

## Műszaki akusztika és zajcsökkentés (önálló felkészülést segítő tananyag)

Összeállította: Dr. Koscsó Gábor c. egyetemi docens (BME Áramlástan Tanszék)

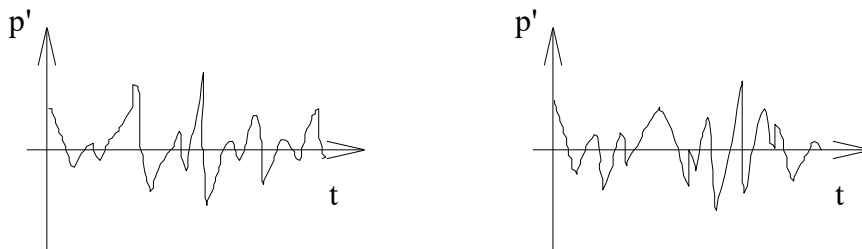
8. előadás (2020.10.28.)

### Tartalom:

- 8.1. Harmonikus analízis, hangspektrum
- 8.2. Energetikai viszonyok az akusztikában, elméleti háttér
- 8.3. Gyakorló feladatok

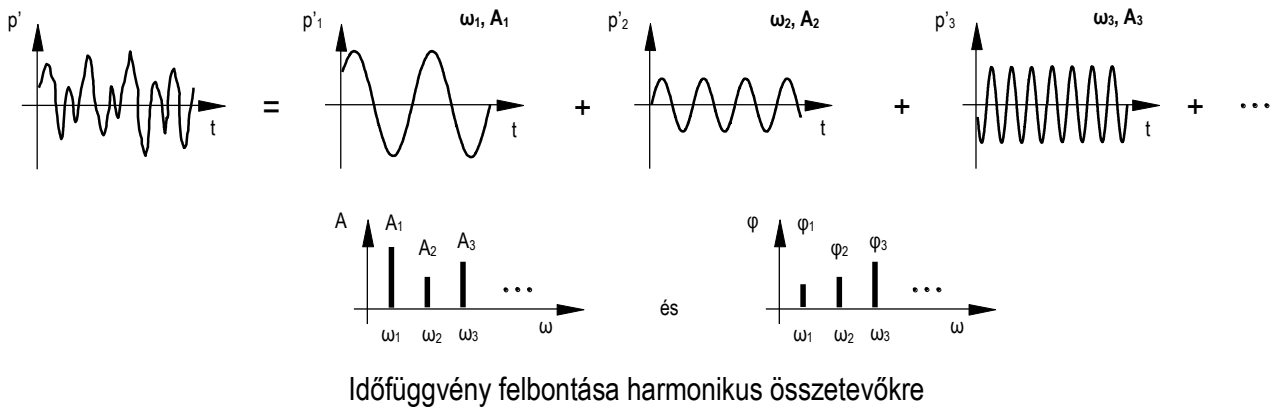
### 8.1. Harmonikus analízis, hangspektrum

Első lépésben arra a kérdésre keressünk választ, mire alkalmazható a harmonikus analízis, miért fontos a hangszínek az akusztikában és a mérnöki gyakorlatban. A hangtér tetszőleges pontjában a hangtéri változók időfüggvényei ( $p'(t)$ ,  $v'(t)$ , ...) a pontra vonatkozó összes alapvető információt tartalmazzák. Ennek ellenére számos esetben lényegesen eltérő hangterek között, közvetlenül az időfüggvényeik összehasonlításával alig lehet különbséget tenni. Az ábrán a bal oldali diagram, egy lánctalpas földmunkagéptől 30m távol kialakuló hangtér hangnyomás-idő függvényét mutatja, a jobb oldalon egy kamarazenekar előadásán rögzített adatok láthatóak. Szemrevételezés alapján a két hangnyomás-idő függvény között érdemi különbség nincs, ezzel szemben a hangforrások, a hang jellege, szubjektív hatása között lényeges különbség van. Kis túlzással úgy is fogalmazhatunk, hogy a hang, mint fizikai jelenség kivételével az erős dízelmotor és a csikorgó lánctalpak kellemetlen zaja, illetve a hangszeres zene által keltett hangzás között semmilyen közös kapcsolódási pont nincs. Az időfüggvény annak ellenére, hogy a hangtérrel igen sok információt tartalmaz, közvetlen elemzésre, hangjelenségek vizsgálatára, tervezésére a műszaki gyakorlat szempontjából csak korlátozott jelentőséggel bír.

