{u^2}{2}] \rho v \cdot dA = \oint_A \lambda \nabla T \cdot dA$

Egy cellára felírva:
pl. pozitív irányú fluxus feltételezésével

Fluxusok és térfogati források

A transzportegyenlet egy ϕ skaláris mezőváltozóra stacionárius áramlás esetén:

$$\oint_A \rho \phi v \cdot dA = \oint_A T \nabla \phi \cdot dA + \int_V q_\phi dV$$

konvektív fluxus konduktív fluxus

Egy 2D háló nevezetes pontjai P pont környezetében (kompassz indexelés):

Felületi integrálók?
Térfogati integrálók?

Diszkretizálás

Felírjuk a fluxusok felületi integráljait:

$$A(\rho u T)_e - A(\rho u T)_w = A \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - A \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w$$

Új jelölések: $C_e = C_w = \rho u$ $D_e = D_w = \frac{\lambda}{c_p \Delta x}$

$$C_e T_e - C_w T_w = D_e (T_e - T_P) - D_w (T_P - T_w)$$

Ugyanez még egyszerűbben: $F_e - F_w = 0$, **Általánosítsuk ezt 3D-be és más hálókra!**

ahol: $F_e = C_e T_e - D_e (T_e - T_P)$ a teljes fluxus.

Integrálók numerikus közelítése

Fluxusok felületi integrálja az e felületen:

$$F_e = \int_A f \cdot dA = \langle f_{\perp} \rangle_e A_e \cong f_{e\perp} A_e$$

2-od rendű pontosságot biztosít ...

$F_e \cong A_e \frac{1}{2} (f_{ne} + f_{se})_{\perp}$ 2-od rendű (trapéz szabály)

$F_e \cong \frac{A_e}{6} (f_{ne} + 4f_e + f_{se})_{\perp}$ 4-ed rendű (Simpson-szabály)

A térfogati forrás integrálja a P cellára:

$$Q_P \cong \int_V q_\phi dV \cong q_{\phi,P} V_P$$

PI. FLUENT rendszerben a mennyiségeket a cellaközéppontokban tároljuk. Más pontokba f értékét interpolálni kell.

CDS séma

$$C_e T_e - C_w T_w = D_e (T_e - T_P) - D_w (T_P - T_w)$$

A face-hőmérsékleteket **lineárisan interpoláljuk**:

$$\left[\frac{C_e}{2} (T_P + T_e) - D_e (T_e - T_P) \right] - \left[\frac{C_w}{2} (T_P + T_w) - D_w (T_P - T_w) \right] = 0$$

Felírjuk a P cellára vonatkozó lineáris egyenletet:

$$A_P T_P = A_W T_W + A_E T_E$$

A_W	A_E	A_P
$D_w + C_w / 2$	$D_e - C_e / 2$	$A_w + A_e$
$D_e + D_w + C_e / 2 - C_w / 2 = A_e + A_w + C_e - C_w \stackrel{=0}{\text{kontinuitás}}$		

Súlyozott átlagnak is tekinthető. Ha az együtthatók pozitívak, akkor az átlagolás nem vezet be extrémumot P pontban.

Az algebrai egyenletrendszer megoldása

Pi. 4 cella esetén az alábbi:

TC()

TA()

TB()

TD()

$$\begin{bmatrix} A_{1,P} & A_{1,E} & 0 & 0 \\ A_{2,W} & A_{2,P} & A_{2,E} & 0 \\ 0 & A_{3,W} & A_{3,P} & A_{3,P} \\ 0 & 0 & A_{4,W} & A_{4,P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,P} \\ T_{2,P} \\ T_{3,P} \\ T_{4,P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{1,W}T_{be} \\ 0 \\ 0 \\ -A_{4,E}T_{ki} \end{bmatrix}$$

Megoldás: Gauss-eliminációval.
 n ismeretlenes, tridiagonál mátrixú egyenletrendszer esetében csak 2 n művelet (egy ciklus előre és egy vissza): Thomas-algoritmus.
 Sajnos 2D és 3D áramlások esetében nem tridiagonál mátrixú.

