# II. előadás

Dr. Balogh Miklós

2016. február 17.

## Tömegáram, térfogatáram és kontinuitás

Adott felületen egységnyi idő alatt átáramló közeg mennyiségét (tömegét) a tömegárammal ($q_m$) adhatjuk meg. Matematikailag a tömegáram a sebesség és a sűrűség szorzatának felületi integráljával határozható meg:

$$q_m = \int_A \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

Inkompresszibilis, azaz összenyomhatatlan közegek esetén a sűrűség kiemelhető az integrálás elé, hiszen konstans, így kapjuk a tömegáram és a térfogatáram ($q_v$) közötti kapcsolatot, ahol a térfogatáram az adott felületen egységnyi idő alatt átáramló közeg térfogatát adja meg:

$$q_m = \int_A \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{A} \xrightarrow{\rho=\text{konstans}} q_m = \rho \int_A \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \rho q_v$$

A tömegáram egy adott felületelemen kiszámolható a sűrűség, a sebesség és a felületelem-vektor vektoriális szorzataként, azaz:

$$q_m = \rho \boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \rho \left|\boldsymbol{v}\right| \left|\mathrm{d}\boldsymbol{A}\right| \sin\beta.$$

A fenti összefüggésből levezethetők a tömegáram fontos tulajdonságai:

- $q_m = 0 \rightarrow \sin\beta = 0°$, azaz $\boldsymbol{v}$ párhuzamos d$\boldsymbol{A}$-val.
- $q_m = max. \rightarrow \sin\beta = 90°$, azaz $\boldsymbol{v}$ merőleges d$\boldsymbol{A}$-ra.

Vizsgáljuk meg egy elemi térfogatra vonatkozó többletkiáramlást (d$q_m$-t)! Az alábbi ábrának megfelelően írjuk fel az elemi térfogat különböző oldalain a felületre merőleges, kifelé irányuló tömegáramokat! Az elemi térfogat oldalhosszúsága rendre d$x$, d$y$ és d$z$, és a felületelem vektorok a térfogatból kifelé mutatnak. Az össztérfogat így d$V$ = d$x$d$y$d$z$, míg az $x$, $y$ és $z$ irányra merőleges felületek nagysága rendre $A_x$ = d$y$d$z$, $A_y$ = d$x$d$z$, $A_z$ = d$x$d$y$. Irányonként felírva:

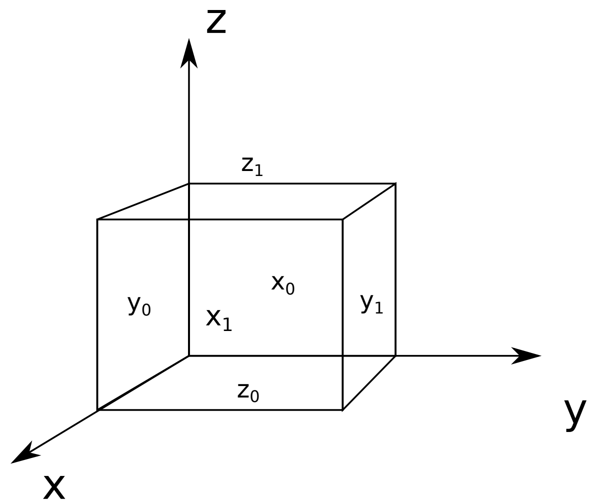
$$\mathrm{d}q_m(x) = \mathrm{d}q_m(x_0) + \mathrm{d}q_m(x_1) = -\rho v_x A_x + \left(\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\right) A_x$$

$$\mathrm{d}q_m(y) = \mathrm{d}q_m(y_0) + \mathrm{d}q_m(y_1) = -\rho v_y A_y + \left(\rho v_y + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\mathrm{d}y\right) A_y$$

$$\mathrm{d}q_m(z) = \mathrm{d}q_m(z_0) + \mathrm{d}q_m(z_1) = -\rho v_z A_z + \left(\rho v_z + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\mathrm{d}z\right) A_z$$

Ezek összegzésével megkapjuk az összes többletkiáramlást, felhasználva, hogy

$$\mathrm{d}x A_x = \mathrm{d}y A_y = \mathrm{d}z A_z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}V.$$




1. ábra. Elemi kontroltérfogat a többletkiáramlás meghatározához és a Gauss-Osztrogradszkij tétel levezetéséhez.

Az össz térfogatáram tehát

$$\mathrm{d}q_m = \mathrm{d}q_m(x) + \mathrm{d}q_m(y) + \mathrm{d}q_m(z) = \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right)\mathrm{d}V,$$

ahol a jobb oldalon szereplő zárójeles kifejezés a sűrűség és sebesség szorzatának divergenciája, azaz

$$\mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}.$$

A fenti levezetés eredményeként a Gauss-Osztrogradszkij tételt kaptuk, amely egy adott vektormennyiség felületi és térfogati integrálja között teremt kapcsolatot zárt felülettel határolt térfogatokra:

$$\int \mathrm{d}q_m = q_m = \int_A (\rho \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_V \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V.$$

Mivel a többletkiáramlás zárt felületen keresztül a sűrűség csökkenésével jár a vizsgált térfogatban, az egyenletben szerepelnie kell ennek a csökkenésnek, azaz a sűrűség időbeli megváltozásának integráljával a vizsgált térfogatban (előjelhelyesen):

$$\int_V \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

Tisztán differenciál alakban (az integrál elhagyásával), a fenti egyenlet átrendezésével nyerjük a folytonosság (kontinuitás) tételét:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

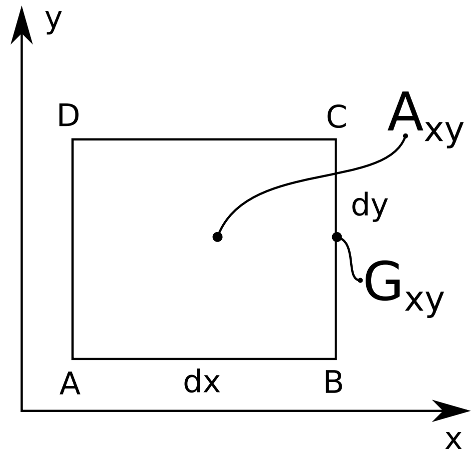
Stacionárius áramlás esetén a többletkiáramlás zérus:

$$\mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

Összenyomhatatlan közeg esetén, mikor a sűrűség térben és időben állandó, a kontinuitás a következő egyszerű alakot ölti:

$$\mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = \rho \mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0 \implies \mathrm{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Alkalmazás: Sebesség számítása változó keresztmetszetű csőben.




2. ábra. Elemi kontrolfelület a Stokes-tétel levezetéséhez.

Vizsgáljuk meg a következő ábrán látható, $A$, $B$, $C$ és $D$ pontokat összekötő $G_{xy}$ zárt vonal (görbe) által határolt, az $x, y$ síkon felvett $A_{xy}$ felületet! A sebesség az $A$ pontban legyen $\boldsymbol{v}_A = (v_x, v_y)$, a pontok közti távolság pedig rendre $\Delta AB = \Delta CD = \mathrm{d}x$ és $\Delta BC = \Delta DA = \mathrm{d}y$ végtelenül kicsi hossz! Az $A$ ponthoz hasonlóan, a $B$, $C$ és $D$ pontokban is felírható a sebesség, ha ismerjük annak iránymenti (parciális) deriváltjait:

$$\boldsymbol{v}_A = \left(v_x, v_y\right)$$

$$\boldsymbol{v}_B = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x\right)$$

$$\boldsymbol{v}_C = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$$

$$\boldsymbol{v}_D = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$$

Tegyük fel, hogy a sebesség megváltozása kontans, ami végtelenül kicsi d$x$ és d$y$ szakaszok esetén jó közelítés! Ekkor az egyes szakaszokon vett átlagsebesség közelíthető a végpontokban lévő sebességek számtani közepével:

$$\overline{\boldsymbol{v}}_{AB} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_B\right), \ \overline{\boldsymbol{v}}_{BC} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_C\right), \ \overline{\boldsymbol{v}}_{CD} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_D\right), \ \overline{\boldsymbol{v}}_{DA}\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_A\right)$$