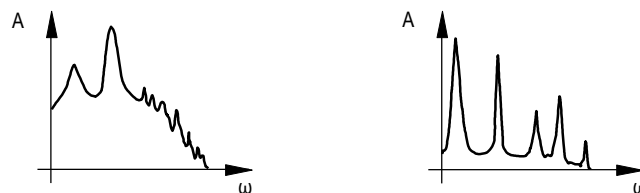


Hangnyomás az idő függvényében egy földmunkagéptől 30m távol (bal oldal) és egy kamarazenekar előadásán (jobb oldal)

Emiatt szükség van egy olyan módszerre, amely az időfüggvényben rejtőző információt egyértelmű, világos formában tárja fel. Kiindulva abból a tényből, hogy egy adott pontban a hangtéri változók idő függvényét egyensúlyi érték körüli (periodikus, vagy nem periodikus) ingadozás jellemezi, ígéretesnek tűnik egy olyan könnyen kezelhető, egyszerű matematikai alap függvényt keresni, amellyel középérték körüli ingadozás írható le. Sejthető, hogy a hang keletkezése, terjedése, elhalása és érzékelése során a hosszú ciklusok másként viselkednek, mint a rövidek. Így az eredeti függvényt különböző ciklusú periodikus elemekre bontva várhatóan hozzáférhetőek lesznek a korábban hiányolt információk és elemzési lehetőségek. A matematikában számos periodikus függvény ismert, de az esetünkben kitűzött cél figyelembe vételével a túlnyomó többséggel valami gond van (nem analitikus, szakadása van, ...). A szinusz és koszinusz függvények viszont minden előző feltételnek megfelelnek. Tovább növeli a szinusz és koszinusz függvények alkalmasságát a harmonikus rezgések és -hullámok akusztikában betöltött fontos szerepe (pl.: véges méretű rugalmas testek szabad rezgései harmonikus rezgés, illetve ezek összetétele, továbbá ezek a harmonikus rezgések harmonikus hullámokat sugároznak le. Összefoglalva, a probléma megoldása érdekében ésszerűnek tűnik az eredeti hangtéri változó idő függvényét, különböző periódus idejű, amplitúdójú és kezdőfázisú harmonikus összetevőkre bontani. A következő ábra egy ilyen felbontás grafikonjait mutatja jelképesen.



A szinusz és koszinusz periodikus függvények, így a teljes időfüggvényeik sok felesleges információt tartalmaznak. Egy tetszőleges időfüggvény előállításához éppen elegendő a szükséges számú harmonikus összetevő amplitúdó és kezdőfázis adatait ismerni a frekvencia függvényében. (Ez az adat tömörítés a harmonikus komponensekre bontás további előnye, amelynek az akusztikai jelek vizsgálatánál kevesebb, az adatátvitelben viszont nagy jelentősége van.) A frekvencia amplitúdó és frekvencia kezdőfázis függvényeket, az adott idő függvény amplitúdó- és fázis spektrumának (szinképének) nevezzük. Az amplitúdó- és fázis spektrum együtt azonosítanak egy idő függvényt. Gépészeti zajvédelemmel kapcsolatos problémák megoldásához sokszor elegendő az amplitúdó spektrum ismerete. A fázis spektrum használata gépészeti hibadiagnosztikában szokásos.



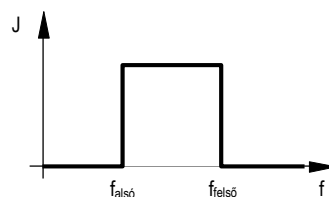
Hangnyomás amplitúdó spektrum a szögfrekvencia függvényében egy földmunkagéptől 30m távol (bal oldalon) és egy kamarazenekar előadásán (jobb oldalon)

Visszatérve a kiinduló felvetéshez, az előző ábra a földmunkagéptől 30m távol és a kamarazenekar előadásán felvett időfüggvények amplitúdó spektrumát mutatja. Az ábra bal oldalán, a földmunkagép szélessávú spektruma zörej hangra utal. A kis frekvencián kimutatott nagy összetevőket a dízelmotor hozza létre (fordulatszám arányos rezgések és kipufogás). A spektrumból kiolvasható pontos frekvencia és amplitúdó érték fontos alapadat például a motor füstgáz kipufogó hangtompító megtervezéséhez. Nagyobb frekvencián a rendszertelen kiugró összetevők sorozata a csikorgó lánctalp kellemetlen nagy frekvenciás zaja. Az ábra jobb oldali részén vonalas spektrum látható, a szélessávú összetevő amplitúdója kicsi. Ez valamilyen mechanikus vagy áramlási eredetű rezonáns hangkeltésre utal. Ha számszerűen nézzük meg az alaphang frekvenciáját és a mellé társuló felharmonikus összetevők és az alaphang frekvencia viszonyát, hamar kiderül, hogy zenei hangról van szó. A felharmonikus összetevők számából és megoszlásából kis szerencsével még a megszólaló hangszerek fajtája (fafúvós vagy rézfúvós, ...) is kikövetkeztethető. Az említett két eset és az elemzési szempontok csak kiragadott példák, a harmonikus analízis használata a hangtani, mérnöki gyakorlatban számos további előnnyel jár. Jelezzük, hogy a hang keltése, terjedése szilárd közeg határán, csillapodása és érzékelése (szubjektív és műszeres) egyaránt frekvencia függő.

Tetszőleges, periodikus időfüggvény harmonikus összetevőit a függvény Fourier-sorával kaphatjuk meg. Tetszőleges, nem periodikus (aperiodikus) időfüggvény harmonikus összetevőinek meghatározásához a Fourier-integrált használjuk. A periodikus függvények spektruma általános esetben végtelen számú diszkrét összetevőt tartalmaz, a nem periodikus függvények spektruma folytonos megoszlású.

## Harmonikus analízis a mérés technikai gyakorlatban

A mai mérés technikai gyakorlatban az időfüggvény spektrumát rendszerint digitális jelfeldolgozással határozzuk meg. A digitális jelfeldolgozás első lépése a digitális mintavételezés, amely során egy speciális elektronikai egység (adatgyűjtő) a vizsgált időben változó elektromos jelet (pl.: egy mikrofon kimenő jelét) időben egymás után nagyon gyorsan és sokszor megméri, és a mért értékeket eltárolja. A digitális mintasorozatból a digitális spektrum az előző részben bemutatott elméleti háttér alapján kidolgozott numerikus DFT (Discrete Fourier Transform), illetve ennek gyorsított változatával FFT (Fast Fourier Transform) algoritmussal határozható meg. A harmonikus analízis numerikus alapműveleteiből (DFT, FFT) kiindulva számos további jelfeldolgozási módszer ismert. Az STFT (Short Time Fourier Transform), order tracking, és envelop detection módszereket a gépészmérnöki gyakorlat vonatkozásában a gépészeti zaj- és rezgésvédelem, illetve hiba diagnosztika területeken alkalmazzuk. Alkalmazási előnyei miatt a harmonikus analízist már jóval a numerikus jelfeldolgozás térhódítása előtt is széles körben használták az akusztikában. Ebben az időszakban az időfüggvény harmonikus komponensekre bontását sáváteresztő szűrősorozattal végezték el. A sáváteresztő szűrő az adott jelet (J) csak meghatározott alsó és felső határfrekvencia között engedi át, ezen a tartományon kívül nem. Az alábbi ábra egy elméleti szűrő karakterisztikát mutat a frekvencia függvényében.



Elméleti sáváteresztő szűrő frekvencia karakterisztika

Ha ilyen szűrőkből a teljes vizsgált frekvencia tartományon úgy építünk sorozatot, hogy két szomszédos szűrő közül az alsó szűrő felső határértéke megegyezik a felette elhelyezkedő szűrő alsó határértékével, akkor a szűrőket egyenként beiktatva az időfüggvény sávos spektrumát kapjuk. A spektrum felbontását az alkalmazott szűrő sáv szélessége határozza meg. A sáváteresztő szűrőket a felső és alsó frekvencia határértékek viszonya alapján állandó abszolút és állandó relatív sáv szélességű kategóriákba soroljuk.

Állandó abszolút sáv szélesség esetén:  $f_{felső} - f_{alsó} = \text{áll.}$

Állandó relatív sáv szélesség esetén:  $\frac{f_{felső}}{f_{alsó}} = \text{áll.}$

Állandó abszolút sáv szélesség esetén a frekvencia felbontás értéke tetszőleges lehet, kitüntetett érték az 1 Hz. Állandó relatív sáv szélességnél gyakran használt felbontás az oktáv sáv és a terc sáv (harmad-oktáv sáv), de ismertek további tört oktáv sávos felbontások is. Az oktáv sávot meghatározó határfrekvenciák és a közép frekvencia (az alsó és felső határértékek mértani átlaga),

$$f_{okt f} = 2 f_{okt a} \quad f_{okt k} = \sqrt{f_{okt a} f_{okt f}} = \sqrt{2} f_{okt a} = f_{okt f} / \sqrt{2}$$

Szabványos oktáv sáv közép frekvenciák, a 31,5 63 125 250 500 1k 2k 4k 8k 16k [Hz].

Az oktáv sávos felbontás előnye, hogy a teljes hallható frekvencia tartományt 10 értékkel lefedi. Ez néhány spektrum esetén még kézzel is feljegyezhető mennyiségű adat. Hátrány viszont, hogy 500 Hz-től felfelé a felbontás sáv szélessége kHz-es nagyságrendű, ami bizonyos esetekben (nagy frekvencián megjelenő vonalas spektrum összetevő jelenléte esetén) az alkalmazhatóságot erősen korlátozza. A problémát részben orvosolja az oktáv sáv mértani haladvány szerinti 3 egyenlő részre bontása, a terc sáv bevezetése. A terc sávot meghatározó határfrekvenciák és a közép frekvencia,

$$f_{terc f} = \sqrt[3]{2} f_{terc a} \quad f_{terc k} = \sqrt[3]{f_{terc a} f_{terc f}} = \sqrt[3]{2} f_{okt a} = f_{okt f} / \sqrt[3]{2}$$

Szabványos oktávsváltozó középfrekvenciák, a 31,5 40 50 63 80 100 125 160 200 [Hz].

Az FFT közvetlen számítási eredménye állandó abszolút sávszélességű felbontás. Ennek ellenére az oktáv- és tercsváltozó felbontás jelentősége töretlen. A szabványok ilyen felbontásban adják meg a zajok minősítésére szolgáló súlyozó értékeket, a szakkönyvek az akusztikai tervezési adatokat (hangelnyelési tényező, hanggátlás, ...) szintén oktáv- (esetleg tercsváltozó) középfrekvenciák függvényében közlik. Ezért az analizátorok, jelfeldolgozó szoftverek számos más lehetőség mellett általában az oktáv- és tercsváltozó felbontást is tartalmazzák.

### Hangok csoportosítása a spektrum alapján

Egyféle csoportosítás szerint a különböző hangokat a spektrum alapján tisztahang, zenei hang és zörej hang kategóriákba sorolhatjuk.

**Tisztahang:** Egyetlen  $\omega$  szögfrekvenciájú harmonikus összetevőből álló hanghullám. A tisztahang spektruma egy függőleges szakasz  $\omega$  szögfrekvencián. Szubjektív megfigyelés alapján a tiszta hang fütyülő, bűgő jellegű.

**Zenei hang:** Tisztahangok kellemes együtt hangzást (konzonanciát) létesítő összetétele. Két tiszta hang együttes megszólalása szubjektív megítélés szerint akkor kellemes, ha a hangfrekvenciák aránya meghatározott értékekkel egyenlő. A zenei akusztikában a kellemes együtt hangzás jóságának megítélésére négy kategóriát (abszolút-, teljes-, közepes- és tökéletlen konzonanciák) vezettek be,

Abszolút konzonancia: oktáv (2:1), duodecim (3:1)

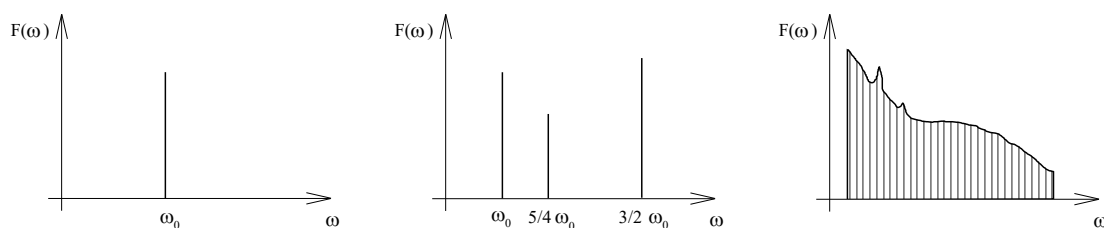
Teljes konzonancia: kvart (4:3), kvint (3:2)

Közepes konzonancia: nagy terc (5:4), nagy szext (5:3)

Tökéletlen konzonancia: kis terc (6:5), kis szext (8:5)

A zenei hang spektruma kettő vagy több függőleges szakasz meghatározott frekvenciákon. A következő ábra középső része egy dúr hármashangzat (prím (1:1), nagy-terc (5:4) és kvint (3:2)) összetevőit mutatja.

