Turbulencia és modellezése I.

Balogh Miklós

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Áramlástan Tanszék

2017.

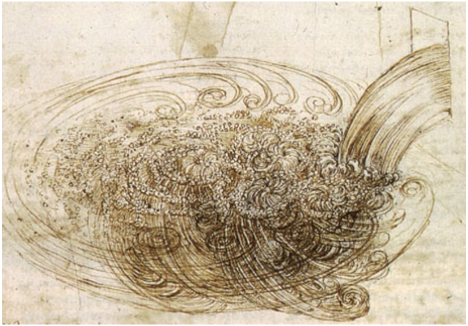
Kivonat

1. Előszó
2. Bevezetés
3. A turbulencia definíciója és tulajdonságai
4. Tulajdonságok
5. Jelölések
6. Statisztikai leírás
7. Reynolds egyenlet

Történelem - Leonardo da Vinci, 1500 körül

Leonardo da Vinci (fordítás: Piomelli in Lumley, J.L., 1997):

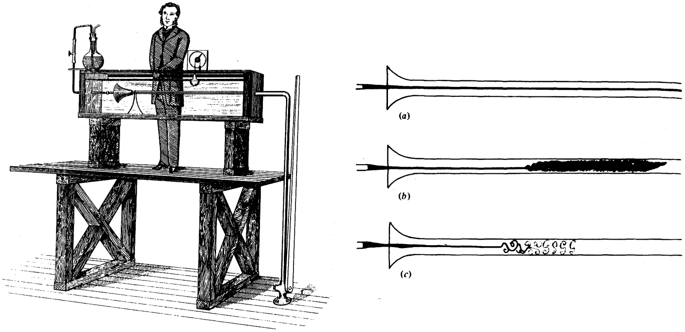
"Observe the motion of the surface of the water, which resembles that of hair, which has two motions, of which one is caused by the weight of the hair, the other by the direction of the curls; thus the water has eddying motions, one part of which is due to the principal current, the other to random and reverse motion"



Művészet - Vincent van Gogh : Csillagos éj, 1889

Tudomány - Reynolds kísérlet, 1883

Turbulencia I.
Balogh Miklós
Előszó
Bevezetés
Definíció
Jellemzés
Jelölések
Statisztika
Reynolds egyenlet



Tudomány - Idézetek

Horace Lamb, 1932

„I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic."

Peter Bradshaw, 1994

„Turbulence was probably invented by the Devil on the seventh day of Creation when the Good Lord wasn't looking."

Bevezetés

Miért foglalkozunk a turbulenciával egy numerikus áramlástan (CFD) kurzusban?

- Numerikus áramlástanban az egyenletek nagyrészt modell egyenletek
- A turbulencia jelensége a numerikus áramlástani alkalmazások $\approx 95\%$-ban jelen van
- A turbulenciát csak nagyon ritkán lehet szimulálni, általában modellezni kell
- A turbulencia alapjainak ismerete szükséges feltétele a modellek megfelelő használatának

Korlátok, egyszerűsítések

A következő hatásokat nem vesszük figyelembe a modellezés során:

- Sűrűség változás hatása:
  - Lökéshullám és a turbulencia kölcsönhatását nem tárgyaljuk
  - A felhajtóerő turbulenciára gyakorolt hatását nem tárgyaljuk
- Viszkozitás változás hatása
- Gravitációs térerősség hatása:
  - Nyílt-felszíní áramlások kivételével, a gravitációnak nincs hatása a turbulenciára (beolvasztható a nyomásba)

Definíció

Létezik precíz definíció?

- Eddig nem adták meg a turbulencia egzakt definícióját
- Stabilitás- és káoszelmélet szolgáltathatnak "majd" definíciót
  - De a leíró PDE-eket sokkal bonyolultabb kezelni mint egy KDE-t
- A klasszikus fizika utolsó megoldatlan problémája ("Lehetséges-e egy elméleti modellt adni amely leírja a turbulens áramlások statisztikáit?")
- A mérnökök mégis tudják kezelni a turbulenciát

Tulajdonságok

Definíciók helyett

- A turbulencia tulajdonságai összefoglalhatók
- Ezek a jellemzők felhasználhatók, hogy
  - Különbséget tegyünk a lamináris (akár időfüggő) és a turbulens áramlások között
  - Megértsük hogyan vizsgálható a turbulencia
  - Megértsük a turbulencia a mérnöki gyakorlatban betöltött szerepét

Magas Reynolds szám

Reynolds szám

- $Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{F_{\text{tehetlenségi}}}{F_{\text{viszkózus}}}$
- Magas Re szám $\longleftrightarrow$ viszkózus erők kicsik
- De a súrlódásmentes áramlás nem turbulens

A Reynolds szám szerepe

- A Reynolds szám az áramlás bifurkációs (stabilitási) paramétere
- $Re_{cr} \approx 2300$ csőben való áramlás esetén
- $Re > Re_{cr} \Rightarrow$ áramlás instabil, turbulens

Rendezetlen, kaotikus

- Dinamikus rendszerek terminológiája
- A kezdeti (KF) és a perem feltételekre (PF) való erős érzékenység
- Az áramlás "stabilitásáról" való állítás
- A PDE-knek (parciális differenciál egyenleteknek) végtelenszer több szabadsági foka van mint a KDE-knek (közönséges differenciál egyenleteknek)
  - Sokkal nehezebb kezelni őket
  - A turbulencia definíciójának jelöltje lehet
- Eszköz amellyel megmagyarázható a turbulencia és a "sima" lamináris időfüggés közötti különbség

Folytonos térbeli spektrum

Térbeli spektrum

- A térbeli spektrum analóg az időbelihez, Fourier transzformációval definiáljuk
- Praktikusan periodikus vagy végtelen nagy tartományt nehezebb találni
- Vizuálisan: Minden méretű (határok között) áramlási jelenség jelen van

Ellen példa

Az akusztikai hullámoknak csúcsos spektruma van al- és felharmonikusokkal.

3D jelenség

- Örvény megnyúlás (lásd: Hő és áramlástan vagy Áramlástan válogatott fejezetei) csak 3D áramlásban van jelen.
- 2D-ben nincs az örvényesség irányába mutató sebességkomponens, amely meg tudná nyújtani azt.
- Felelős a méretek csökkenésért
- Felelős az örvényesség növekedésért

Az átlagáramlás lehet 2D

- Az időfüggő áramlás mindenképp 3D
- A (Reynolds, idő) átlagolt áramkép lehet 2D
  - A keresztirányú fluktuációk zérusra átlagolódnak, de részt vesznek az áramlás és a falra merőleges irányú ingadozások alakításában

Időfüggő

A turbulens áramlások időfüggőek, az áramlás időfüggése nem jelenti azt, hogy turbulens (pl. Kármán - féle örvénysor)

Az időfüggő áramlások stabilitás szempontjából különbözőek lehetnek

- Egy csőben való időfüggő lamináris áramlásban (pl.: $500 < Re_b(t) < 1000$), a kis perturbációktól való függés sima és folytonos
- Egy csőben való időfüggő turbulens áramlásban (pl.: $5000 < Re_b(t) < 5500$), a kis perturbációktól való függés erős

Kontinuum jelenség

- Leírható a kontinuum Navier-Stokes (NS) egyenlettel
- Azaz molekuláris jelenségeknek nincs szerepe, ahogy ezt 100 évvel ezelőtt még gondolták egyesek

Következmények

1. Szimulálható a NS egyenlet megoldásaként (közvetlen numerikus szimuláció DNS)
2. A turbulenciának van egy legkisebb léptéke, ami általában jelentősen nagyobb mint a molekuláris léptékek
3. Van olyan eset is ahol a molekuláris hatások fontosak (pl. űrjárművek, visszatérő kapszulák)
4. A turbulenciát nem a molekuláris rezgések hajtják, hanem a turbulencia a NS egyenlet (stabilitás típusú) tulajdonsága

Disszipatív

Disszipatív

- Def: A mechanikus (mozgási) energia hővé alakulása (hőmérséklet növelés)
- Mindig jelen van a turbulens áramlásokban
- A turbulencia legkisebb léptékén történik, viszkózus erők fontosak a tehetetlenségi erőkhöz képest
- Hullám mozgáshoz képest ez egy jelentős különbség, mivel ott a disszipációnak nincs elsőrendű jelentősége

Örvényes

A turbulens áramlások mindig örvényesek

- Az örvény megnyúlás felelős a méretek csökkenéséért
- A disszipáció a legkisebb skálákon jelentkezik

Diffúzív

A diffúzív tulajdonság, mérnökileg fontos következmény

- Az átlagolt mennyiségeket tekintve a turbulencia általában növeli az átadásokat
  - Pl. az átadási tényezők növekednek (pl.: λ)
  - A Nusselt szám növekszik
- Az átlagolt mezőben a turbulencia általában növeli az átadási tényezőket
  - A turbulens viszkozitás (az impulzus átadás) növekszik
  - A turbulens hővezetési tényező növekszik
  - A turbulens diffúziós tényező növekszik

Történelme van, A TURBULENCIA nem létezik

A klasszikus fizikai utolsó megoldatlan problémája szerint a turbulenciának nem tudtak általános elméletet kifejleszteni mostanáig.

A turbulenciában semmilyen univerzalitást nem fedeztek fel

- A turbulens áramlások többfélék lehetnek, pl.:
  - Peremfeltétel függők (változó kényszerek)
  - A fel-vízi feltételektől függők (térbeli történelem)
  - Az időbeli történelemtől függ

Turbulencia jellemzésének összefoglalása

Turbulencia I.
Balogh Miklós
Előszó
Bevezetés
Definíció
Jellemzés
Jelölések
Statisztika
Reynolds egyenlet

- Magas Reynolds szám
- Rendezetlen, kaotikus
- Folytonos térbeli spektrum
- Térbeli jelenség időfüggő (4D) jelenség
- Kontínum jelenség (nem molekuláris)
- Örvényes
- Disszipatív, Diffúzív
- Történelme van

Jelölések

Irányok, sebességek

- x, u: Áramlási irány
- y, v: Falra merőleges, legnagyobb gradiens iránya
- z, w: Bi-normális a x, y irányokra merőleges keresztirány

Index-es írásmód

$x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$

$u = u_1$, $v = u_2$, $w = u_3$

Parciális deriváltak

$$\partial_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ és } \partial_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t}$$

Összegzési konvenció

Összegzést végzünk a dupla indexek esetén a három térbeli iránynak megfelelően.

Alap példa

Skalár szorzás:

$$a_i b_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \tag{1}$$

Rövidített írásmód

Előszó
Bevezetés
Definíció
Jellemzés
Jelölések
Statisztika
Reynolds egyenlet

Kontinuitás egyenlet vektoriális és rövidített alakja

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathrm{v}) = 0 \tag{2}$$

$$\partial_t \rho + \partial_i u_i = 0 \tag{3}$$

Mozgásegyenletek vektoros és rövidített alakja

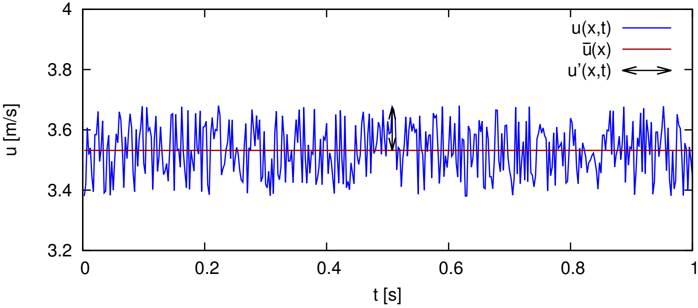
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left[\nabla^2 \boldsymbol{u} + \frac{1}{3} \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u} \right) \right] \tag{4}$$

$$\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = g_i - \frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \left[\partial_j \partial_j u_i + \frac{1}{3} \partial_i \left(\partial_j u_j \right) \right] \tag{5}$$

Statisztikai leírás

Az "egyszerű" megközelítés

Turbulens áramlást az idő átlagával és az ettől vett pillanatnyi eltéréssel, ingadozással lehet jellemezni



Turbulencia I.
Balogh Miklós
Előszó
Bevezetés
Definíció
Jellemzés
Jelölések
Statisztika
Reynolds egyenlet

A megközelítés problémái

- Milyen hosszú legyen az időátlagolás?
- Hogy különböztessük meg az időfüggést a turbulenciától?

Áramlási példák

- Turbulens csőáramlás ($Re >> 2300$), amelyet egy dugattyús szivattyú hajt meg (szinuszos időfüggés)
- Kármán örvénysor egy $Re = 10^5$ számú henger körüli áramlásban, ahol az örvények $St = 0,2$ frekvenciával válnak le

Nehéz különbséget tenni a turbulencia és az időfüggés között

Statisztikai átlag

Miért kezelünk egy determinisztikus folyamatot statisztikailag?

- Az NS egyenletek determinisztikusak (legalábbis azt hisszük, de nincs általánosan bizonyítva)
- Azaz a megoldást egyértelműen megadják a KF-ek és PF-ek
- A statisztikai leírás hasznos a kaotikus viselkedés miatt
  - A KF-ek és PF-ek re való nagyfokú érzékenység
  - A hasonló KF és PF halmazokbeli megoldásokat statisztikailag lehet kezelni

Statisztika

A megoldás mint egy statisztikai változó

$$\varphi = \varphi(x, y, z, t, i) \tag{6}$$

Az i index különböző de hasonló KF-ekhez és PF-ekhez tartozik

Sűrűség függvény

- Megmutatja φ értékének valószínűségét.

$$f(\varphi) \tag{7}$$

- Normálva van:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi) \quad d\varphi = 1 \tag{8}$$

Átlag érték

Várható érték

$$\overline{\varphi(x,y,z,t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y,z,t) \quad f\Big(\varphi(x,y,z,t)\Big) \quad d\varphi \tag{9}$$

Átlag

$$\overline{\varphi(x,y,z,t)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi(x,y,z,t,i) \tag{10}$$

Reynolds átlagolás

Reynolds felbontás

Mivel a statisztikai átlagot Reynolds átlagnak is hívjuk, ezért a felbontást szintén Reynolds felbontásnak hívjuk

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi' \tag{11}$$

Ingadozás

$$\varphi' \stackrel{\text{def}}{=} \varphi - \overline{\varphi} \tag{12}$$

Az átlagolás tulajdonságai

Linearitás

$$\overline{a\varphi + b\psi} = a\overline{\varphi} + b\overline{\psi} \tag{13}$$

A Reynolds átlag csak egyszer hat

$$\overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi} \tag{14}$$

Az ingadozások átlaga zérus

$$\overline{\varphi'} = 0 \tag{15}$$

Szórás

Szórás

- Az ingadozás elsőrendű jellemzése
- $$\sigma_\varphi = \sqrt{\overline{\varphi'^2}} \quad (16)$$
- RMS-nek is hívják: $\varphi_{rms} \overset{\text{def}}{=} \sigma_\varphi$

Kapcsolat az idő és a statisztikai átlag között

Ergodicitás

Ha az időbeli és statisztikai átlag azonos. Azaz ha függetlenek a kezdeti feltételektől.

Az átlag azonos, és a szórás?

$$\hat{\varphi}^{(T)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi \quad dt \tag{17}$$

$$\overline{\hat{\varphi}^{(T)}} = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{\varphi} \quad dt = \overline{\varphi} \tag{18}$$

Korreláció

Turbulencia I.

Balogh Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds egyenlet

Kovariancia

$$\frac{R_{\varphi\psi}(x, y, z, t, \delta x, \delta y, \delta z, \tau) =}{\varphi'(x, y, z, t)\psi'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \tau)}$$

Auto kovariancia

- Ha $\varphi = \psi$ akkor a kovariancia auto kovariancia
- Pl. Időbeli auto kovariancia:

$$R_{\varphi\varphi}(x, y, z, t, 0, 0, 0, \tau) \tag{19}$$

Korreláció

Korreláció

Dimenziótlan kovariancia

$$\rho_{\varphi\psi}(x, y, z, t, \delta x, \delta y, \delta z, \tau) = \frac{R_{\varphi\psi}}{\sigma_{\varphi(x,y,z,t)}\sigma_{\psi(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t+\tau)}} \tag{20}$$

Integrál időlépték

Integrál időlépték

$$T_{\varphi\psi}(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\varphi\psi}(x,y,z,t,0,0,0,\tau) \quad d\tau \tag{21}$$

Taylor-féle fagyott örvény hipotézis

Sokkal könnyebb az integrál időléptéket mérni (hődrót), mint a hosszléptéket (két hődrót különböző távolságokra)

Feltevések

- Az áramkép teljesen fagyott, az átlagsebességgel (U) jellemezhető
- Az áramlás-irányú hosszléptéket közelíteni lehet, a fagyott örvény időbeli haladását vizsgálva

A Taylor szerint közelített áramlás-irányú hosszlépték

$$L^x = TU \tag{22}$$

Reynolds egyenlet

Levezetjük a NS egyenlet Reynolds átlagát, amelyet Reynolds egyenletnek fogunk hívni

Reynolds Átlagolt kontinuitás

Turbulencia I.

Balogh Miklós

Előszó

Bevezetés

Definíció

Jellemzés

Jelölések

Statisztika

Reynolds egyenlet

Az eredeti egyenlet

$$\partial_i u_i = 0$$

Levezetés:

$$\begin{aligned} \overline{\partial_i u_i} &= \\ &= \partial_i \overline{u_i} \\ &= \partial_i \overline{\overline{u_i} + u_i'} \\ &= \partial_i \overline{\overline{u_i}} \\ 0 &= \partial_i \overline{u_i} \end{aligned} \tag{23}$$

Ugyanaz az egyenlet csak az átlagra!

Mozgásegyenlet

Levezetés

- Ugyanazokat a szabályokat alkalmazzuk a lineáris tagokra
- A nemlineáris tagok különböznek

A nem-lineáris tagok átlagolása

$$
\begin{aligned}
\overline{u_j \partial_j u_i} &= \\
&= \overline{\partial_j (u_j u_i)} \\
&= \partial_j \overline{u_j u_i} \\
&= \partial_j \overline{(\overline{u_j} + u_j')(\overline{u_i} + u_i')} \\
&= \partial_j \left(\overline{\overline{u_j}\,\overline{u_i} + \overline{u_i}\,u_j' + \overline{u_j}\,u_i' + u_j' u_i'} \right) \\
&= \partial_j \left(\overline{\overline{u_j}\,\overline{u_i} + u_j' u_i'} \right) \\
&= \partial_j \left(\overline{u_j}\,\overline{u_i} \right) + \partial_j \overline{u_j' u_i'} \\
&= \overline{u_j}\,\partial_j \overline{u_i} + \partial_j \overline{u_i' u_j'} \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Reynolds egyenletek

Kontinuitás egyenlet

$$\partial_i \overline{u_i} = 0$$

Mozgás egyenlet

$$\partial_t \overline{u_i} + \overline{u_j}\, \partial_j \overline{u_i} = -\frac{1}{\rho} \partial_i \overline{p} + \nu \partial_j \partial_j \overline{u_i} - \partial_j \overline{u_i' u_j'} \tag{25}$$

Reynolds feszültség tenzor

$$\overline{u_i' u_j'} \tag{26}$$

Vagy ρ-val vagy -1-el szorozva

Feszültségek

Minden feszültség ami gyorsulást okoz:

$$-\frac{1}{\rho}\overline{p}\,\delta_{ij} + \nu\partial_j\overline{u_i} - \overline{u_i'u_j'} \tag{27}$$

Kérdések

Köszönöm a figyelmet!