Számoljuk ki a sebesség vonalmenti integrálját $G_{xy}$ görbén a szakaszokon vett integrálok összegeként:

$$\oint_{G_{xy}} \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A^B \overline{\boldsymbol{v}}_{AB}\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_B^C \overline{\boldsymbol{v}}_{BC}\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_C^D \overline{\boldsymbol{v}}_{CD}\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_D^C \overline{\boldsymbol{v}}_{DA}\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

Az integrálást előjelhelyesen elvégezve, és figyelembe véve, hogy a d$x$ és d$y$ szakaszokon a $v_y$ és $v_x$ sebességkomponensek integrálja rendre zérus:

$$\oint_{G_{xy}} \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_x^{x+dx} \left(\overline{\boldsymbol{v}}_{AB} - \overline{\boldsymbol{v}}_{CD}\right)\mathrm{d}x + \int_y^{y+dy} \left(\overline{\boldsymbol{v}}_{BC} - \overline{\boldsymbol{v}}_{DA}\right)\mathrm{d}y = \int_{x,y}^{x+dx,y+dy} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{A_{xy}} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{A}.$$

Vegyük észre, hogy a felületi integrál argumentuma éppen a sebességvektor rotációjának $z$ komponense:

$$\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{v}\right)_z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Ezt behelyettesítve az úgynevezett Green-formulához jutunk:

$$\oint\limits_{G_{xy}} \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int\limits_{A_{xy}} \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v})_z \, \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

A fenti összefüggést tetszőleges, három dimenziós felületre és vektortérre kiterjesztve a Stokes-tételt kapjuk:

$$\Gamma = \oint\limits_{G} \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int\limits_{A} \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{A}.$$

Potenciálos áramlásra a fenti összefüggés egyenlő zérussal! A sebességvektor rotációja ($\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v})$) egy vektor-vektor függvény, amely komponensenként kiírva:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

# A mozgásmennyiség megváltozása

Newton II. törvénye: Egy pontszerű test a gyorsulása azonos irányú a testre ható $F$ erővel, nagysága egyenesen arányos az erő nagyságával, és fordítottan arányos a test m tömegével:

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.$$

Állandó tömeg esetén:

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Másképpen megfogalmazva, a mozgásmennyiség megváltozása, arányos a ható erők eredőjével. Az áramlástanban ezt a törvényt folyadékokra, illetve gázokra alkalmazzuk. Vegyünk egy egyszerű példát: Szűkülő keresztmetszetű csőhöz kapcsolódó csap nyitása. A sebesség teljes megváltozása felbontható lokális és konvektív (odébbáramlási) gyorsulásra:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v},$$

ahol $\boldsymbol{D}$ a derivált-tenzor.

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial x} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

A derivált-tenzort $\boldsymbol{v}$-vel szorozva:

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \dfrac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \dfrac{\partial v_x}{\partial z} v_z \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \dfrac{\partial v_y}{\partial z} v_z \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \dfrac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} v_z \end{bmatrix}.$$

A derivált-tenzor felbontásával megmutatható, hogy a konvektív gyorsulás

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{v}.$$

## Az Euler egyenlet

Newton II. törvényét alkalmazva, a mozgásmennyiség megváltozását a ható erők eredője adja. Ezek az erők a súrlódás elhanyagolása mellett rendre a nyomásból származó erő és a külső erőtér hatása:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p,$$

amely az Euler egyenlet általános alakja.

## A Bernoulli egyenlet

Integráljuk áramvonal mentén az Euler egyenletet az $a$ és $b$ pontok között:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_a^b \mathrm{grad}\frac{v^2}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{s} - \int_a^b \boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{g}\mathrm{d}\boldsymbol{s} - \int_a^b \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

A gradiens tulajdonságainak és az áramvonalon való integrálás tulajdonságainak kihasználásával, összenyomhatatlan közegekre:

$$\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \frac{v_b^2 - v_a^2}{2} = \boldsymbol{g}(x_b - x_a) - \frac{1}{\rho}(p_b - p_a).$$

Stacionárius áramlásokra:

$$\frac{v_b^2 - v_a^2}{2} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_b - \boldsymbol{x}_a) - \frac{1}{\rho}(p_b - p_a).$$

## Áramlástani mérések, nyomás és sebesség

Következő óra anyaga...