**Zörej hang:** Tisztahangok kellemetlen együtt hangzást (disszonanciát) okozó összetétele. Gyakorlatilag a tiszta hangok és a zenei hangok kivételével minden más hang. A zörej hang spektruma általában folytonos, az esetleges tiszta hangú összetevők frekvencia viszonya konzonancia feltételt nem teljesít. Zörej hang például egy ventilátor burkolatán lesugárzott zaj.



Hang spektrumok, tiszta hang (bal oldalon), dúr hármashangzat zenei hang (középen), ventilátor zörej hang (jobb oldalon)

### Hangmagasság, hangszín

A szubjektív akusztikai jellemzők a hangérzet és az objektív fizikai mennyiségek között határoznak meg kapcsolatot. Később ezekről a mennyiségekről részletesen lesz szó. Ebben a fejezetben a hangspektrummal kapcsolatban két szubjektív akusztikai fogalmat mutatunk be.

**Hangmagasság:** Egy hang magassága tiszta hang esetén a hang frekvenciája, összetett hang esetén a meghatározó összetevő frekvenciája. Érdeklődésükön megemlítjük, hogy abszolút hallással rendelkező személy pusztán a hallása segítségével tudja azonosítani egy megszólaló hang frekvenciáját. Ez feltételezhetően veleszületett tulajdonság, és a népesség elenyésző százaléka rendelkezik vele. A relatív hallás két

hangfrekvencia viszonyának érzékelése, például egy kvint hangköz hallása. Az emberek nagy részének jó a relatív hallása, amelyre elmélyült zenei képzettség nélkül is szert lehet tenni.

**Hangszín:** Egy hang hangszínét a meghatározó frekvencia összetevő mellé társuló további összetevők száma és ezek egymáshoz viszonyított frekvencia és amplitúdó aránya határozza meg. A hangszín teszi lehetővé, hogy ugyanazt a hangmagasságot (frekvenciát) megszólaltató hegedű, klarinét és harsona hangját akkor is meg tudjuk különböztetni, ha a megszólaló hangszeret és játékosát nem látjuk.

### Mérőhangok az akusztikában

Akusztikai jelenségek, eszközök, hangterek vizsgálata során speciális mérőhangokat használunk.

**Tisztahang:** Az egyik legfontosabb, alapvető mérőhang az akusztikában a kitarított tisztahang. Alkalmazásával nagy jel-zaj viszony érhető el, viszont ha például a teljes hallható tartomány vizsgálatára van szükség, a mérés hosszú időt igényel.

**Sepert szinusz:** A sepert szinusz mérőhang egy olyan tisztahang, amelynek a frekvenciája a vizsgálati tartomány mentén folyamatosan változik. Sepert szinusz használatával nagy jel-zaj viszony érhető el, és a mérési idő nagy frekvencia tartomány esetén sem lesz hosszú. Használata azonban adatgyűjtős mérőrendszert igényel, illetve nagy időállandójú akusztikai rendszer vizsgálatánál a rövid mérőjel időtartam mérési hibát okozhat.

**Fehérzaj:** A fehérzaj egy olyan véletlenszerűen változó hangjel, amely spektrumában megfelelő átlagolási idő figyelembe vételével minden egyes frekvencia összetevő nagysága ugyanakkora. Az elnevezés a fénytárból származik, ahol a fehér az összes szín keveréke. A fehérzaj spektruma egy vízszintes egyenes. Fehérzaj jellegű hang időben kitarított események közül például a nagy nyomású levegő lefúvatás során keletkező zaj (szubjektív hangérzet alapján a sistergő jellegű hangok), illetve impulzusos események közül a taps. Fehérzaj gerjesztés esetén a hangrendszer korlátozott átviteli képessége miatt általában a kis és nagy frekvenciák esetén kisebb lesz a jel-zaj viszony, viszont a mérési idő rövid, és kitarított jel esetén a berezgési idővel sem lesz gond. A jel-zaj viszony javítása érdekében szokásos még a fehérzaj oktáv, illetve tercsáv szűrt változatának használata.

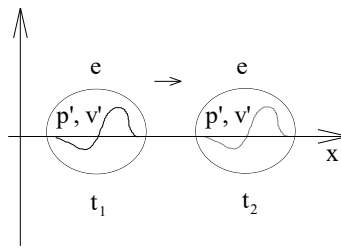
**Rózsaszínű zaj:** A rózsaszínű zaj egy olyan szélessávú hangjel, amelynél a frekvencia növekedésével a spektrum összetevők nagysága csökken. A zajspektrum alakja állandó abszolút sáv szélességű frekvencia felbontásban negatív meredekségű egyenes, állandó relatív sáv szélességű felbontásban vízszintes egyenes. A megnevezés a fénytárból kölcsönzött analógia, a fehér és piros (nagy hullámhosszú, kis frekvenciájú) színek keveréke rózsaszínű. A kis frekvencián az összetevők kiemelésével, a hangmérés jel-zaj viszonya javítható.

**Impulzusos zaj:** Rövid ideig tartó (~10ms, vagy rövidebb), nagy amplitúdójú mérőhang alkalmazásával lehetővé válik a hangterjedés időbeli követése, az impulzusos zaj akusztikai szempontból értékes vizsgálatok végzésére alkalmas. Így például teremakusztikában hangvisszaverődési folyamatok, vagy elektroakusztikai hangrendszerek fázis helyességének vizsgálatánál használják. Az elméleti egységimpulzus spektruma vízszintes vonal, de a valóságos impulzusos zajkeltők (pl.: taps, puskalövés) spektruma is szélessávú. Hátrány, a kis időtartam miatt, a mérés során rendszerbe bevihető kis hangenergia (rossz jel-zaj viszony), és praktikusán nehéz impulzusos zajforrást előállítani. A gyakorlatban alkalmazható, veszélytelen hangforrások zaj impulzusa túl hosszú és kicsi az amplitúdója. Alkalmazási előnyei miatt az impulzus választ az akusztikai méréstechnikában ma már inkább folyamatos fehérzaj gerjesztéssel és statisztikus jelfeldolgozási módszerek alkalmazásával állítjuk elő.

## 8.2. Energetikai viszonyok az akusztikában, elméleti háttér

Hangterjedés során mechanikai munkavégzőképesség, energia terjedés is kialakul. Ezt a fizikai ténytet kétféle magyarázattal támasztjuk alá. A zavarási állapot tovább terjedés során a hangteret jellemző alpmennyiségek egyik pontból a másikba jutnak. Belátható, hogy az alpmennyiségekből származtatható összes más fizikai mennyiség is velük együtt terjedni fog. A másik, gyakorlatiasabb magyarázat érdekében helyezzünk el egy hangforrást szabad térben. A hangforrás bekapcsolása előtt a hangforrástól véges távolságban elhelyezkedő megfigyelő személy hallószervében a kis alapzaj miatt a dobhártya gyakorlatilag nyugalomban van. A hangforrás bekapcsolását követően a hanghullám által szállított nyomás ingadozás eléri a dobhártyát. A dobhártya felületén a nyomáskülönbség miatt erő keletkezik, amely a rugalmas membránt elmozdítja. A

dobhártyára ható erő és a dobhártya elmozdulásának szorzata a dobhártyán végzett munka, amely a hang révén jött létre.



Hangterjedés során kialakuló energiaterjedés szemléltetése

A hang energia továbbító képességének ismerete az elvi jelentőségen túl az akusztikában számos gyakorlati területen hasznosul. Ilyen például a geometriai (sugár) akusztikai modell, amelyet szabad terek és nagyméretű, hangvisszaverő fallakkal határolt terek számításánál alkalmazunk. A sugár akusztikai modellezésnél a hangot energia szállító nyalábnak tekintjük. A hangtér vizsgálatának alapja a hangsugarak alakjának meghatározása. A hangsugarak széttartása a térfogati energiasűrűség csökkenését, összetartása a növekedését okozza. A határoló felülethez érkező energia nyaláb egy része elnyelődik, a maradék visszaverődik. Az energiamérleg alapján hangtéri modell vezethető le. Másik fontos alkalmazási terület a zajvédelem. Zaj besugárzás miatt a hallószerv igénybevételét alapvetően a zaj által a hallószervre kifejtett fárasztó munka, a zajexpozíció (vagy zajdózis) határozza meg. A zajexpozíció a hallószervbe bejutó hangteljesítmény és a besugárzási idő szorzata. Zajvédelmi szempontból a hang által szállított energia meghatározása fontos feladat.

A hangterjedés során kialakuló energetikai viszonyok vizsgálatánál a lineáris akusztikában alkalmazott egyszerűsítő feltételek érvényesek. A levezetést egydimenziós, síkhullám hangterjedés esetre mutatjuk be. Az energiaegyenletből kiindulva a levezetés meglehetősen körülményes, ezért helyette válasszuk a részecskesebesség és egyensúlyi sűrűség szorzatával bővített lineáris akusztikai mozgásegyenletet,

$$\rho_0 v' \left( \frac{\partial v'}{\partial t} \right) = \rho_0 v' \left( \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \right)$$

A mozgásegyenletben szereplő mennyiségek és a részecskesebesség szorzatával a folyadék rész mechanikai energia időegység alatti megváltozás és a külső erők által időegység alatt elvégzett munka közötti kapcsolat fejezhető ki. A hangot vivő közeg súrlódásmentes, nem hővezető és nincs hőközlés, így ezekre a hatásokra vonatkozó tagok az egyenletben nem szerepelnek. A mozgásegyenletben szereplő mennyiségek tömegegységre vonatkoznak, az egyensúlyi sűrűséggel szorozva az akusztikában szokásos térfogategységre vonatkozó leírást kapjuk. A bal oldalon a részecskesebesség összetett függvény, illetve a jobb oldalon a részecskesebesség és a hangnyomás szorzat függvény bevezetésével, a szükséges átalakításokat követően,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \frac{v'^2}{2} \right) = - \frac{\partial(p'v')}{\partial x} + p' \frac{\partial v'}{\partial x}$$

A jobb oldalon a második tagban a hely szerinti deriváltat a lineáris akusztikai kontinuitás egyenlet felhasználásával cseréljük ki a sűrűség ingadozás idő szerinti deriváltjára, majd a sűrűség ingadozást cseréljük a hangnyomás változóra,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \frac{v'^2}{2} \right) = - \frac{\partial(p'v')}{\partial x} + p' \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = - \frac{\partial(p'v')}{\partial x} + p' \frac{-1}{\rho_0 a^2} \frac{\partial p'}{\partial t}$$

Az egyenlet jobb szélén a hangnyomás és hangnyomás idő szerinti derivált szorzat összetett függvényé alakításával és az idő szerinti derivált kifejezések bal oldalra csoportosítását követően a síkhullám hangterjedés során kialakuló energetikai folyamatokat kifejező akusztikai energiaegyenlet,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \frac{v'^2}{2} + \frac{p'^2}{2\rho_0 a^2} \right) = - \frac{\partial(p'v')}{\partial x}$$

### Megjegyzések:

- A konkrét közeg mérettől független energia tartalom jellemzésére vezessük be a térfogati energiasűrűség ( $e$ ) mennyiséget,

$$e = \frac{E}{V} \left[ \frac{J}{m^3} \right]$$

- Az akusztikai energiaegyenlet bal oldalán, a zárójelen belül az első tag a részecskesebességgel számolt térfogati mozgási energiasűrűsége ( $e_m$ ),

$$e_m = \frac{E_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{mv'^2}{V} = \frac{1}{2} \rho_0 v'^2$$

- Az akusztikai energiaegyenlet bal oldalán, a zárójelen belül a második tag a külső nyomásból származó erő által a rugalmas levegőréteg (izentropikus) összenyomásával felhalmozódott munkavégző képesség (belső energia) térfogati sűrűsége ( $e_p$ ). Ez az állítás a termodinamika első főtétele felhasználásával bizonyítható be. A termodinamika első főtétel elemi folyamatra,

$$de = dw + dq$$

Ahol a közeg térfogategység vonatkozó elemi belső energia változás ( $de$ ), a térfogategységnyi közegen a külső erők által végzett elemi munka ( $dw$ ) és térfogategységnyi közeggel közölt elemi hő ( $dq$ ). Hőközlésmentes esetre ( $dq = 0 \text{ J/m}^3$ ), és az elemi munkát a fajtérfogat helyett a sűrűség reciprokával számolva,

$$\rho_0 c_v dT = -\rho_0 p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\rho_0 p \frac{-1}{\rho^2} d\rho$$

A szokásnak megfelelően az energia növekedés előjele pozitív. A kompresszió során a fajtérfogat (sűrűség reciproka) csökken, amely miatt az energia növekedés előjele negatív lenne, a kifejezés jobb oldalán a negatív előjel a konvenciónak megfelelő előjelet állítja vissza. Alkalmazzuk a termodinamika első főtétel a hangterjedés során fellépő „hangnyomás” változásra. Továbbá helyettesítsük a hangtéri változók teljes értékét az egyensúlyi mennyiséggel ( $\rho = \rho_0 + \rho' \approx \rho_0$ ), illetve az elemi változást az ingadozó mennyiséggel ( $d\rho = d\rho'$ ), illetve a sűrűségingadozás változót helyettesítsük a hangnyomással. Integrálást követően, a külső nyomásból származó erő által a rugalmas levegőréteg összenyomásával felhalmozott térfogati energiasűrűsége, vagy másként fogalmazva a „légrugó” erejével szemben felhalmozott potenciális térfogati energiasűrűsége ( $e_p$ )

$$e_p = \rho_0 c_v T' = -\rho_0 \int p' \frac{-1}{\rho_0^2} d\rho' = \frac{1}{a^2 \rho_0} \int p' d\rho' = \frac{p'^2}{2\rho_0 a^2}$$

- A akusztikai energiaegyenlet jobb oldalán, a hangnyomás és részecskesebesség szorzata a pillanatnyi hangintenzitás ( $I'$ ). A teljesítmény az időegység alatt végzett munka, hang esetében az időben ingadozó változókkal a pillanatnyi hangteljesítmény,

$$P' = \frac{\Delta W'}{\Delta t} = \frac{F' \Delta s'}{\Delta t} = F' \frac{\Delta s'}{\Delta t} = F' v'$$

Az intenzitás a fizikában általánosan használt mennyiség, jelentése a felületegységen áthaladó határos teljesítmény, hang esetében az időben ingadozó változókkal a pillanatnyi hangintenzitás,

$$I' = \frac{P'}{A} = \frac{F' v'}{A} = p' v'$$

A pillanatnyi hangintenzitás a felületegységen áthaladó pillanatnyi hangteljesítmény, a hangnyomás és a részecskesebesség szorzata, kiemelt fontosságú hangterjedési jellemző.

- Az új jelöléseket bevezetve az akusztikai energiaegyenlet tömör formája,

$$\frac{\partial e_{\delta}}{\partial t} = -\frac{\partial I'}{\partial x}, \quad \text{ahol } e_{\delta} = e_m + e_p$$

Az  $e_{\delta}$ ,  $e_m$  és  $e_p$  rendre az össz-, mozgási- és potenciális térfogati hangenergia sűrűség. Hangterjedés során egy kiszemelt pontban az összes térfogati energiasűrűség időegységre jutó növekedése, a külső erők által létrehozott intenzitás hosszegységre jutó lecsökkenésével egyenlő.

- Alakítsuk át a mozgási energia és a potenciális térfogati energiasűrűség kifejezéseit. A lineáris akusztikai mozgásegyenlet segítségével a képletekben a négyzetes kifejezések helyett a hangnyomás és a részecskesebesség szorzata szerepeljen,

$$e_m = \frac{1}{2} \rho_0 v'^2 = \frac{1}{2} \rho_0 v' \frac{p'}{\rho_0 a} = \frac{p' v'}{2a} = \frac{I'}{2a}$$

$$e_p = \frac{p'^2}{2\rho_0 a^2} = \frac{p' \rho_0 a v'}{2\rho_0 a^2} = \frac{p' v'}{2a} = \frac{I'}{2a}$$

$$e_m = e_p$$

Az előző összefüggés az akusztikai energia ekvipartíció tétel. Szavakkal, síkhullám hangterjedés során a térfogati mozgási energiasűrűség és a térfogati potenciális energiasűrűség egyenlő.

- Általános esetben az intenzitás vektor mennyiség, amelynek irányát a részecskesebesség iránya, az irányítottságot a részecskesebesség irányítottsága és a hangnyomás előjele együtt határozza meg. Például egy szabadon terjedő harmonikus hanghullám esetében a részecskesebesség a periódusidő feléig a hangterjedés irányával megegyező, a következő félben azonban ellentett irányú. Szabadon terjedő síkhullámok esetén a hangnyomás és a részecskesebesség fázisban van, pozitív irányú sebességhez pozitív hangnyomás, negatív irányú részecskesebességhez negatív hangnyomás tartozik, így a szorzat, az intenzitás viszont mindig pozitív, hangterjedéssel megegyező.

### 8.3. Gyakorló feladat:

Gy.1. Írja fel az oktáv- és tercsáv definícióját, és adja meg az adott sávhoz tartozó középfrekvencia értékét!

Gy.2. Az áramlástan alapegyenleteinek felhasználásával bizonyítsa be az akusztikai energia-ekvipartíció tételét és adja meg annak fizikai jelentését! Írja fel a kiindulásnál és a levezetés során alkalmazott egyszerűsítő feltételeket!