Áramlások numerikus modellezése

BME Áramlástan Tanszék

Tárgyfelelős:	Dr. Kristóf Gergely
Gyakorlatvezetők:	Lohász Máté
	Dr. Régert Tamás

2008. ősze

Néhány szót a tantárgyról

- Oktatási célok:
  - Az áramlástani szimuláció **alkalmazás**ához szükséges elméleti háttér és szoftveres gyakorlati ismeretek elsajátítása;
  - Felkészülés mérnöki gyakorlatban előforduló, áramlástani szimulációval megoldható feladatok **felismerésére** és **önálló megoldására.**
- A gyakorlati kurzusok helyszíne: HSZK, a gyakorlati kurzusok tananyagát Interneten tesszük elérhetővé: http://www.ara.bme.hu/~cfd/FLUENTkurzus/Index.htm Kérem írják fel a címet! (Kisbetű-nagybetű fontos.)
- A gyakorlati órák első felében a tananyagban az Internetes jegyzet **kidolgozott példái** alapján fognak haladni. Az ezt követő gyakorlatokon **négy önálló feladatot** kell kidolgozni és dokumentálni .PPT formában. A féléves pontszám **60%**-a az önálló feladatok alapján szerezhető meg.
- Az előadáson elhangzó elméleti ismereteket zárthelyi formájában kérjük számon az utolsó előadás időpontjában. Ez alkalommal a féléves pontszám **40%** szerezhető.

Az áramlástani szimuláció módszerei

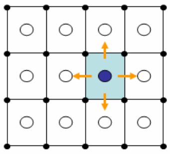
- A három legelterjedtebb módszercsalád:
  - Véges differenciák módszere;
  - Végeselem módszer;
  - **Véges térfogatok módszerek;**

  Néhány kevésbé elterjedt módszer:
  - Spektrál módszerek;
  - Rács nélküli módszerek;
  - Rács-gáz módszerek.
- A véges térfogat módszer (hasonlóan a végeselem módszerhez) a számítási tartomány kisebb térfogati elemekre bontja, amelyeken belül a keresett áramlástani mezőváltozók egyszerűbb (pl. lineáris) függvényekkel közelíthetők.
- A tartomány felbontását **hálógenerálás**nak, a térfogatelemeket pedig **cellák**nak hívjuk. Mezőváltozóink diszkrét értékeit a cellák középpontjában szeretnénk meghatározni.
- Célunk: az áramlást leíró megmaradási egyenletek megoldása közelítő módszerrel.

- Sorolja fel az áramlások numerikus szimulációjára leggyakrabban alkalmazott 3 módszert.
- Mit értünk hálógeneráláson és mik a cellák?

Véges térfogatok módszere

Mezőváltozók értékei



U: valamilyen megmaradó mennyiség térfogati sűrűsége

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V U\,dV + \oint_A \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_V S_V\,dV + \oint_A \vec{S}_A\cdot d\vec{A}$$

A megmaradó mennyiség egységnyi tömegre vonatkoztatva:

$$\Phi = U/\rho$$

Konvektív és konduktív fluxusok:

$$\vec{F}_C = \rho\Phi\vec{v} \qquad \vec{F}_D = -\Gamma\nabla\Phi$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\Phi\,dV + \oint_A \rho\Phi\vec{v}\cdot d\vec{A} = \oint_A (\Gamma\nabla\Phi + \vec{S}_A)\cdot d\vec{A} + \int_V S_V\,dV$$

- Írja fel az általános transzportegyenlet integrál alakban!
- Definiálja a konvektív és konduktív fluxus fogalmát!

Az általános transzportegyenlet differenciál alakban:

$$\frac{\partial\rho\phi}{\partial t} + \underbrace{\nabla\cdot(\rho\phi\vec{v})}_{\text{konvektív transzport}} = \nabla\cdot\vec{S}_A + \overbrace{\nabla\cdot(\Gamma\nabla\phi)}^{\text{konduktív transzport}} + S_v$$

Egyenlet:	ϕ
kontinuitás	1
x-impulzus	u
y-impulzus	v
z-impulzus	w
fajlagos energia	e

Egykomponensű folyadék áramlását leíró transzportegyenletek konzervatív alakja:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = S_m$$

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u\vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla\cdot(\mu\nabla u) + \rho g_x + S_u$$

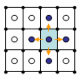
$$\frac{\partial\rho v}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v\vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla\cdot(\mu\nabla v) + \rho g_y + S_v$$

$$\frac{\partial\rho w}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho w\vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla\cdot(\mu\nabla w) + \rho g_z + S_w$$

$$\frac{\partial\rho e}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho e\vec{v}) = \nabla\cdot(-p\vec{v} + \underline{\tau}\cdot\vec{v}) + \nabla\cdot(\lambda\nabla T) + S_e$$

$$\nabla\cdot(-p\,\underline{E} + \underline{\tau})$$

- Írja fel az általános transzportegyenletet differenciál alakban! Milyen mennyiségeket képviselhet a Φ transzportált skaláris jellemző?
- Írja fel a kontinuitás, a mozgásegyenlet és az energiaegyenlet konzervatív alakját! Milyen tagnak tekinthetők a viszkózus erők és milyennek a nyomásgradiens az általános transzportegyenletben?



Véges térfogatok módszere

- Az alapegyenletek előbbi alakjait **konzervatív** (megmaradási) **alaknak** hívjuk.
- A differencál-egyenleteinket **integrálva egy-egy cella térfogatára** minden divergenciás tag a cella összes részfelületére vonatkozó felületi integrállá alakul. Az integrálok értéke minden cellafelületre egy-egy skalár, ami az adott felületen egységnyi idő alatt átáramló megmaradó mennyiséget fejezi ki, ezek a felület két oldalán tárolt (ismeretlen) mezőváltozóktól függenek.
- **Minden transzportegyenlet, minden cellára egy-egy nemlineáris algebrai egyenletet eredményez**, ezt nevezzük a leíró egyenletek **diszkrét közelítésének**. Tipikus példaként: 5 transzportegyenlet és 1 000 000 cella esetén 5 000 000 db. algebrai egyenletből álló egyenletrendszert kapunk.
- Az algebrai egyenletrendszer érdekes tulajdonsága, hogy az egyenletekben **egy-egy cella mezőváltozói csak a szomszédos cella mezőváltozóival állnak kapcsolatban**.
- A sok ismeretlen és az egyenletek nemlinearitása miatt az algebrai egyenletrendszer pontos megoldása nem lehetséges, **iteratív közelítő eljárásokat** alkalmazunk. Azt szeretnénk, hogy a megoldás valamilyen **iniciális** (kezdeti) állapotból indulva lépésenként **konvergáljon** a diszkrét egyenletrendszer pontos megoldásához. (Legtöbbször meg is teszi.)
- A számítási tartomány határára eső cella-részfelületekre vonatkozó integrálok számításához az elhagyott térrész hatását leíró újabb összefüggések: **peremfeltételek** megadása szükséges.

- Milyen alakú alapegyenletekből indulunk ki a véges térfogatok módszerének alkalmazásakor?

- Mit értünk a véges térfogatok módszerének konzervatív tulajdonságán?
- Hogyan nyerünk algebrai egyenletrendszert az áramlást leíró parciális differenciálegyenletekből?
- Milyen pontokban értelmezzük a mezőváltozókat? Hogyan álnak egymással kapcsolatban?
- Mit értünk iteratív megoldási módszeren?
- Mit értünk egy iteratív módszer konvergenciája alatt?
- Hogyan értelmezhetők a peremfeltételek a véges térfogat módszer esetében?

A CFD elemzés folyamata

1. Geometriai modell előállítása 2. Hálógenerálás 3. Peremfeltételi zónák kijelölése	}	**előfeldolgozás** GAMBIT-ben *.dbs, →*.msh
4. Fizikai modell kiválasztása, anyagjellemzők megadása 5. Peremfeltételek számértékei 6. Numerikus paraméterek 7. Megoldás inicializálása 8. Iteráció	}	**megoldás** FLUENT-ben *.cas, *.dat
9. Eredmények értékelése	—	**utófeldolgozás** FLUENT-ben

Ezt a folyamatot fogjuk most végigkövetni a „mérőperem” számítási gyakorlaton keresztül

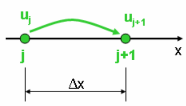
- Sorolja fel az áramlástani elemzés lépéseit! Mit nevezünk előfeldolgozásnak, megoldásnak és utófeldolgozásnak?

Differenciasémák levezetése Taylor-sorokkal

Kristóf Gergely

2008. 11. 18.

Euler-módszer



Az (analitikus) megoldás Taylor-sora j pontból a j+1 pontba.

Elsőrendű pontosságú integrálási séma:

$$u_{j+1}=u_j+u'_j\,\Delta x+o(\Delta x)$$

Differenciaséma, szintén elsőrendű pontossággal:

$$u'_j=\frac{u_{j+1}-u_j}{\Delta x}+o(1)$$

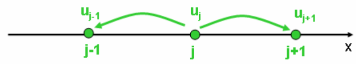
Szintén elsőrendű integrálási séma:

$$u_j=u_{j+1}+u'_{j+1}(-\Delta x)+o(\Delta x)$$

Általában u'_{j+1} az u_{j+1} függvényében adott, így a fenti egyenletből egy bonyolultabb képlettel fejezhető ki u'_{j+1}. Ilyen esetben ezt **implicit** sémának nevezzük.

- Mutasson példát egy elsőrendű pontosságú integrálási és differenciálási sémára!
- Mit értünk implicit séma alatt?

CDS



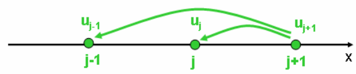
$$u_{j+1}=u_j+u'_j\,\Delta x+u''_j\frac{\Delta x^2}{2}+o(\Delta x^2)$$

$$u_{j-1}=u_j+u'_j(-\Delta x)+u''_j\frac{\Delta x^2}{2}+o(\Delta x^2)$$

$$u'_j=\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}+o(\Delta x)$$

- Vezesse le a CDS sémát Taylor-sorokkal! Határozza meg a konvergencia rendjét!

Egy implicit, másodrendű differenciaséma



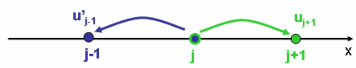
$$u_j=u_{j+1}+u'_{j+1}(-\Delta x)+u''_{j+1}\frac{\Delta x^2}{2}+o(\Delta x^2)$$

$$u_{j-1}=u_{j+1}+u'_{j+1}(-2\Delta x)+u''_{j+1}2\Delta x^2+o(\Delta x^2)$$

$$u_j-\frac{u_{j-1}}{4}=\frac{3}{4}u_{j+1}+u'_{j+1}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)+o(\Delta x^2)$$

$$u'_{j+1}=\frac{\frac{3}{2}u_{j+1}-2u_j+\frac{1}{2}u_{j-1}}{\Delta x}+o(\Delta x)$$

Adams-Basforth séma



$$u_{j+1}=u_j+u'_j\,\Delta x+u''_j\frac{\Delta x^2}{2}+o(\Delta x^2)$$

$$u'_{j-1}=u'_j+u''_j(-\Delta x)+o(\Delta x) \qquad / +\ldots\times\frac{\Delta x}{2}$$

$$u_{j+1}=u_j+\frac{3}{2}u'_j\,\Delta x-\frac{1}{2}u'_{j-1}\,\Delta x+o(\Delta x^2)$$

Másodrendű pontosságú explicit integrálási séma.
Alkalmas a **NS egyenlet időbeli integrálására**.

A térbeli deriváltakról általában:
Nem egyenközű és nem koordiána irányú rácsokra nagyon komplikált sémák adódnak.
A transzportegyenletekben végül is csak **div, grad és Laplace** operátorok kellenek.

- Vezesse le az Adams-Basforth sémát! Adjon egy alkalmazási példát!

A divergencia közelítő alakja

Véges térfogatos módszere esetében a divergencia operátort felületi integrálásra Visszavezetve közelítjük, ezért a Gauss-tételből kell kiindulni:

$$\int_V \nabla \cdot \underline{u}\, dV = \oint_A \underline{u} \cdot d\underline{A}$$

Az $\underline{u}$ vektor Descartes koordinátáit ui-val jelölve az alábbi módon definiálhatjuk a divergencia operátor diszkrét alakját a P középpontú cella középpontjában:

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i = \frac{\sum_k \int_{A_k} u_\perp dA}{V_P}$$

ahol A_k a cella oldalfalainak indexe.

- Hogyan közelíthető a divergencia operátor véges térfogatok módszerével?

A gradiens közelítő alakja

Egy skaláris mennyiség gradiensét a Gauss-tételből levezetett alábbi integrál átalakító tételből határozhatjuk meg:

$$\int_V \nabla \phi\, dV = \oint_A \phi \cdot d\underline{A}$$

A gradiens operátor i komponensét tehát az alábbi alakban számolhatjuk:

$$\tilde{\nabla}\Big|_i \phi = \frac{\sum_k \int_{A_k} \phi dA_i}{V_P}$$

A_i a felületvektor i komponensét jelöli Descartes koordináta-rendszerben.

- Hogyan közelíthető a gadiens operátor véges térfogatok módszerével?

A Laplace-operátor közelítő alakja

Egy skaláris mennyiségre vonatkozó Laplace operátor felírható a gradiens divergenciájaként:

$$\Delta\phi = \nabla \cdot \nabla\phi$$

Diszkrét közelítés elvégzéséhez a belső gradienset a cella felületére Interpolálnunk kell. Jelöljük ezt < > zárójelekkel:

$$\tilde{\Delta}\phi = \tilde{\nabla} \cdot \left\langle \tilde{\nabla}\Big|_i \phi \right\rangle$$

Gyakorlatilag a nyomás kivételével (pl. hőmérséklet vagy transzportált passzív skalárok esetében) a gradiens felületre merőleges komponensét egyszerűbben is közelíthetjük.
Végül is a Laplace operátor közelítő alakja a P pontban és a szomszédos cellákban tárolt Φ értékek lineáris kombinációja lesz:

$$\tilde{\Delta}\phi = A_P\,\phi_P + \sum A_\ell\,\phi_\ell$$

Az A együtthatók értékét a fent leírt módon határozhatjuk meg.

- Hogyan közelíthető a Laplace operátor véges térfogatok módszerével?

Diszkretizáció véges térfogatok módszerével

Kristóf Gergely

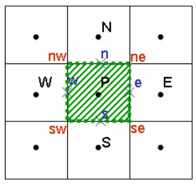
2008.11.13.

Fluxusok és térfogati források

A transzportegyenlet egy ϕ skaláris mezőváltozóra stacionárius áramlás esetén:

$$\underbrace{\oint_A \rho\,\phi\,\underline{v} \cdot d\underline{A}}_{\text{konvektív fluxus}} = \underbrace{\oint_A \Gamma\,\nabla\phi \cdot d\underline{A}}_{\text{konduktív fluxus}} + \int_V q_\phi dV$$

Egy 2D háló nevezetes pontjai P pont környezetében (kompasz indexelés):



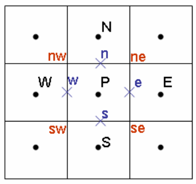
Felületi integrálok?

Térfogati integrálok?

Integrálok numerikus közelítése

Fluxusok felületi integrálja az e felületen:

$$F_e = \int_A \underline{f} \cdot d\underline{A} = \langle f_\perp \rangle_e A_e \cong f_{e\perp} A_e$$ 2-od rendű pontosságot biztosít ...



$$F_e \cong A_e \frac{1}{2}\left(f_{ne} + f_{se}\right)_\perp$$ 2-od rendű (trapéz szabály)

$$F_e \cong \frac{A_e}{6}\left(f_{ne} + 4 f_e + f_{se}\right)_\perp$$ 4-ed rendű (Simpson-szabály)

A térfogati forrás integrálja a P cellára:

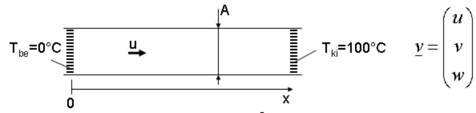
$$Q_P \cong \int_V q_\phi dV \cong q_{\phi,P} V_P$$

Pl. FLUENT rendszerben a mennyiségeket a cellaközéppontokban tároljuk
Más pontokba f értékét interpolálni kell.

- Hogyan közelíthető egy vektormennyiség felületi integrálja egy cella határfelületén?
- Hogyan közelíthető egy skaláris jellemző térfogati integrálja egy numerikus cellára?

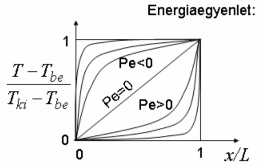
1D példa

Stacionárius áramlás egyenes csőben, hővezetési feladat:



Kontinuitás: $\dfrac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \longrightarrow$ u = állandó

Energiaegyenlet: $\oint_A [c_v T + \frac{v^2}{2}]\, \rho\, \underline{v} \cdot d\underline{A} = \oint_A \lambda \nabla T \cdot d\underline{A}$



Az analitikus megoldás:

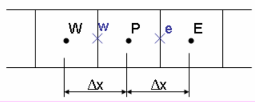
$$\frac{T - T_{be}}{T_{ki} - T_{be}} = \frac{e^{\rho u x c_v/\lambda} - 1}{e^{\rho u L c_v/\lambda} - 1}$$

Pe (Peclet-szám)

- Írja fel az energiaegyenlet integrál alakját stacionárius, egydimenziós, állandó sűrűségű áramlásban zajló konduktív-konvektív hővezetési feladatra!
- Rajzolja fel a stacionárius konduktív-konvektív hővezetési feladat analitikus megoldását jellegre helyesen!
- Mit nevezónk Peclet-számnak?

Diszkretizálás

Felírjuk a fluxusok felületi integráljait:



$$(\rho u T)_e \cancel{A} - (\rho u T)_w \cancel{A} = \left(\frac{\lambda}{c_v}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e \cancel{A} - \left(\frac{\lambda}{c_v}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w \cancel{A}$$

Új jelölések: $C_e = C_w = \rho u \qquad D_e = D_w = \dfrac{\lambda}{c_v\, \Delta x}$

$$C_e T_e - C_w T_w = D_e(T_E - T_P) - D_w(T_P - T_W)$$

Ugyanez még egyszerűbben: $F_e - F_w = 0$,

ahol: $F_e = C_e T_e - D_e(T_E - T_P)$ a teljes fluxus.

- Diszkretizálja az energiaegyenletet 1D, ρ=állandó, stacionárius hővezetési feladat esetére véges térfogatok módszerével!

CDS séma

$$C_e T_e - C_w T_w = D_e(T_E - T_P) - D_w(T_P - T_W)$$

A face-hőmérsékleteket **lineárisan interpoláljuk**:

$$\left[\frac{C_e}{2}(T_P + T_E) - D_e(T_E - T_P)\right] - \left[\frac{C_w}{2}(T_W + T_P) - D_w(T_P - T_W)\right] = 0$$

Felírjuk a P cellára vonatkozó lineáris egyenletet:

$$A_P T_P = A_W T_W + A_E T_E$$

A_W	A_E	A_P
$D_w + C_w/2$	$D_e - C_e/2$	$A_W + A_E$

$$D_e + D_w + C_e/2 - C_w/2 = A_E + A_w + \underbrace{C_e - C_w}_{=0\ \text{kontinuitás}}$$

Súlyozott átlagnak is tekinthető. Ha az együtthatók pozitívak, akkor az átlagolás nem vezethet be extrémumot P pontban.

- Diszkretizálja a teljes hőfluxust CDS séma segítségével, írja fel a P középpontú cellára kapott algebrai egyenletrendszert! Hogyan kell kiszámítani az A_P együtthatót?

Az algebrai egyenletrendszer megoldása

Pl. 4 cella esetén az alábbi:

a b c

$$\begin{bmatrix} A_{1,P} & A_{1,E} & 0 & 0 \\ A_{2,W} & A_{2,P} & A_{2,E} & 0 \\ 0 & A_{3,W} & A_{3,P} & A_{3,P} \\ 0 & 0 & A_{4,W} & A_{4,P} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{1,P} \\ T_{2,P} \\ T_{3,P} \\ T_{4,P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{1,W} T_{be} \\ 0 \\ 0 \\ -A_{4,E} T_{ki} \end{bmatrix}$$

Megoldás: Gauss-eliminációval.
n ismeretlenes, tridiagonál mátrixú egyenletrendszer esetében csak 2 n művelet (egy ciklus előre és egy vissza): Thomas-algoritmus.

Sajnos 2D és 3D áramlások esetében nem tridiagonál mátrixú.

- Írja fel az 1D, ρ=állandó, stacionárius hővezetési feladat diszkretizálásából adódó egyenletrendszer mátrixos alakját. Milyen módszerrel oldható meg ez az egyenletrendszer?

Példaprogram

1. Hasonló megoldást kapunk több, különböző paraméter változatra. $\quad Pe = \dfrac{\rho u L}{\lambda / c_v}$
2. Hiba N^2-el arányosan csökken. Másodrendű pontosság. $\quad Re = \dfrac{\rho u L}{\mu}$
3. Néha oszcillál. Mikor kezd oszcillálni? $\quad Pe_{\Delta x} = \dfrac{\rho u \Delta x}{\lambda / c_v} > 2$

- Mi a CDS séma stabilitásának feltétele egy 1D, ρ=állandó, stacionárius hővezetési feladat megoldása során?

Transzportivitás

Fizikai szempontból:
növekvő Pe esetén egyre T_E hatása egyre kevésbé érvényesül T_P-re.

Tudja ezt a numerikus séma?

$$A_E = D_e - C_e/2$$

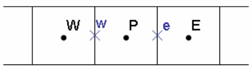
$$C_e = \rho u \qquad D_e = \frac{\lambda}{c_v\, \Delta x} \qquad Pe = \frac{\rho u L}{\lambda / c_v}$$

$$A_E = \frac{D_e}{2}\left(2 - \frac{C_e}{D_e}\right) = \frac{D_e}{2}\left(2 - \frac{\rho u \Delta x}{\lambda / c_v}\right) = \frac{D_e}{2}(2 - Pe_{\Delta x})$$

Cella Peclet-szám: a konvektív és konduktív hőfluxusok hányadosa.
$Pe_{\Delta x}$>2 esetén A_E nagysága újra nőni kezd.
A stabilitási probléma is ilyen esetekben lép fel.

- Mit értünk a numerikus fluxusok transzportívitásán?

UDS séma



u>=0 esetén: $T_w = T_W, \quad T_e = T_P$

u<0 esetén: $T_w = T_P, \quad T_e = T_E$

$$A_W T_W + A_E T_E = A_P T_P$$

A_W	A_E	A_P
$Max(C_w,0) + D_w$	$Max(-C_e,0) + D_e$	$A_W + A_E$

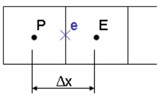
További numerikus kísérletek...

A pontosság elsőrendűre csökken.

- Ismertesse az elsőrendű szélfelőli súlyozást (UDS) egy 1D, ρ=állandó, stacionárius hővezetési feladat példáján! Teljesül-e a transzportívitás?

Mesterséges „diffúzió”

A numerikus hibának egy fontos fajtája. A pontatlan interpolációból adódott:



$$T_e = T_P + \frac{\Delta x}{2}\frac{dT}{dx} + o(\Delta x)$$

ezt elhagyjuk

$$F_e = C_e T_P + C_e \frac{\Delta x}{2}\frac{dT}{dx} - D_e (T_E - T_P)$$

Olyan mintha megnöveltük volna a hővezetést!
Írjuk be T deriváltjának diszkrét közelítését: $\frac{dT}{dx} = \frac{T_E - T_P}{\Delta x}$

$$D_e = \frac{\lambda}{c_v \Delta x} \longrightarrow \frac{\lambda_{mest}}{c_v \Delta x} = \frac{\rho u}{2} \longrightarrow \lambda_{mest} = \frac{\rho u c_v \Delta x}{2}$$

- Határozza meg az UDS séma által bevezetett mesterséges vezetési tényezőt!

HDS séma

Spalding (1972)

Az a fontos, hogy az „A” együtthatók ne legyenek negatívak.
$Pe_{\Delta x}$ értéke alapján számoljuk a felületi fluxust:

$Pe_{\Delta x} \le -2$ $F_e = C_e T_E$

$-2 < Pe_{\Delta x} \le 2$ $F_e = C_e\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{Pe_{\Delta x}}\right)T_P + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{Pe_{\Delta x}}\right)T_E\right]$

$2 < Pe_{\Delta x}$ $F_e = C_e T_P$ Legalább kis $Pe_{\Delta x}$ esetén másodrendű.

$$A_W T_W + A_E T_E = A_P T_P$$

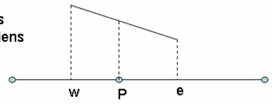
A_W	A_E	A_P
$Max\left(C_w, \left[D_w + \frac{C_w}{2}\right], 0\right)$	$Max\left(-C_e, \left[D_e - \frac{C_e}{2}\right], 0\right)$	$A_W + A_E$

- Ismertesse a Spalding-féle hibrid differenciaséma (HDS) elvét!

SOU séma

másodrendű szélfelőli súlyozás

Cellán belül lineáris interpoláció a gradiens segítségével:



Pl. a cellafali hőmérséklet: $T_e = T_P + \left.\frac{dT}{dx}\right|_P \frac{\Delta x}{2}$

A gradiens meghatározása két lépésben:

1. lépés $\left.\frac{dT}{dx}\right|_P = \frac{T_e' - T_w'}{\Delta x}$ $T_e' = \frac{T_P + T_E}{2}, \quad T_w' = \frac{T_W + T_P}{2}$

2. lépés $\left.\frac{dT}{dx}\right|_P$ értékét úgy korlátozzuk, hogy ne vezethessen be extrémumokat. Gradiens limiterek: C Hirsch.

- Ismertesse a másodrendű szélfelőli súlyozás (SOU) elvét!

Inkompresszibilis áramlások számítása

Kristóf Gergely

2008. november 15.

A nyomás-sebesség kapcsolat problémája

A diszkretizációval kapott algebrai egyenletrendszer megoldására iterációs módszert fogunk alkalmazni.
Egy további egyszerűsítési lehetőség:
Szegregált iteráció: minden mezőváltozóra különálló egyenletrendszert oldunk meg, amelyben a többi mezőváltozót állandónak tekintjük.

Kontinuitás:
$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Navier-Stokes egyenlet:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\vec{v}) = -\frac{\partial p/\rho_0}{\partial x} + \nabla \cdot (\nu \nabla u) + g_x$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v\vec{v}) = -\frac{\partial p/\rho_0}{\partial y} + \nabla \cdot (\nu \nabla v) + g_y$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (w\vec{v}) = -\frac{\partial p/\rho_0}{\partial z} + \nabla \cdot (\nu \nabla w) + g_z$$

Ez az egyenletrendszer nem alkalmas szegregált iterációra.
Szükségünk lenne a nyomásmező meghatározására alkalmas alapegyenletre.

- Írja fel az állandó sűrűségű lamináris áramlást leíró alapegyenleteket konzervatív alakban!
- Mit értünk szegregált iteráció alatt? Alkalmas az állandó sűrűségű lamináris áramlást leíró egyenletrendszer szegregált iterációval történő megoldására?

Két szokásos megközelítés

- Ψ-ω módszer
  Az mozgásgyenletből kiküszöböljük a nyomásmezőt.
  A kontinuitást egy potenciál függvény bevezetésével oldjuk meg.
- Nyomáskorrekciós módszerek
  A kontinuitási egyenlet helyett a nyomásmező meghatározására alkalmas alapegyenletet oldunk meg.

Az örvényesség (ω)

Az örvényesség 3D-ben: $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v}$

2D-ben ω-nak csak z komponense van:

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial w}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial v}{\partial z}} \\ \cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

tehát: $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

Az áramfüggvénnyel kifejezve: $\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$

ez egy **Poisson-egyenlet az áramfüggvényre**.

Egy érdekes speciális eset: potenciálos áramlásokra $\underline{\omega} = 0$

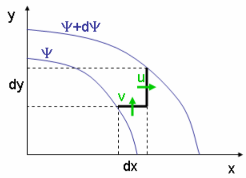
Csak egy Laplace-egyenletet kell megoldani 2D esetben. $\Delta \psi = 0$

Analitikus megoldások, analógiák...

- Nevezzen meg két szokásos módszert a nyomás-sebesség kapcsolat feloldására. Egy-egy mondatban ismertesse ezek működési elvét!

- Definiálja az örvényességet (ω-t)!
- Ismertesse az áramfüggvény meghatározására alkalmas Poisson-egyenletet 2D áramlás esetén!
- Milyen egyenletből számíthatjuk az áramfüggvényt állandó sűrűségű potenciálos áramlások esetén?

Az áramfüggvény (Ψ)



Jelentése 2D-ben: térfogatáram 1 m széles tartományban.

Egy Ψ=állandó vonalon átáramlás nincs, tehát a Ψ szintvonalai áramvonalak.

Két, egymáshoz közeli áramvonalra az alábbi összefüggés érvényes:

$$d\psi = u\,dy - v\,dx$$

Ugyanakkor Ψ teljes differenciálja:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

Ebből megkapjuk Ψ definícióját 2D áramlás esetére: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad és \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$

Puszta létével kielégíti a kontinuitási egyenletet: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$

Az örvénytranszportegyenlet (ÖTE)

Képezzük a Navier-Stokes egyenlet rotációját 2D-ben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \#\#\# = -\frac{\partial^2 p/\rho_0}{\partial x \partial y} + \mathbf{v}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \#\#\# = -\frac{\partial^2 p/\rho_0}{\partial x \partial y} + \mathbf{v}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} + \#\#\# = 0 + \mathbf{v}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)} = (\nabla \cdot \underline{v})\omega = 0$$

Az örvénytranszport egyenlet 2D alakja. (3D-ben bonyolultabb). $\frac{d\omega}{dt} = \mathbf{v}\Delta\omega$

A kinematikai viszkozitás az örvényesség vezetési tényezője... Pl: határrétegben.

- Vezesse le az áramfüggvény definíciós összefüggéseit 2D, állandó sűrűségű áramlás esetén.
- Bizonyítsa be, hogy az áramfüggvény kielégíti a kontinuitási egyenlet 2D-ben!

- Vezesse le az örvénytranszportegyenlet 2D alakját!

3D áramlások esetében

3D-ben Ψ-t vektorként definiáljuk: $\underline{v} = \nabla \times \underline{\psi}$
Vektorpotenciál.

Síkáramlás esetén visszakapjuk az eredeti definíciót:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial \psi_y}{\partial z}} \\ \cancel{\frac{\partial \psi_x}{\partial z}} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ \cancel{\frac{\partial \psi_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial \psi_x}{\partial y}} \end{pmatrix} \longrightarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad és \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

azaz síkáramlás esetén:

A kontinuitás 3D-ben is automatikusan kielégül: $\nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot \nabla \times \underline{\psi} \equiv 0$

2D-ben további előny, hogy a mezőváltozók száma csökken ($u,v \to \Psi$).
Sajnos ez az előny 3D-ben elvész.

Megoldási módszer stacionárius áramlásra

Poisson-egyenlet Ψ-re:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega$$

ÖTE-ba beírjuk a Ψ-vel kifejezett u-t és v-t:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} = \mathbf{v}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

Szegregált megoldási módszer:

$$\psi^0, \omega^0 \xrightarrow{Poisson} \psi^1, \omega^0 \xrightarrow{ÖTE} \psi^1, \omega^1 \xrightarrow{Poisson} \psi^2, \omega^1 \ \ldots$$

Peremfeltételek Ψ-re:
- Belépésnél és falon: elsőfajú.
- Kilépésnél másodfajú (Neuman pf.).

ω-ra:
- Belépésnél és falon: elsőfajú.
- Kilépésnél másodfajú (Neuman pf.).

Probléma: nyomás peremfeltételt nem tudunk előírni, mert p nem szerepel az egyenletekben. A nyomásmezőt utólag kell meghatározni.

- Ismertesse az áramfüggvény általános definícióját és mutassa meg, hogy kielégíti a kontinuitási egyenlet!

- Írja fel a ψ-ω módszer alapegyenleteit 2D áramlás esetén és mutassa be a szegregált megoldási módszer alkalmazását erre az esetre!
- Milyen peremfeltételeket írhatunk elő ψ-re és ω-ra ki és belépésnél.

- Milyen peremfeltételeket írhatunk elő ψ-re a falakon?

(Ez szóban hangzott el.)

- Előírható-e nyomás peremfeltétel ψ-ω módszer esetében?

Nyomás alapú megoldók

A nyomásegyenlet

Kontinuitás: $\nabla \cdot \underline{u} = 0$

Mozgásegyenlet 2D-ben, g=0 esetén: $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{u} \otimes \underline{u}) = -\nabla (p/\rho_0) + \nu \Delta \underline{u}$

Új jelölések: $P = p/\rho_0$ és $\underline{f}$ (értelemszerűen).

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \underline{f} - \nabla P$$

Képezzük a mozgásegyenlet divergenciáját felhasználva, hogy: $\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \underline{u} = 0$

$$\Delta P = \nabla \cdot \underline{f}$$

Ez egy Poisson-egyenlet P-re.
Nyomásegyenlet

Ez alkalmas pl. a nyomásmező meghatározására Ψ-ω módszer esetén.

- Vezesse le a nyomásegyenletet!

Alkalmas-e a nyomásegyenlet a kontinuitás kiváltására?

Diszkretizáljuk a mozgásegyenletet egyszerűség kedvéért időben elsőrendű pontosságú integrálási sémával (Euler-módszerrel):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(f_i^n - \tilde{\nabla}\Big|_i P^n \right)$$

A nyomásegyenlet diszkrét alakja:

$$\tilde{\Delta} P^n = \tilde{\nabla} \cdot f_i^n$$

Először oldjuk meg a nyomásegyenletet P^n-re, majd frissítsü-k a sebességet!

Divergenciamentes lesz az új sebességmező?

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \tilde{\nabla} \cdot u_i^n + \Delta t \underbrace{\left(\tilde{\nabla} \cdot f_i^n - \tilde{\Delta} P^n \right)}_{\approx 0 \text{ csak közelítőleg tudjuk megoldani!}}$$

A nyomásegyenletet megoldásának hibája felhalmozódva jelentkezik a kontinuitásban.

- Mutassa meg, hogyan halmozódnának a numerikus hibák, ha a nyomásegyenletet eredeti formájában alkalmaznánk a kontinuitási egyenlet helyettesítésére!

A hiba felhalmozódása elkerülhető...

Nekünk nem a nyomásegyenlet fontos, hanem a kontinuitás teljesítése.

Az eredeti nyomásegyenlet helyett az alábbi korrigált egyenletet kell megoldani:

$$\tilde{\Delta} P^n = \tilde{\nabla} \cdot f_i^n + \frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^n$$

majd a mozgásegyenletből számoljuk az új sebességeket:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(f_i^n - \tilde{\nabla}\Big|_i P^n \right)$$

Ellenőrizzük az új sebesség divergenciamentességét:

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \Delta t \underbrace{\left[\frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^n + \tilde{\nabla} \cdot f_i^n - \tilde{\Delta} P^n \right]}_{\approx 0 \quad \text{nyomásegyenlet}}$$

Csak akkora a kontinuitás hibája, amit a korrigált nyomásegyenlet megoldásakor elkövetünk az n-edik lépésben.

- Hogyan kerülhető el a hiba felhalmozódása a kontinuitási egyenletben nyomás alapú megoldók esetében?

Projekciós módszer

Ugyanez a módszer a szokásosabb jelölésekkel:

1. lépés kiszámítjuk: $u^*_i = u_i^n + \Delta t \, f_i^n$ — u^* pszeudosebesség

2.lépés **megoldjuk**: $\tilde{\Delta} P^n = \frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u^*_i \longrightarrow P^n$

3. lépés kiszámítjuk: $u_i^{n+1} = u^*_i - \Delta t \tilde{\nabla}\Big|_i P^n$

Ellenőrizzük! $\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \Delta t \underbrace{\left[\frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u^*_i - \tilde{\Delta} P^n \right]}_{\text{Tényleg ezt oldjuk meg a 2. lépésben.}}$

- Ismertesse a projekciós módszerek működési elvét!

Stacionárius áramlás

- **Kis időlépések:**
  Az előző módszer csak kis időlépésekkel tud működni. (Feltételesen stabil séma.)
  Ha az áramlás stacionárius, vagy lassan változik, akkor nagyon sok időlépést kell tenni, amíg elérjük a stacionárius állapotot.
- **Hiányzik az időbeli derivált:**
  Stacionárius áramlások esetén kihagyjuk az időbeli deriváltakat és a hely szerinti deriváltakból számoljuk ki az új sebességmezőt.

P-u iteráció stacionárius áramlásra

Szeretnénk, ha az n+1-edik iterációs lépésben minél pontosabban teljesülnének:

$$A_P u_{i,P}^{n+1} + \sum A_\ell u_{i,\ell}^{n+1} = Q_i - \tilde{\nabla}\Big|_i P^{n+1} \quad \text{és} \quad \tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = 0$$

Csak a régi nyomást tudjuk felhasználni... (itt még nem lesz pontos a kontinuitás).
u^* kezdőértékeként u^n-et használjuk.

$$A_P u_{i,P}^* + \sum A_\ell u_{i,\ell}^* = Q_i - \tilde{\nabla}\Big|_i P^n \xrightarrow{\text{1.lépés}} u_i^*$$

$$u_{i,P}^* = \frac{Q_i - \sum A_\ell u_{i,\ell}^*}{A_P} - \frac{1}{A_P} \tilde{\nabla}\Big|_i P^n$$

$$u_{i,P}^* = \breve{u}_{i,P} - \frac{1}{A_P} \tilde{\nabla}\Big|_i P^n$$

u^{n+1} hasonló képlettel közelíthető az új nyomásgradiens alapján:

$$u_{i,P}^{n+1} \approx \breve{u}_{i,P} - \frac{1}{A_P} \tilde{\nabla}\Big|_i P^{n+1} \quad \text{3.lépés}$$

u^{n+1} elégítse ki a kontinuitást!
Képezzük a numerikus divergenciáját:

$$\tilde{\Delta} P^{n+1} = A_P \tilde{\nabla} \cdot \breve{u}_i \xrightarrow{\text{2.lépés}} P^{n+1}$$

A 3. lépésben elhanyagolt szomszédok miatt most a mozgásegyenlet nem pontos, ezért 1,2,3 lépéseket ismételni kell.

- Ismertesse a nyomás alapú megoldók működési elvét stacionárius áramlás esetén!

Szokásos módszerek

- **Belső iteráció**:
  Közelítő megoldást kell alkalmazni az 1. és a 2. lépés egyenletrendszerének megoldására, azonban a belső iteráció csak 1 lépést szokott tenni.
- **Nyomáskorrekciós egyenlet:**
  Nyomás helyett nyomáskorrekcióra szokásos megoldani a Poisson-egyenletet. (Numerikus előnyök.)
- **SIMPLE, SIMPLEC, SIMPLER, PISO**
- **Időfüggő modellek:**
  Időben változó folyamatok esetén a lokális gyorsulást beletehetjük Q-ba. Időben implicit sémát alkalmazva nagy időlépéseket lehet tenni.

Az áramlástani problémák diszkretizálásával kapott algebrai egyenletrendszer megoldása

Dr. Kristóf Gergely

2008.11.21.

A Poisson-egyenletet minden időlépésnél meg kell oldani...

Ezt a feladatot nem tudjuk elkerülni inkompresszibilis áramlások esetén.

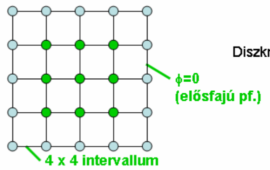
Ψ-ω módszer esetében: $\Delta\psi = -\omega \longrightarrow \psi$

Nyomásalapú megoldók esetében: $\Delta P = \nabla \cdot \underline{f} \longrightarrow P$

- Miért fontos a Poisson-egyenlet hatékony megoldása inkompresszibilis áramlások számítása esetén?

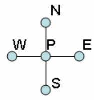
Egyszerű 2D példa

A számítási tartomány:



$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = Q$$

Diszkretizáljuk véges differenciák módszerével:



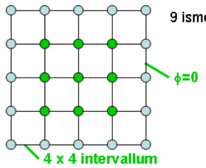
$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x}\right) + \frac{1}{\Delta y}\left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y} - \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y}\right) = Q_P$$

Pl: $\Delta x = \Delta y = h$ esetén: $\phi_S + \phi_W - 4\phi_P + \phi_E + \phi_N = h^2 Q_P$

- Egyszerű 2D példán keresztül mutassa be a Poisson-egyenlet diszkretizálását!

Mátrixos alakban

$$\phi_S + \phi_W - 4\phi_P + \phi_E + \phi_N = h^2 Q_P$$



9 ismeretlenünk van.

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$A_{i,j}\,\varphi_i = Q_i$$

Pl. 101 x 101 es háló esetén az ismeretlenek száma $N=10^4$, **A** elemeinek száma pedig 10^8.

- Írja fel a 2D Poisson-egyenlet diszkretizálásával nyert algebrai egyenletrendszert mátrixos alakban!

Gauss-elimináció

Általános mátrix esetében épp olyan jó, mint bármilyen más módszer, viszont a mátrix kedvező tulajdonságait nem használja ki.

1. lépés Elimináció:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix}$$

Az első sor A_{21}/A_{11}-szeresét kivonjuk a második sorból, így ott az első elem 0 lesz. Ugyanez minden további sorra.

Minden további oszlopra az N-1 –edik oszlopig.

2. lépés Visszahelyettesítés:

$$\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} \\ 0 & 0 & U_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\phi_n = \frac{Q_n}{U_{nn}}$$

$$\phi_i = \frac{Q_i - \sum_{k=k+1}^{N} U_{k,i}\,\phi_k}{U_{i,i}}$$

A műveletigény $N^3/3$, de ebből a visszahelyettesítés csak $N^2/2$. Hiába ritka A mátrix, az U mátrix már nem ritka. Memóriaigény 101 x 101 es hálón kb. 400 Mb. Továbbá: **Nem is szükséges nagyon pontos megoldás, mert a diszkretizációs hiba jelentős.**

- Ismertesse a Gauss-féle eliminációs módszer elvét!

Iteratív módszerek

A megoldást lépésenként finomítjuk. ϕ közelítése az n-edik lépésben ϕ^n.

Elhagyva a vektorindexeket: $A\phi^n = Q - \rho^n$ ρ^n : reziduum

A hiba: $\varepsilon^n = \phi - \phi^n$

$A\varepsilon^n = A(\phi - \phi^n) = Q - (Q - \rho^n) = \rho^n$ Tehát a hibára az eredetivel azonos mátrixú egyenletrendszert kell megoldani.

Iteratív módszerek: $M\phi^{n+1} = N\phi^n + Q$

Bekonvergált megoldásra: $\phi^{n+1} = \phi^n = \phi$, ezért: $A = M - N$

Mindkét oldalból vonjunk le $M\phi^n$ –et:

$$M(\underbrace{\phi^{n+1} - \phi^n}_{\text{korrekció: } \delta^n}) = N\phi^n + Q - M\phi^n = Q - A\phi^n = \rho^n$$

$M\delta^n = \rho^n$ Korrekciós egyenlet.

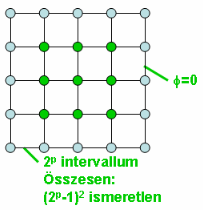
Minél jobban közelíti M az A mátrixot, annál gyorsabban konvergál.
M lehet pl. diagonál, tridiagonál, vagy Δ mátrix. δ-nak sem kell pontosnak lenni...

- Ismertesse a lineáris egyenletrendszerek iteratív megoldásának elvét! Mit értünk reziduum, hiba és korrekció alatt? Milyen szempontok merülnek fel az A mátrix M közelítésének megválaszátásával kapcsolatban?

Jacobi-iteráció

$\phi_S^n + \phi_W^n - 4\phi_P^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^n = h^2 Q_P$ M diagonál mátrix lesz.

$$\phi_P^{n+1} = \frac{1}{4}\left(\phi_S^n + \phi_W^n + \phi_E^n + \phi_N^n - h^2 Q_P\right)$$

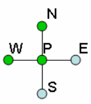


Példaprogram:

- A program...
- Az eredmény jellege...
- Szükséges iterációszám...

- Írja fel a Jacobi iteráció sémáját egyenközű 2D hálón diszkretizált Poisson-egyenlet megoldására.

Gauss-Seidel iteráció



$\phi_S^n + \phi_W^{n+1} - 4\phi_P^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^{n+1} = h^2 Q_P$ M Δ mátrix lesz.

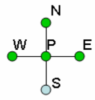
ezeket már ismerjük a számítási sorrend miatt (lexikografikus séma)

$$\phi_P^{n+1} = \frac{1}{4}\left(\phi_S^n + \phi_W^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^{n+1} - h^2 Q_P\right)$$

- Fele annyi iterációt igényel
- Nem kell új tömb a változóknak
- A hiba aszimmetrikus.

- Írja fel a Gauss-Seidel-féle iterációs sémáját egyenközű 2D hálón diszkretizált Poisson-egyenlet megoldására.

Vonalrelaxáció



$\phi_S^n + \phi_W^{n+1} - 4\phi_P^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^{n+1} = h^2 Q_P$

ezt már ismerjük

ezeket egyszerre határozzuk meg Thomas algoritmus segítségével.

Ugyancsak tridiagonál megoldóra épül az ADI (más néven operator splitting) módszer, ami ennél sokkal hatékonyabb megoldást tesz lehetővé.

Probléma:
Az eddigi módszerek csak simítanak, ezért a peremek hatása nagyon lassan terjed be a finom hálókon. → Durvább rácsokat is használni kell.
A korrekciós egyenletet kell durvább rácsra levinni, mert ezt pontatlanul (nagyobb relatív hibával) is megoldhatjuk.

- Miért nem gazdaságosak a Jacobi, Gauss-Seidel és vonalrelaxációs módszerek finom hálókon?

Multigrid módszer

Vegyünk például egy egyszerű egydimenziós feladatot:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = Q$$

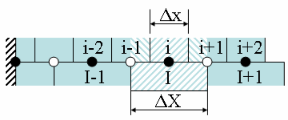
$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}\right) = Q_i$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_{i-1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i+1}^n\right) = Q_i - \rho_i^n$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(\varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i+1}^n\right) = \rho_i^n$$

- Vezesse le az 1D Poisson-egyenlet diszkretizálásából adódó hibaegyenletet. Hogyan lehet kiszámítani a reziduumokat?

Elhagyjuk az iterációs indexet: $\frac{1}{\Delta x^2}\left(\varepsilon_{i-1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}\right) = \rho_i$



$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{i-2} - \varepsilon_{i-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2}\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{i+2}\right) =$$

ezek kiesnek

$$= \frac{1}{2}\rho_{i-1} + \rho_i + \frac{1}{2}\rho_{i+1}$$

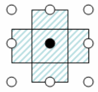
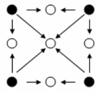
$$\frac{1}{4\Delta x^2}\left(\varepsilon_{i-2} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+2}\right) = \frac{1}{4}\left(\rho_{i-1} + 2\rho_i + \rho_{i+1}\right)$$

$$\frac{1}{\Delta X^2}\left(\delta_{I-2} - 2\delta_I + \delta_{I+2}\right) = \rho_I$$

restrikciós séma (2D és 3D esetekben közelítő jellegű, ezért jelöljük δ-val.)

- Vezesse le az 1D multigrid módszer esetében alkalmazandó restrikciós sémát! Mutassa meg a durva és a finom rácson diszkretizált hiba egyenlet kapcsolatát!

Általánosítás 2D esetre:

Restrikció:  Prolongálás: 

1. ρ_i restrikciója $\rightarrow \rho_I$
2. δ_I számítása ¼ annyi ismeretlen meghatározása (és ¼ annyi iteráció). Az időigény szinte elhanyagolható.
3. δ_I prolongálása a finom rácsra (δ_i), majd egy simítás a finom rácson.

Miért ne mennénk le még durvább rácsokra?

1. Reziduumok kiszámítása a legfinomabb rácson
2. Reziduumok restrikciója minden durvább rácsra
3. Egyenletrendszer megoldása a legdurvább rácson
4. Minden finomabb rácsra:
   - Korrekció prolongálása
   - Utósimítás

- Írja fel egy multigrid "V" ciklus lépéseit!

A megoldás műveletigénye

Szükséges iterációk száma 2D-ben:

p	Nsor	N	Jacobi	G-S	Vonalrelax	Multigrid
3	7	49	40	20	10	13
4	15	225	160	80	40	33
5	31	961	640	320	160	59
6	63	3969	2560	1280	640	75
7	127	16129	10240	5120	2560	79

Műveletigény / N:

p	Nsor	N	Jacobi	G-S	Vonalrelax	Multigrid
3	7	49	200	100	50	260
4	15	225	800	400	200	660
5	31	961	3200	1600	800	1180
6	63	3969	12800	6400	3200	1500
7	127	16129	51200	25600	12800	1580

finom háló

- Hogyan nő az iterációk szükséges száma az intervallumok számának növelésével Jacobi, Gauss-Seidel és vonalrelaxációs módszerek esetében és hogyan változik multigrid módszer esetében? Közelítőleg hogyan változik az egy ismeretlen meghatározásához szükséges (szorzási / osztási) műveletek száma 2D esetben?

Kompresszibilis áramlások számítása

Dr. Kristóf Gergely

2008.11.23.

Egyszerű példa

1D izentrópikis áramlás állandó keresztmetszetű csőben.
Pl: kompresszorok, kipufogók áramlása.

Kontinuitás: $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0$$

Euler-egyenlet: $$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Izentrópikus egyenlet: $$\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\frac{p_0}{{\rho_0}^{\gamma}}$$

p_0 és ρ_0 a referencia állapotra adott állandók.
Ismeretlenek p, ρ, u mint x és t függvényei.

- Írja fel az állandó keresztmetszetű csőben történő, egydimenziós, izentrópikus gázáramlás alapegyenleteit!

Új mezőváltozót vezetünk be: „a” hangsebesség

Csak egy állapotjelzőt lehet megválasztani. Használjuk állapotjelzőként az „a” hangsebességet és ezzel küszöböljük ki ρ-t és p-t.
Új mezőváltozóink: u és a; mindkettő m/s dimenziójú.

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\frac{p_0}{{\rho_0}^{\gamma}} \qquad a^2=\left.\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_{s=áll.}=\gamma\frac{p}{\rho}=\gamma\,\rho^{\gamma-1}\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\gamma\frac{p_0}{{\rho_0}^{\gamma}}\rho^{\gamma-1}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$ln(p)+\gamma\,ln(\rho)=0 \qquad 2\,ln(a)=(\gamma-1)ln(\rho)+ln\left(\gamma\frac{p_0}{{\rho_0}^{\gamma}}\right)$$

$$\frac{dp}{p}=\gamma\frac{d\rho}{\rho} \qquad 2\frac{da}{a}=(\gamma-1)\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\boxed{\frac{da}{dp}=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{a}{p}} \qquad \boxed{\frac{da}{d\rho}=\frac{\gamma-1}{2}\frac{a}{\rho}}$$

- Vezesse le a hangsebesség nyomás és sűrűség szerinti deriváltjait izentrópikus gázáramlás esetében!

Átalakítjuk az alapegyenleteket

Kontinuitás: $$\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{da}{d\rho}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{da}{d\rho}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\gamma-1}{2}\frac{a}{\rho}=0$$

$$\boxed{\frac{\partial a}{\partial t}+u\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\gamma-1}{2}a\frac{\partial u}{\partial x}=0} \qquad (1)$$

Euler-egyenlet: $$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\overbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\underbrace{\frac{da}{dp}\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{a}}_{1}}^{a^2}=0$$

$$\boxed{\frac{\gamma-1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\gamma-1}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial a}{\partial x}=0} \qquad (2)$$

- Alakítsa át az 1D izentrópikus gázáramlás alapegyenleteit m/s dimenziójú mezőváltozókra (u és a).

$$\frac{\partial a}{\partial t}+u\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\gamma-1}{2}a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\gamma-1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\gamma-1}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial a}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

(1) + (2)

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(a+\frac{\gamma-1}{2}u\right)}_{\alpha}+(u+a)\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(a+\frac{\gamma-1}{2}u\right)}_{\alpha}=0$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}+(u+a)\frac{\partial \alpha}{\partial x}=0$$

$C_+=dx/dt=u+a$ irány mentén: α=állandó.

(1) - (2)

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(a-\frac{\gamma-1}{2}u\right)}_{\beta}+(u-a)\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(a-\frac{\gamma-1}{2}u\right)}_{\beta}=0$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t}+(u-a)\frac{\partial \beta}{\partial x}=0$$

$C_-=dx/dt=u-a$ irány mentén: β=állandó.

- Vezesse le a karakterisztikus irányokat és a Rieman-féle invariánsokat!

Karakterisztikák

C_+ és C_- karakterisztikus irányok, α és β Rieman-féle invariánsok.

Ha α és β adottak ... abból a és u meghatározható:

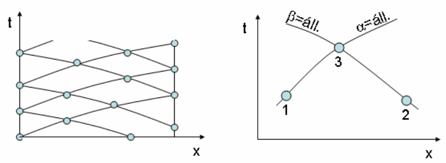
$$\left.\begin{aligned}\alpha&=a+\frac{\gamma-1}{2}u\\ \beta&=a-\frac{\gamma-1}{2}u\end{aligned}\right\}\rightarrow\quad a=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad u=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-1}$$

a-ból pedig meghatározható a többi állapotjelző:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2=\frac{T}{T_0}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$$

- Hogyan lehet meghatározni az elsődleges mezőváltozókat a Rieman-féle invariánasok értékéből 1D izentórpikus gázáramlás esetében?

Numerikus megoldás



$$\begin{aligned}\alpha_3&=\alpha_1\\ \beta_3&=\beta_2\end{aligned}\;\longrightarrow\; a_3=\frac{\alpha_3+\beta_3}{2}\qquad u_3=\frac{\alpha_3-\beta_3}{\gamma-1}$$

$$x_3-x_1=0.5\left[(u_3+a_3)+(u_3+a_3)\right](t_3-t_1)+o(\Delta t^2)$$

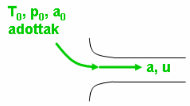
$$x_3-x_2=0.5\left[(u_3-a_3)+(u_2-a_2)\right](t_3-t_2)+o(\Delta t^2)$$

t_3, x_3 számítható.

- Ismertesse a karakterisztikák módszerét!

Peremfeltételek

Beáramlás nyitott csővégen: energiaegyenlet



$$T_0=T+\frac{u^2}{2c_p}=\frac{a^2}{\gamma R}+\frac{u^2}{2c_p}$$

$$T_0=\frac{1}{\gamma R}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{2c_p}\left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma-1}\right)^2$$

Vagy α, vagy β már adott a belülről kifelé tartó karakterisztika alapján.
A másik Rieman-féle invariáns a fenti egyenletből meghatározható

Kiáramlás:

$$a_0=a=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

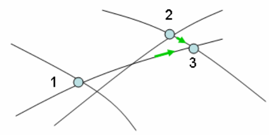
Zárt csővég:

$$u=0\longrightarrow\frac{\alpha-\beta}{\gamma-1}=0\longrightarrow\alpha=\beta$$

- Hogyan számíthatók az 1D, izentrópikus gázáramlás peremfeltételei a karakterisztikák módszerének alkalmazása esetén?

Problémák

- A fizikai folyamattól függően a numerikus háló eldurvulhat.
- Azonos irányba tartó karakterisztikák metszhetik egymást.



- Milyen numerikus problémák merülnek fel a karakterisztikák módszerének alkalmazásával kapcsolatban?

Véges térfogatok módszerével

Ugyancsak az előbbi csőáramlás példájára alkalmazzuk.

Kontinuitás:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}=0$$

Mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u^2+p\right)}{\partial x}=0$$

Állapotegyenlet:

$$p=\rho RT$$

Energiaegyenlet:

$$\frac{\partial\rho e}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u e+pu\right)}{\partial x}=0 \qquad e=c_vT+\frac{u^2}{2}$$

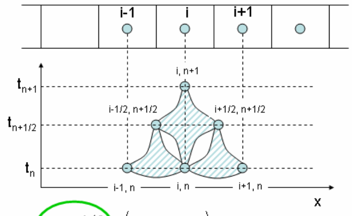
Formális vektorokba rendezhetjük:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t}+\frac{\partial \underline{F}}{\partial x}=\underline{Q}$$

$$\underline{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho e\end{bmatrix}\qquad \underline{F}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho u e+pu\end{bmatrix}\qquad \underline{Q}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

- Mutassa be az 1D, izentrópikus gázáramlást leíró alapegyenleteket konzervatív alakban! Írja fel a egyenletrendszert vektoros formában!

Másodrendű, kétlépéses Lax-Wendroff módszer:



1. lépés

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2}-\left(U_i^n+U_{i+1}^n\right)/2}{\Delta t/2}+\frac{F_{i+1}^n-F_i^n}{\Delta x}=\frac{Q_i^n+Q_{i+1}^n}{2}$$

U ismeretében számítható ρ, u, e. Pl: ρ=(ρu)/u
Az állapotegyenletből számítható p.
Meghatározzuk F és Q értékeit az n+1/2 időszinten.

2. lépés

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\Delta t}+\frac{F_{i+1/2}^{n+1/2}-F_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}=\frac{Q_{i-1/2}^{n+1/2}+Q_{i+1/2}^{n+1/2}}{2}$$

- Ismertesse a másodrendű, kétlépéses Lax-Wendroff módszert!

Időben előrehaladó explicit séma. Feltételesen stabilis:

$$\Delta t=\sigma\frac{\Delta x}{a+|u|}\qquad \sigma\le 1$$

A lökéshullámok környezetében erősen oszcillál az eredmény.
Korrigálni kell a fluxusokat, vagy mesterséges viszkozitást kell alkalmazni.

Egy hasonló módszer FLUENT-ben: density based solver + explicit time integration. Itt csak a σ értéke állítható be, az időlépést ebből számolja.

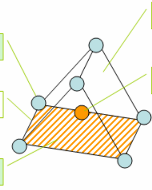
Peremfeltételek: A peremeken alkalmazhatunk például karakterisztikákat.

- Milyen stabilitási feltételt kell betartani és milyen egyéb problémák jelentkeznek a másodrendű, kétlépéses Lax-Wendroff módszer alkalmazása esetében?

Hálógenerálás

Dr. Kristóf Gergely
2006. Október 5.

A numerikus háló elemei



A háló fájl tartalma:
-Csomópontok pozíciója
-Határfelületek: hivatkozások a csomópontok sorszámára

A FLUENT rendszer minden mezőváltozót cellacentrumokban tárol.
A hálóvonalak szakaszonként egyenesek.

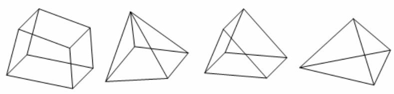
- Ismertesse a numerikus háló elemeit! Hol értelmezi a mezőváltozók tárolt értékeit a FLUENT rendszer?

Lehetséges geometriai modellek:
- 2D tengelyszimmetrikus
- 2D tengelyszimmetrikus, perdületes
- 2D síkáramlás
- 3D áramlás

Pl. GAMBIT-tel létrehozható elemtípusok:

2D modellek esetén:

3D modellek esetén:



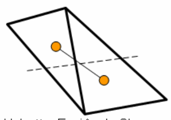
FLUENT rendszerben tetszőleges oldalszámú cellák kezelhetők.
Probléma: jó minőségű háló szisztematikus generálása.

- Milyen 2D és 3D cellatípusokat tudunk előállítani GAMBIT-ben? Milyen cellák kezelhetők FLUENT-ben?

A hálóval kapcsolatos minőségi elvárások

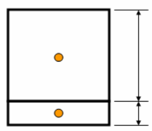
1.) Ott kell finom felbontást alkalmazni, ahol rohamosan változik a megoldás. FLUENT rendszerben a megoldás alapján automatikusan finomítható.