Transzportivitás

Fizikai szempontból:
 növekvő Pe esetén egyre T_E hatása egyre kevésbé érvényesül T_P-re.
 Tudja ezt a numerikus séma?

$$A_E = D_e - C_e / 2$$

$$C_e = \rho u \quad D_e = \frac{\lambda}{c_v \Delta x} \quad Pe = \frac{\rho u L}{\lambda / c_v}$$

$$A_E = \frac{D_e}{2} \left(2 - \frac{C_e}{D_e} \right) = \frac{D_e}{2} \left(2 - \frac{\rho u \Delta x}{\lambda / c_v} \right) = \frac{D_e}{2} (2 - Pe_{\Delta x})$$

Cella Peclet-szám: a konvektív és konduktív hőfluxusok hányadosa.
 Pe_{Δx}>2 esetén A_E nagysága újra nőni kezd.
 A stabilitási probléma is ilyen esetekben lép fel.

Az analitikus megoldás

$$\frac{T - T_{be}}{T_{ki} - T_{be}} = \frac{e^{\rho u x c_v / \lambda} - 1}{e^{\rho u L c_v / \lambda} - 1}$$

Pe (Peclet-szám)

UDS séma

W P E

u>=0 esetén: T_w = T_w, T_e = T_p

u<0 esetén: T_w = T_p, T_e = T_e

A _w	A _e	A _p
Max(C _w , 0) + D _w	Max(-C _e , 0) + D _e	A _w + A _e

További numerikus kísérletek...

A pontosság elsőrendűre csökken.

Példaprogram

1. Hasonló megoldást kapunk több, különböző paraméter változatra. $Pe = \frac{\rho u L}{\lambda / c_v}$
2. Hiba N²-el arányosan csökken. Másodrendű pontosság. $Re = \frac{\rho u L}{\mu}$
3. Néha oszcillál. Mikor kezd oszcillálni? $Pe_{\Delta x} = \frac{\rho u \Delta x}{\lambda / c_v} > 2$

Mesterséges „diffúzió” (1)

A numerikus hibának egy fontos fajtája. A pontatlan interpolációból adódott:

P E

$T_e = T_P + \frac{\Delta x}{2} \frac{dT}{dx} + o(\Delta x)$

ezt elhagyjuk

$$F_e = C_e T_P + C_d \left(\frac{\Delta x}{2} \frac{dT}{dx} \right) - D_e (T_E - T_P)$$

Olyan mintha megnöveltük volna a hővezetést!
 Írjuk be T deriváltjának diszkrét közelítését: $\frac{dT}{dx} = \frac{T_E - T_P}{\Delta x}$

$$D_e = \frac{\lambda}{c_v \Delta x} \rightarrow \lambda_{mest} = \frac{\rho u}{2} \rightarrow \lambda_{mest} = \frac{\rho u c_v \Delta x}{2}$$

HDS séma Spalding (1972)

Az a fontos, hogy az „A” együtthatók ne legyenek negatívak.
 Pe_w értéke alapján számoljuk a felületi fluxust:

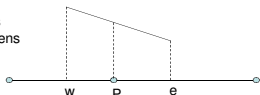
$Pe_{\Delta x} \leq -2 \quad F_e = C_e T_E$
 $-2 < Pe_{\Delta x} \leq 2 \quad F_e = C_e \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{Pe_w} \right) T_P + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{Pe_w} \right) T_E \right]$
 $2 < Pe_{\Delta x} \quad F_e = C_e T_P$ Legalább kis Pe_w esetén másodrendű.

$A_W T_W + A_E T_E = A_P T_P$

A_W	A_E	A_P
$Max \left(C_w, \left[D_w + \frac{C_w}{2} \right], 0 \right)$	$Max \left(-C_e, \left[D_e - \frac{C_e}{2} \right], 0 \right)$	$A_W + A_E$

SOU séma másodrendű szélfelületi súlyozás

Cellán belül lineáris interpoláció a gradiens segítségével:



Pl. a cellafali hőmérséklet: $T_e = T_P + \frac{dT}{dx} \Big|_P \frac{\Delta x}{2}$

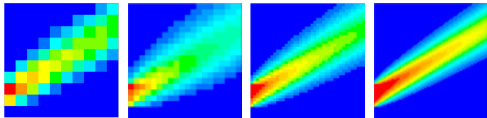
A gradiens meghatározása két lépésben:

1. lépés $\frac{dT}{dx} \Big|_P = \frac{T_e - T_w}{\Delta x} \quad T_e' = \frac{T_P + T_E}{2}, \quad T_w' = \frac{T_W + T_P}{2}$

2. lépés $\frac{dT}{dx} \Big|_P$ értékét úgy korlátozzuk, hogy ne vezethessen be extrémumokat. Gradiens limiterek: C Hirsch.

Oldalirányú mesterséges diffúzió 2D áramlás esetén

First Order Upwinding alkalmazásával:



Second Order Upwinding alkalmazásával:

