<u>Műszaki akusztika és zajcsökkentés</u> *(önálló felkészülést segítő tananyag)*

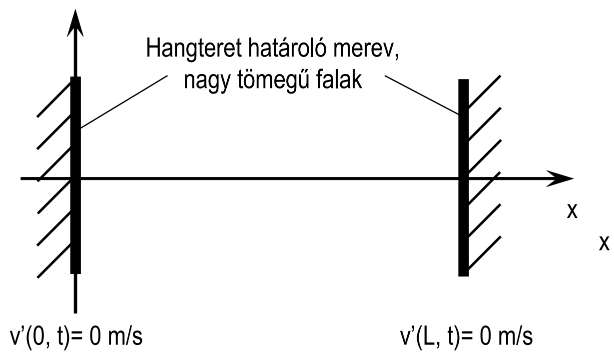
Összeállította: Dr. Koscsó Gábor c. egyetemi docens (BME Áramlástan Tanszék)

6. előadás (2020.10.14.)

Tartalom:

6.1. A homogén hullámegyenlet megoldása határolt térben (előadás vázlat)

A hullámegyenlet általános megoldása és harmonikus részmegoldása szabadtéri hangterjedést ír le, amely esetén az egyenes vonalú hangterjedést semmi sem akadályozza, visszaverődések nem alakulnak ki. Ez a feltétel számos akusztikai feladat (pl.: egy épület tető szintjén, szabad térben működő ventilátor által a szomszédos épület homlokzata előtt okozott zajterhelés meghatározása) megoldásánál jól alkalmazható. A hangtani feladatok másik része terjedést akadályozó falakkal határolt, zárt térre vonatkozik. A hangtér lehatárolása a hangforrás által létrehozott hangtér jellemzőit jelentősen megváltoztatják a szabadtéri esethez képest (a közvetlen besugárzás mellett a visszaverődéseket is figyelembe kell venni). Határolt térben a hullámakusztikai modell további más fontos jelenségekre hívja fel a figyelmünket, ezért a jelenséget érdemes részletesen megvizsgálni. A korábbiakhoz hasonlóan a hullámegyenlet határolt térre vonatkozó megoldását első lépésben vizsgáljuk egydimenziós esetre. Ehhez az x tengely mentén x= 0 m és x= L m távolságokban a tengelyre merőlegesen helyezzünk el két nagy tömegű, merev (erő hatására nem deformálható), a hang számára átjárhatatlan légtömör (nem porózus, nincsenek rajta lyukak) falat.



Hangtér lehatárolása hangterjedést akadályozó merev, nagy tömegű, légtömör falakkal

Az áramlástan tapadás törvénye (szilárd test felület és a vele szomszédos folyadékréteg között a relatív sebesség nulla) alapján, ha a határoló falak tartós nyugalomban vannak, a velük szomszédos folyadékréteg sebessége is nulla, peremfeltételek a részecske sebességre x= 0 m és x= L m helyeken,

$$v'(0, t) = 0 \text{ m/s} \qquad \text{és} \qquad v'(L, t) = 0 \text{ m/s}$$

A falak jelenléte a hang áramlási természetét, és az ehhez kapcsolódó matematikai modellt nem befolyásolja. A kontinuitás-tétel, mozgás-törvény, energia-mérleg és az ideális gáztörvény határolt térben is teljesülnek, így a matematikai modell megalkotásánál a hullám-egyenletből indulunk ki. A peremfeltételeket a részecskesebességre tudjuk könnyen megadni, ezért a határolt téri megoldás meghatározásához a részecskesebességre vonatkozó hullámegyenlet,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = 0$$

A hullámegyenlet általános megoldása,

$$v'(x,t) = f(at - x) + g(at + x)$$

Vizsgáljuk meg, hogy a peremfeltételek az általános megoldást hogyan változtatják meg. Az általános megoldásba x= 0 m-nél behelyettesítve,

$$v'(0,t) = 0 = f(at - 0) + g(at + 0)\ ,\ \text{átrendezve, } f(at) = -g(at)$$

A „f” függvény összetevő helyére írjuk be „- g” –t és helyettesítsünk be az x= L m-nél,

$$v'(L,t) = 0 = f(at - L) + g(at + L) = -g(at - L) + g(at + L)$$

A „g” függvényt (-L) értékkel eltolva és átrendezést követően megállapítható, hogy a „g” függvény 2L szerint periodikus,

$$g(at) = g(at + 2L)$$

Összegezve, a peremfeltételek az általános megoldást korlátozzák, tetszőleges jellegük helyett, az „f és „g” összetevők egymással megegyeznek, de ellentett előjelűek, és 2L szerint periodikusak. A periodikus „g” függvény Fourier sora,

$$g(at \pm x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n cos\frac{2\pi n}{2L}(at \pm x) + \beta_n sin\frac{2\pi n}{2L}(at \pm x)\right]$$

A Fourier sor egyes n értékekhez tartozó összetevők fizikai értelemben harmonikus hullám összetevők, így a hossz mentén adódó 2L szerinti periódus valójában a hullámhossz. Így a 2π/2L hányados a hullámszám, a koszinusz és szinusz függvények argumentumában a zárójeles tag együtthatója,

$$\frac{2\pi n}{2L} = \frac{2\pi n}{2\lambda} = k \cdot n = k_n\ ,\ \text{ ahol n= 1, 2, 3, … (természetes számok)}$$

A hullámegyenlet határolt térben érvényes megoldásának meghatározása érdekében helyettesítsük be a Fourier sor megfelelő előjelű tagjait, és alkalmazzuk az új jelölést,

$$v'(x,t) = f(at - x) + g(at + x) = -g(at - x) + g(at + x) =$$

$$= -\frac{\alpha_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n cosk_n(at - x) + \beta_n sink_n(at - x)] +$$

$$+\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n cosk_n(at + x) + \beta_n sink_n(at + x)]$$

Az ellentett előjele miatt az $\alpha_0/2$ egyensúlyi tag kiesik, amely fizikai jelentése az, hogy a határoló falak jelenléte miatt a hangtéri jellemzők egyensúlyi értéke (pl.: egyensúlyi nyomás) nem változik meg. A sor összegek összevonásával, és az együtthatók kiemelését követően,

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\big(cosk_n(at + x) - cosk_n(at - x)\big) + \beta_n\big(sink_n(at + x) - sink_n(at - x)\big)\right] =$$

A szög összeg és különbség szinuszának és koszinuszának felbontárára vonatkozó azonosságok felhasználásával,

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [-2\alpha_n sink_n at\ sink_n x + 2\beta_n cosk_n at\ sink_n x]$$

A $k_n a$ szorzat az n-ik harmonikus összetevő szögfrekvenciája, ω_n, továbbá a helytől függő szinuszos tag kiemelésével, a homogén akusztikai hullámegyenlet egy dimenziós határolt téri megoldása,

$$v'(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [sink_n x(-2\alpha_n sin\omega_n t + 2\beta_n cos\omega_n t)]$$

Ahol: $k_n = \frac{2\pi}{2L} n$, illetve $\omega_n = \frac{2\pi}{2L} na$)

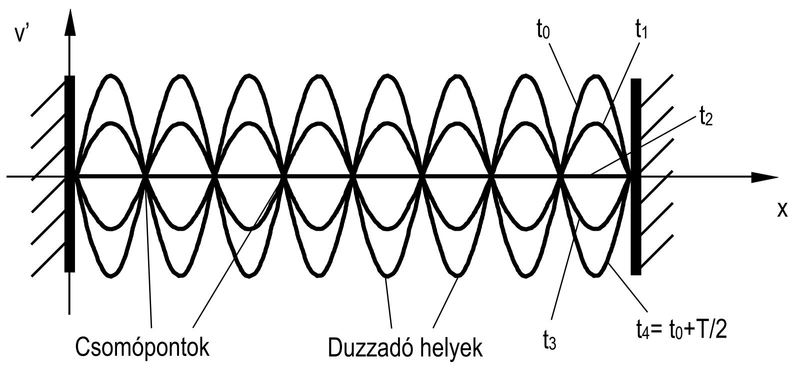
Megjegyzések:

- A hullámegyenlet általános és határolt téri megoldása között a legfontosabb különbség, hogy a hullámot leíró függvény argumentumában a hely- és időváltozó az általános megoldásban együtt, a határolt téri megoldásban külön-külön szétválasztva (szeparálva) szerepelnek. A (t±x/a) argumentum a hullám haladó jellegére utal. A határolt téri megoldásban az x és t változók szeparálódása a hullám haladó jellegének megszűnését jelzi. A két fal jelenléte a hang szabad terjedését ténylegesen, fizikailag korlátozza, és ezt a tényt a matematika a sajátos nyelvén (a változók szeparálódásával) fejezi ki.

- Vegyük a határolt téri megoldás sor összeg n-ik elemét, legyen $-2\alpha_n = \hat{v}$, illetve β_n legyen 0,

$$v'_n(x,t) = \hat{v}\ sin\omega_n t\ sink_n x$$

A részecskesebesség a két fal között minden pontban, ahol $k_n x$= 0, π, 2π, 3π, … (természetesen az x= 0m és x= Lm helyen is) az időtől függetlenül 0m/s, ezek a hullám csomópontjai. π/2 radiánnal eltolva, ahol $k_n x$= π/2, 3π/2, 5π/2, …a hullám amplitúdója maximális értéket vesz fel, ezek a hullám duzzadó helyei. További lényeges különbség, hogy két csomópont közötti szakaszon minden folyadékrész azonos fázisban mozog, vagyis egyszerre mozognak jobbra és balra, csak az amplitúdójuk tér el egymástól. A haladó hullám a két fal jelenlétében folytonos, rugalmas közeg lengéssé alakult, amelyet csomópontok és duzzadóhelyek periodikus rendszere jellemez.



A részecskesebesség megoszlás két fal között kialakuló hullámtérben különböző pillanatokban

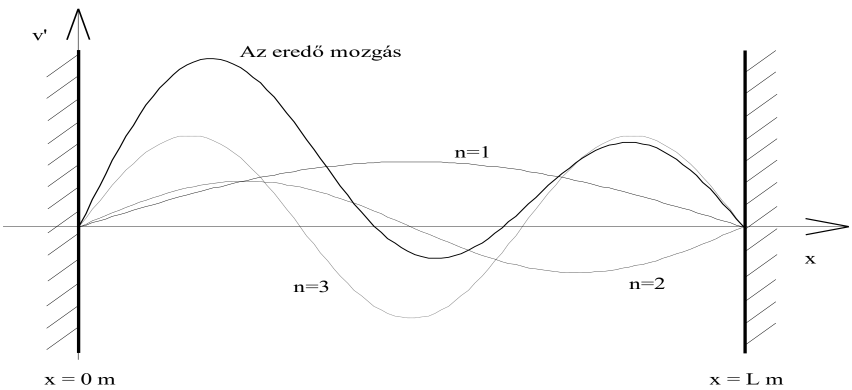
- Az α_n és β_n (Fourier) együtthatók a v', részecskesebesség kezdő pillanatban (t= 0 sec) érvényes eloszlásából, a kezdetiérték feltételből határozhatók meg.

- Matematikai szaknyelven a ω_1, ω_2, ω_3, …, illetve a k_1, k_2, k_3, …, konstansok, a feladat sajátértékei. Az ω_1 a rendszer alapharmonikusa (vagy alap szögfrekvenciája), a többi ω_2, ω_3, …, étékek a felharmonikusok. Az ω és k értékek egy konkrét akusztikai elrendezés (falak közötti távolság, hangsebesség, …) esetére vonatkoznak. A sajátértékeket visszahelyettesítve a határolt téri megoldás függvényekbe a saját függvényeket kapjuk,

$$v'_1(x,t) = sink_1x(-2\alpha_1 sin\omega_1 t + 2\beta_1 cos\omega_1 t)$$
$$v'_2(x,t) = sink_2x(-2\alpha_2 sin\omega_2 t + 2\beta_2 cos\omega_2 t)$$
$$v'_3(x,t) = \cdots$$

amelyek a hullámegyenletet és a csatlakozó peremfeltételeket egyaránt kielégítik.

- Nagyon fontos belátni, hogy a sajátfüggvények csak a rendszerben lévő lehetőségek. Az, hogy a hangtérben mi szólal meg, alapvetően a gerjesztéstől függ. Ha valaki vastag falakkal határolt térben elkezd beszélni, a hangtérben alapvetően a megszólaló személy hangja lesz hallható. A sajátfüggvényeket a hangtérben úgy lehet előcsalogatni, hogy egy impulzusos (rövid ideig tartó) hangkeltéssel (pl.: taps) kezdő zavarási állapotot (kezdeti feltételt) hozunk létre, amely hatására a hangtérben a részecskék mozgásba kezdenek. A kezdő lökés után magára hagyott rendszer ezt követően sajátrezgéseket végez, mint a megfeszített, majd elengedett tömeg-rugó egyszabadságfokú rezgőrendszer, vagy a megpendített gitárhúr. (Amíg az egyszabadságfokú rezgőrendszer egy sajátfrekvencián végez rezgést, a két fal közé zárt légoszlop és a két pont között kifeszített húr, mint a folytonos közeg egy véges darabja, tetszőleges számú, diszkrét frekvencián képes rezegni.) A saját függvény szoros összefüggésben az előző magyarázattal innen is származtatható, hiszen a kezdeti, impulzusos gerjesztés után magára hagyott rendszer saját mozgását (-rezgését) írja le. Alkalmas kezdeti hangkeltés hatására létrejött egyszerű hullámtér első három összetevő (alap frekvencia és a szomszédos két felharmonikus), illetve az eredő mozgása részecskesebesség megoszlását mutatja a hely függvényében egy adott pillanatban a következő ábra.



Egyszerű hangtérben az alap és az első két felharmonikus, illetve az eredő hullám részecskesebesség megoszlása a hely függvényében rögzített pillanatban

- Határolt térben a hullámegyenlet megoldását a peremfeltételek miatt a részecskesebesség változóra határoztuk meg. Méréstechnikai szempontból a hangnyomás ismeret is fontos lehet. A hangnyomás függvény meghatározása érdekében legyen a sebességteret leíró függvény a határolt téri megoldás n=1 (alap frekvencia) esetre, az 1-es indexeket az egyszerűsítés érdekében elhagyjuk,

$$v'(x,t) = \hat{v}\, sin\omega t\; sinkx$$

A hangnyomás és a részecskesebesség között a lineáris akusztikai mozgásegyenlet teremt kapcsolatot. A mozgásegyenletből a hangnyomást kifejezve, v'-t behelyettesítve a hangnyomás függvény,

$$p'(x,t) = -\rho_0 \int \frac{\partial v'}{\partial t} dx = -\rho_0 \int \frac{\partial}{\partial t}(\hat{v}\, sin\omega t\; sinkx) dx = \rho_0 \frac{\omega}{k} \hat{v}\, cos\omega t\; coskx =$$

$$= \rho_0 a \hat{v} \, sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) sin\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) = \hat{p} \, sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) sin\left(kx + \frac{\pi}{2}\right)$$

A hangnyomás függvényben a hangnyomás amplitúdó az algebrai kapcsolatrendszerben már levezetett mozgásegyenlettel megegyező (a magasabb szintű, hely- és időfüggő matematikai modell az algebrai leírást magában foglalja). A hely- és az időfüggés függvény alakja, illetve x és t együtthatói (ω és k) a részecskesebességre és a hangnyomásra ugyanazok (a hangtéri változók szimultán változnak). A részecskesebesség és a hangnyomás között a hely- és időfüggésben egyaránt π/2 radián fázisszög (negyed periódus) különbség adódik. (Szabadon terjedő síkhullámoknál a részecskesebesség és a hangnyomás között nincs fáziskülönbség.)

- A két fal közé zárt véges hosszú légoszlop rezgését, a falak közé helyezett, két végén a falakhoz mereven hozzáerősített spirálrugó tengelyirányú rezgésével szemléltethetjük. A spirálrugót középső részénél tengely irányban balra elhúzva, majd hirtelen elengedve az alapharmonikus mozgás négy jellegzetes szakaszra bontható. Az első szakaszban a rugó közepe maximális sebességgel jobbra halad, ekkor a rugó feszültségmentes. Negyed periódussal később a jobb oldalra tömörödött rugó mozgása egy pillanatra megáll, jobb szélen maximális nyomó, bal szélen maximális húzóerő keletkezik. Újabb negyeddel később a rugó ismét feszültségmentes és a közepe maximális sebességgel balra tart. Az utolsó negyedben a bal oldalra tömörödött rugó mozgása egy pillanatra ismét megáll, miközben jobb szélen maximális húzó, bal szélen pedig nyomóerő lép fel. Hasonló mozgást végez a két oldalán falakkal határolt légoszlop is (a hangtérben az erő a hangnyomásnak, a sebesség a részecske sebesség változónak felel meg).

- Felmerül a kérdés, mi a jelentősége a mérnöki gyakorlatban a hullámegyenlet határolt téri megoldásának, a saját függvényeknek és sajátrezgéseknek. Folyadékot számos alkalommal csővezetékben szállítunk. A csővezetékben tartózkodó folyadék úgy tekinthető, mint a rugalmas, folytonos közeg véges hosszú darabja, amely adott frekvenciákon sajátrezgések végzésére képes. Ha a csőben a mozgást térfogatkiszorítás elvű áramlástechnikai gép hozza létre, a periodikus működés miatt a szállított közeget adott frekvencián gerjesztés éri. Ha a gerjesztési frekvencia megegyezik a sajátfrekvenciák valamelyikével, rezonancia alakul ki. A rezonancia során kialakuló nagy amplitúdójú mozgás jelentős mechanikai terhelést okoz a rendszerben, amely rendellenes működést, végső esetben meghibásodást okozhat. A csővezetékek dinamikus viselkedésének ismerete alapvető gépész szaktudás, a hullámegyenlet határolt téri megoldása ehhez nyújt bevezető ismereteket. A rezonancia az akusztikában fontos jelenség, ezért a későbbiekben még részletesen foglalkozunk vele.

- A véges méretű, folytonos rugalmas közegben az alaktól és a gerjesztés jellegétől függően 2 és 3 dimenziós lengések is kialakulhatnak. A teremakusztika egy alapvető problémája a helyiségekben kialakuló teremhangok (léghang sajátfrekvenciák) miatti kiemelések és gyengítések hatásának csökkentése. De többdimenziós kontinuum rezgések nem csak folyadékokban, hanem szilárd rugalmas anyagban, például egy harang fém köpenyében, vagy egy fogaskerékben is kialakulhatnak.

6.2. Hangterek modellezése, akusztikai hasonlóság (előadás vázlat)

Modellt akkor készítünk, ha a feladat vizsgálata eredeti méretben fizikailag nem lehetséges, veszélyes, drága, vagy túl sokáig tart. Modell lehet matematikai vagy fizikai. Fizikai modellezés során az eredeti jelenség tulajdonságait kísérleti módszerekkel, méréssel határozzuk meg. Kísérleti modellezésre akkor kerül sor, ha nincs a fizikai feladatra vonatkozó matematikai modell, vagy létezik matematikai leírás, de a megoldás pontossága nem egyértelmű és azt ellenőrizni kell („validálás”). A fizikai modell az eredeti jelenség egyszerűsített változata, amely a vizsgált tulajdonságok szempontjából hasonlít az eredetire, de egyéb tekintetben eltérhet attól. A kísérleti modellek homológ vagy analóg jellegűek lehetnek. Homológ modellezésnél a kísérleti vizsgálatnál alkalmazott fizikai jelenség megegyezik az eredeti jelenséggel (pl.: autó karosszéria körül kialakuló áramlás vizsgálata szélcsatornában kisebb méretarányú modellen), ez a „kis-minta” kísérlet. Vannak esetek, amikor az eredeti fizikai jelenség nehezen mérhető, ilyen például víz szivárgás porózus talajban. Ebben az esetben a jelenséget egy olyan, az eredetitől eltérő fizikai jelenséggel vizsgáljuk, amelynél a fizikai változókat leíró függvények alakja megegyezik az eredeti jelenségével, és a mérés könnyen megvalósítható. Az ilyen vizsgálatot analóg modellezésnek nevezzük. Analóg modellezés például a víz szivárgás vizsgálata homokban elektromos potenciál kád modellel. Akusztikában modellezést általában hangterek vizsgálatánál, „kis-minta" kísérlettel végzünk.

A modell vizsgálatok során alapvető fontosságú, hogy az eredeti jelenség és a modell jelenség a kiszemelt változó szempontjából hasonlóan viselkedjen. Például ha egy hangversenyterem eredeti kivitelében a hangnyomás eloszlás a tér egy bizonyos részén nem kívánt növekedést mutat, akkor az a kicsinyített modellben is kimutatható legyen. A hasonlóságot egymástól függetlenül matematikai és fizikai alapú feltétellel határozhatjuk meg. A matematikai alapú feltétel esetén két jelenség akkor hasonló, ha jelenségekre vonatkozó, dimenziótlan változókkal felírt differenciálegyenletek és a kapcsolódó dimenziótlan perem és kezdetiérték feltételek egymással egyenlők. „Kis-minta" kísérletek esetén a hasonlósághoz elegendő a dimenziótlan differenciálegyenlet együtthatók, illetve a dimenziótlan perem és kezdetiérték feltételek egyezése. A fizikai alapú feltétel esetén a jelenséget meghatározó fizikai változók hányadosa az eredeti és a modell jelenségek esetében egyaránt állandó. Meghatározó változók hányadosa például súrlódásos folyadék mozgás esetén a tehetetlenségi erő és súrlódó erő hányadosa (Reynold-szám), vagy összenyomható közegáramlás esetén a rendezett és rendezetlen mozgási energiák hányadosa (Mach-szám).

Hangterek modellezésénél a hasonlósági feltétel matematikai alapú meghatározásánál a homogén akusztika hullámegyenletből indulunk ki,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0$$

Az egyenletben szereplő változók dimenziótlanítása érdekében az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg a hangtérre jellemző geometriai méret (L_0) négyzetével, és osszuk el hangtérre jellemző vonatkoztatási hangnyomással (p'_0). Majd az egyenlet bal oldalán az első tag számlálóját és nevezőjét bővítsük a hangtér jellemző idő (T_0) négyzetével. A dimenziótlan hullámegyenlet,

$$\frac{L_0^2}{a^2 T_0^2}\frac{\partial^2\left(\frac{p'}{p'_0}\right)}{\partial\left(\frac{t^2}{T_0^2}\right)} - \frac{\partial^2\left(\frac{p'}{p'_0}\right)}{\partial\left(\frac{x^2}{L_0^2}\right)} = 0$$

A homológ modellezés miatt az eredeti és a modell hangterek dimenziótlan leíró egyenletei alakra megegyeznek. Így a hangterek hasonlóságának feltétele a bal oldalon az első tagban az együtthatók egyenlősége. Ha a hányados állandó, szükségszerűen a négyzetgyöke is állandó, továbbá szűkítsük vizsgálatainkat a harmonikus hullámokra, ahol a hangtérre jellemző idő a periódusidő (T_0). A periódusidő és a hangsebesség szorzata a hullámhossz (λ), amely alapján két hangtér hasonlóságának a feltétele, a Helmholtz-szám (He), a hangtérre jellemző geometriai méret és hullámhossz hányadosa,

$$He = \frac{L_0}{aT_0} = \frac{L_0}{\lambda_0}$$

Megjegyzés:

- Akusztikában általában a költségek megtakarítása érdekében a modellek általában kisebbek, mint az eredeti méret. A hasonlósági feltétel a jellemző méret és a hullámhossz között egyenes arányos kapcsolat, illetve a jellemző méret és a frekvencia között fordított arányos kapcsolat, tehát minél kisebb a méret, annal nagyobb a frekvencia. A gépészeti zajvédelemben, fokozott mértékben a teremakusztikában az eredeti méretnél vizsgált frekvenciatartomány felső értéke elérheti a több kHz, akár 10kHz értéket is. Reálisan 1:10, de gyakran még ennél is kisebb modellek esetén a mikrofonok frekvencia sávszélességének elvárt felső értéke jóval a hallható tartomány fölé, több tíz kHz-es tartományba kerül. Ez a mikrofonok érzékenységének csökkenését, és a műszer beszerzési költségek növekedését okozza.

- További probléma a modell vizsgálatánál alkalmazott nagy mérőhang frekvencia miatt megnövekednek a hangterjedés során fellépő disszipatív veszteségek. A hangok disszipáció miatti csillapodása levegőben

1…2kHz frekvenciáig párszor 10m távolságban gyakorlatilag elhanyagolható (a beeső hangteljesítmény néhány százaléka), 10kHz feletti tartományban a disszipáció miatti csillapodás igen jelentőssé válik és nem hanyagolható el. A hangterjedés során fellépő disszipatív veszteségek a modell vizsgálat pontatlanságát okozhatják.

6.3. Állóhullám (előadás vázlat)

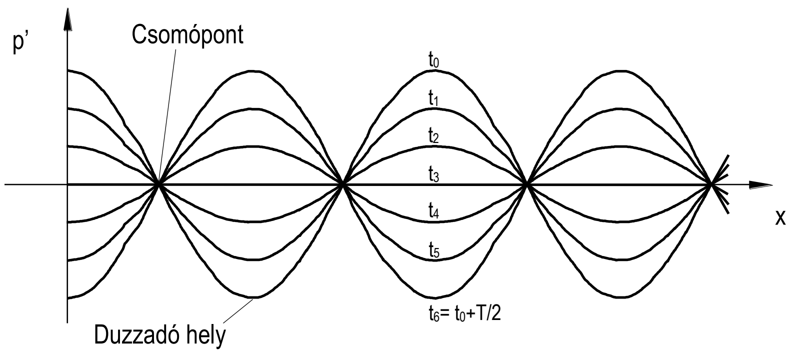
Két azonos frekvenciájú, amplitúdójú, azonos terjedési sebességgel, de ellentett irányban haladó harmonikus hullám összetételéből állóhullám keletkezik. Az állóhullám hullámfüggvényét a lineáris szuperpozíció elv felhasználásával vezetjük le. A két hangtér eredő hangnyomását az összetevő hullám hangnyomások egyszerű algebrai összegével határozhatjuk meg. A levezetés végeredményét a szög összeg és különbség koszinuszának felbontására vonatkozó trigonometrikus azonosságok felhasználásával kaphatjuk meg,

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 \ , \quad \omega_1 = \omega_2 \ , \quad |a_1| = |a_2| \ , \quad a_1 \longrightarrow_{+x} \text{ és } a_2 \ {}_{-x}\!\longleftarrow$$

$$p'_{áh}(x,t) = p'_1(x,t) + p'_2(x,t) = \hat{p}_1 \, cos(\omega_1 t - k_1 x) + \hat{p}_2 \, cos(\omega_2 t + k_2 x) =$$

$$= \hat{p} \left(cos(\omega t - kx) + \ cos(\omega t + kx) \right) = 2\hat{p} \, cos(\omega t) \, cos(kx)$$

Az állóhullám hullámfüggvény grafikonját fél periódusidő tartományon belül, különböző időpontokban a következő ábra mutatja.



Állóhullám hangnyomás változása a hossz mentén különböző időpontokban

Megjegyzések:

- A hullámegyenlet határolt téri megoldásához hasonlóan az állóhullám esetében is a megoldás függvény argumentumában a hely- és idő változók szeparálódnak, azaz a hullám haladó jellege megszűnik.

- Az állóhullámban az egymással szemben haladó összetevők kölcsönhatásaként bizonyos helyeken időben állandósult kioltás, illetve ezek között erősítés lépfel. A kioltási helyeken csomópontok, az erősítési helyeken duzzadó helyek alakulnak ki.

- Lényeges különbség a hullámegyenlet határolt téri megoldása és az állóhullám között, hogy a határolt téri megoldásnál az amplitúdó a kezdeti feltételtől függ és gyakorlatilag tetszőleges értékű lehet, addig az állóhullámnál legfeljebb a két összetevő amplitúdó összege lehet.

- Az állóhullám egy egydimenziós hang interferencia jelenség.

- Az állóhullám kialakulása grafikusan is megérthető. Két azonos szinusz függvény grafikonját fektessük pontosan egymásra, majd húzzuk el egymás felett a két görbét azonos nagyságú, de ellentett irányítottságú sebességgel. Álló rendszerből nézve, ahol eredeti állapotban nulla értékek voltak, az elmozdulást követően ugyanakkora, de ellentett előjelű értékek keletkeznek, az összegük folyamatosan nulla. Negyed periódussal, 90 fokkal eltolva a maximum és minimum közötti periodikus ingadást eredményez az előjeles szakaszok összegzése.

- A gyakorlatban állóhullám falra merőlegesen beeső tisztahang visszaverődésekor alakulhat ki. Egy vakolt tégla, vagy betonfal a frekvenciától függően a beeső hangenergia akár 95%-t is visszaveri. Így az amplitúdók közelítőleg megegyeznek, a visszaverődés a frekvenciát és a hangsebesség abszolút értékét nem befolyásolja, így beeső és visszavert hullám állóhullámot hoz létre.

- Az állóhullámok figyelemmel kísérése méréstechnikai szempontból is fontos, mert hangvisszaverő falakkal részlegesen határolt szabadtéri részen a hangforrás és a hangvisszaverő felület között a hangnyomás hely függés nem várt módosulását okozhatják.

6.4. Lebegés (előadás vázlat)

Két azonos amplitúdójú és terjedési sebességű, egy irányban haladó, kis mértékben eltérő frekvenciájú harmonikus hullám összetétele esetén lebegés alakul ki. A lebegés hullámfüggvényének meghatározásánál szintén a lineáris szuperpozíció elvéből indulunk ki,

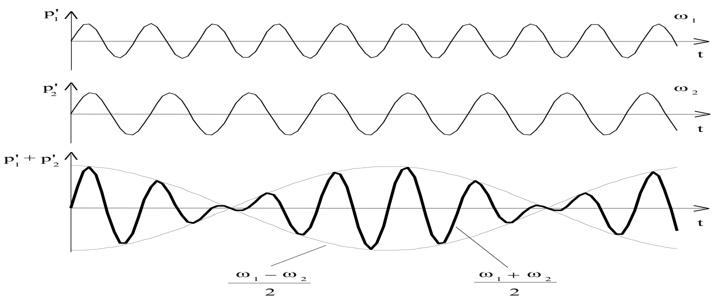
$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 \;, \quad a_1 = a_2 \;, \quad \omega_1 > \omega_2 \;, \text{de} \quad \omega_2 \gg \omega_1 - \omega_2$$

$$p'_l(x,t) = p'_1(x,t) + p'_2(x,t) = \hat{p}_1\, cos(\omega_1 t - k_1 x) + \hat{p}_2\, cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$= \hat{p}\,\big(cos(\omega_1 t - k_1 x) + cos(\omega_2 t - k_2 x)\big) =$$

$$= 2\hat{p}\, cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right)$$

A szögek koszinuszának összegére vonatkozó azonosság alkalmazásával nyert végeredmény, a lebegés hullámfüggvény nem egyszerűbb, mint a kiinduló kifejezés, de a változók megfelelő csoportosításával áttekinthetővé teszi a lebegés fizika szempontból lényeges tulajdonságait. A következő ábra az x= 0m helyen rögzített pontban az összetevő hanghullám függvények grafikus összegzésével mutatja be a lebegés hullámfüggvény időfüggés ábráját.



Az összetevő hullámok és a lebegés hangnyomás változása az idő függvényében az x= 0m helyen

Megjegyzések:

- A hullámok összetétele miatt a hullámfüggvény átalakult (koszinuszok összege helyett azok szorzata lett), de a szorzatban mindkét koszinusz argumentumában a hely- és időváltozók egyaránt megtalálhatók, így az összetevőkhöz hasonlóan a lebegés haladó hullám marad.

- Az ábrán bemutatott grafikus összegzés mutatja a lebegés keletkezésének fizikai magyarázatát. A kezdetben azonos fázisból induló, egymást erősítő hullámok, a szögsebességek kicsi eltérése miatt, az alap periódushoz képest hosszabb idő elteltével ellentett fázisra változnak és kioltják egymást, majd ismétlődik tovább.

- Lebegés esetén egy adott pontban érzékelhető hang egy tiszta hang, frekvenciája az összetevő frekvenciák matematikai átlaga, és ez az alap hanghullám a két összetevő frekvencia különbségének felével modulálódik. A moduláció során a hallásunk a felerősödéseket és elhalkulásokat érzékeli (nem tesz különbséget a burkológörbe pozitív és negatív fele között), így a szubjektív érzékelhető modulációs frekvencia épp a számolt érték kétszerese.

- Lebegés a gyakorlatban például akkor jön létre, ha két azonos típusú, egymás mellett működő periodikus zajkeltő (pl.: szellőztető ventilátor) üzemi pontja eltér egymástól. A megegyező típus miatt a berendezések zajkeltése alapvetően egyforma, de az eltérő üzemi pont (pl.: az egyik ventilátor fojtása nagyobb) kicsit eltérő fordulatszámot (a keltett zaj általában arányos a fordulatszámmal) és így kicsit eltérő kisugárzott hang frekvenciát okoz, amely lebegést hoz létre.

- A tiszta hangok szubjektív megítélése rossz. A periódikus modulálás a hangérzeti jellemzőket tovább rontja, ezért a lebegés zajvédelmi szempontból elkerülendő. Megfordítva, és kihasználva a figyelemfelkeltő, zavaró jellegét, a periodikusan modulált hang jól használható vészhelyzeti figyelmeztető hangként (pl.: megkülönböztetett járművek hangjele, légoltalmi sziréna).

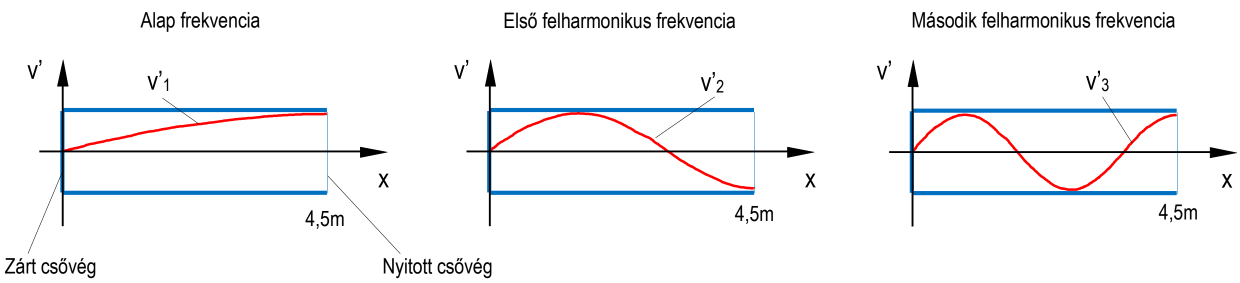
6.5. Gyakorló feladatok

Gy.1. Számítsa ki egy 4,5m hosszúságú, egyik végén zárt, másik végén nyitott csőben a levegő oszlop első és harmadik akusztikai sajátfrekvenciáját! A levegő hőmérséklet (t) 25°C.

Megoldás:

$$a = \sqrt{\kappa R T_0} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot (273 + 25)} \approx 346\ m/s$$

A kialakuló jelenség a korábban ismertetett határolt térben érvényes hullámegyenlet megoldás alapján, a peremfeltételeket kielégítő harmonikus kontinuum rezgés. A harmonikus rezgéseket szinusz és koszinusz függvények írják le. A peremfeltételek fizikai szemlélet alapján a részecskesebességre könnyen megadhatók. Zárt csővégeken a részecskesebesség nulla. Ha a cső zárt vége nyugalomban van, az áramlástan tapadás törvénye értelmében a vele éppen szomszédos folyadékréteg is áll. A nyitott csővégeken a mozgást semmi sem akadályozza, a részecskesebesség maximális. Adott csőszakaszhoz a sajátrezgés hullámhossza akkor megfelelő, ha zárt csővégre a szinusz nulla értéke, nyitott csővégre a szinusz maximuma (előjeltől függetlenül) esik. Esetünkben a megoldás grafikus származtatásához belátható, a sajátrezgések részecskesebesség megoszlása a cső zárt végén nulla, a nyitott végén rendre a szinusz függvény legnagyobb abszolút értékű helyével esik egybe. A legkisebb frekvenciához tartozik a legnagyobb hullámhossz, illetve legkevesebb szinusz periódus, növekvő frekvenciához csökken a hullámhossz, növekszik a csőszakaszra eső szinusz periódusok száma, ld. ábra.



Egyik végén zárt, másik végén nyitott csőben kialakuló kontinuum rezgések részecskesebesség megoszlása a hossz mentén az első három saját frekvencia esetén

Első sajátfrekvencia: A peremfeltételek alapján a részecskesebesség megoszlás grafikonja a minimumtól a szomszédos maximumig tartó negyed szinusz periódus, a hullámhossz: $\lambda_1 = 4 \cdot l/1 = 4 \cdot 4{,}5 = 18\ m$

$$f_1 = a/\lambda_1 \approx 346/18 \approx 19{,}2\ Hz$$

Harmadik sajátfrekvencia: A peremfeltételek alapján a részecskesebesség ábra a minimumtól a második maximumig tartó egy és egynegyed szinusz periódus, a hullámhossz: : $\lambda_3 = 4 \cdot l/5 = 4 \cdot 4{,}5/5 = 3{,}6\ m$, $f_3 = a/\lambda_3 \approx 346/3{,}6 \approx 96{,}1\ Hz$

Gy.2. Mit jelent két hangtér hasonlósága, és adja meg a hangterek hasonlóságának feltételét!

Gy.3. Mi az állóhullám, vezesse le a hangnyomás hely- és idő függését megadó kifejezést tetszőleges állóhullám esetére!

Gy.4. Mi a lebegés, vezesse le a hangnyomás hely- és idő függését megadó kifejezést tetszőleges lebegés esetére!

Gy.5. Színházterem 1:10 méretarányban elkészített modelljén végzett vizsgálattal szándékozunk megállapítani az eredeti teremben a 250, 500 és 1000 Hz frekvenciájú tisztahang gerjesztés hatására kialakuló hangterek tulajdonságait. Határozza meg a modell vizsgálatokhoz szükséges mérőhang frekvenciákat, ha az eredeti és a modell hangtérben a vivőközeg egyaránt technikai normál állapotú (p_0= 1bar, t_0= 20˚C) levegő!

Megoldás:

He_m=He_0 , l_m/λ_m= l_0/λ_0 , $l_m f_m/a_m$= $l_0 f_0/a_0$, de (a_m= a_0) ezért, f_m= $f_0\ l_0/l_m$, amelyek rendre 2,5k, 5k és 10kHz

Gy.5. Egy 0,001 sec periódusidejű, 0,5 Pa hangnyomás amplitúdójú harmonikus hullám tökéletesen visszaverődik az útjában merőlegesen elhelyezett sík falról. Nevezze meg a kialakuló hangtani jelenséget, határozza meg két szomszédos csomópont közti távolságot és a duzzadó helyen a legnagyobb hangnyomás értékét, ha a hangsebesség 340m/s!

Megoldás: A kialakuló akusztikai jelenség az állóhullám.

$\lambda = a \cdot T = 340 \cdot 0{,}001 = 0{,}34\ m$

Két szomszédos duzzadó hely között a távolság: $\Delta l_{áh} = \lambda/2 = 0{,}34/2 = 0{,}17\ m$

A duzzadó helyen mérhető hangnyomás amplitúdó: $\hat{p}_{áh} = 2\hat{p} = 1\ \ Pa$