2.)



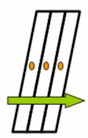
Helyette: EquiAngle Skew
hexa esetén: 0.85
tetra esetén: 0.95

3.)

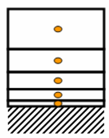


Legfeljebb: 1:2

4.)



5.)



Fal felé sűrűsödő prizmatikus réteg. A fal melletti cella méretét a megoldás ismeretében ellenőrizni kell.

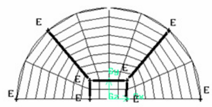
- Hol kell sűríteni a numerikus hálót?
- Szemléltesse a háló torzulását! Miért vezet ez numerikus pontatlanságokhoz? Mivel mérjük a torzultságot? Közelítőleg milyen maximális értékek megengedettek hexa és tetra hálókra?
- Miért kell korlátozni a szomszédos cellarétegek méretének arányát (sűrítési rátát)? Kb. mekkora sűrítési ráta engedhető meg?

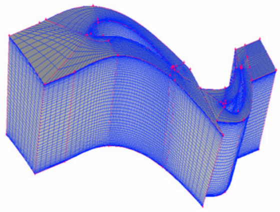
Élek hálózása

- Méret megadása
- Sűrítés (hálózással és anélkül)
- Élháló másolása
- Irányítás megfordítása
- Soft link, hard link

Blokk-struktúrált háló

A tartományt széthasítjuk több, egymáshoz kapcsolódó részre, majd ezeket külön "Map"-eljük.

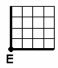




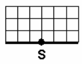
3D példa: turbinafokozat

Felület sarok típusok

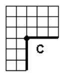
End (E): 0<szög<120



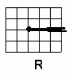
Side (S): 120<szög<216



Corner (C): 216<szög<309

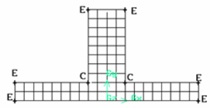


Reverse (R): 309<szög<360



- Mitől függ, hogy a felület egy sarkában milyen lesz a háló topológiája négyszög háló esetén?

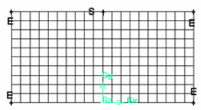
Quad – Submap módszer

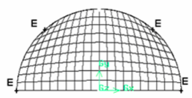


Csúcspontok:
4*End+L*Side+M*(End+Corner)+N*(2*End+Reverse)
Periodikus felületnél:
N*Side+M*(2*End+2*Corner)
A "Map"-hez hasonlóan jól kontrolálható struktúrált hálót hoz létre, de képes kihagyni blokkokat.

- Mennyiben tér el a Quad-Submap hálózási módszer a Quad-Map módszertől?

Hex – Map módszer

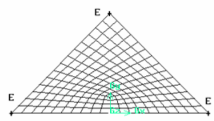


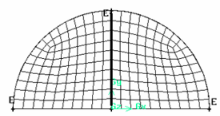


Csúcspontok: **4*End+N*Side**
Periodikus felületnél (Pl: szárnyrácsesetén): **N*Side**
A háló topológiailag tégla.
A háló csúcsainál lehetnek 180 fokos élű lapos cellák.

- Ismertesse a Map módszert! Milyen probléma merül fel például egy félkör tartomány hálózása esetében? Hogyan lehet megoldani ezt a problámát a tartomány blokkokra való felbontásával? Rajzzal illusztrálja!

Quad - Tri-primitive módszer

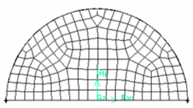


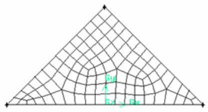


Csúcspontok: **3*End+N*Side**
Célja: háromszög jellegű tartomány hálózása Quad hálóval.

- Milyen sarkok esetében alkalmazható a Quad-Tri-primitive hálózási módszer?

Quad – Pave módszer



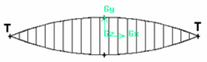


- A csúcspontok típusát figyelmen kívül hagyja
- Teljesen automatikus
- A felületet határoló éleken összesen páros számú intervallum szükséges
- Nem garantált, hogy szimmetrikus hálót eredményez
- A peremek közelében jobb minőségű

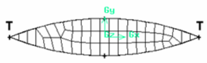
- Hogyan működik a Quad-Pave hálózási módszer? Milyen feltételt támaszt az élek hálójával szemben?

Egyéb „quad” módszerek

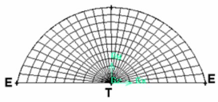
Quad - Tri Map



Quad - Tri Pave



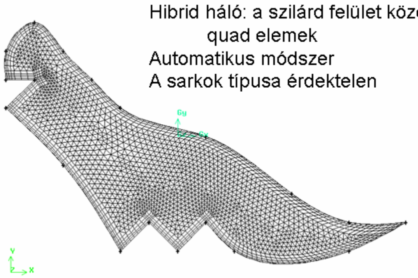
Quad - Tri Wedge



- Mit jelent a T felületsarok típus?

Tri – Pave módszer

Hibrid háló: a szilárd felület közelében quad elemek
Automatikus módszer
A sarkok típusa érdektelen

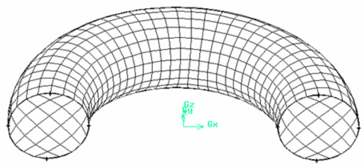


Prizmatikus fali háló (határréteg háló) készítése

- Az első cellának benne kell lenni a logaritmikus faltörvény érvényességi tartományában
- Nem lehet hirtelen ugrás a cellavastagságban
- Vannak esetek, amikor három irányban kell sűríteni a falnál (pl. LES)
- Internal continuity
- Face vertex type szerepe

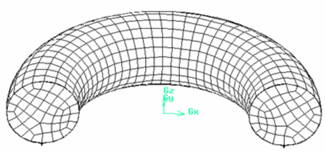
- Milyen hálót kell alkalmazni a fal közelében turbulens áramlások esetében? Hogyan hozható létre megfelelő fali háló tetra cellák alkalmazása esetén Gambit-ben? Hogyan ellenőrizhető a fal melletti cella mérete? Milyen kritériumot kell betartani nagy- és kis Reynolds-számú turbulencia modell alkalmazása esetén?

Map módszer



"Map"-elt felületek határolják, összesen 8 "End" csúccsal.
A tartomány alkalmas felbontása után számos test "Map"-elhető

Cooper módszer



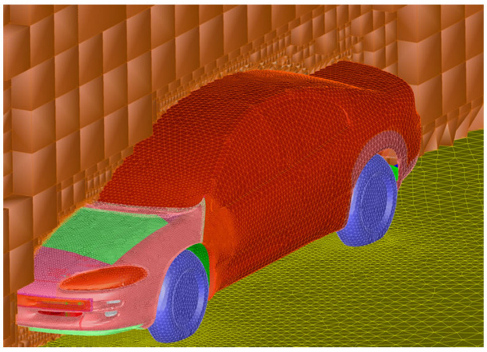
A "Source feces" felületi hálóját átsöpri a térfogaton.
Az oldalfelületek hálójának "Submap"-el hálózhatónak kell lenni.
Prizma (wedge) cellákat is tud csinálni

- Hogyan működik a Cooper módszer? Milyen háló lehet a forrásfelületeken?

Egyéb 3D módszerek

- Hex – Submap
  Hasonló a 2D submaphoz.
- Hex – Tet-primitive
  Hasonló a tri-primitive-hoz, tetraéder jellegű tartományon működik.
- Tet/hibrid – Tgrid
  Mindenhol tetra, kivéve a határrétegben: wedge. Méretfüggvényekkel szabályozható.

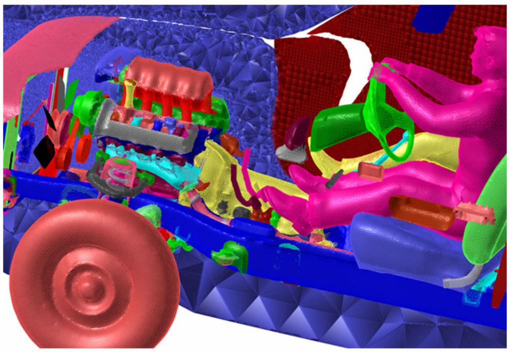
Hex-core



Méretfüggvények

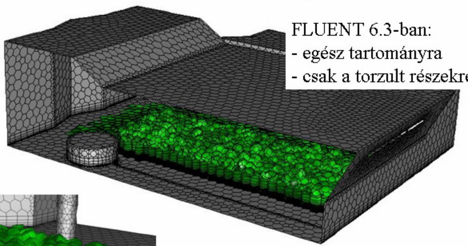
- Source, attachement
- Görbületre sűrítés, hézagra sűrítés
- Egyszerű forrásobektumokat próbáljunk megadni (és lehetőleg egyet)

Tgrid – Surface wrapper

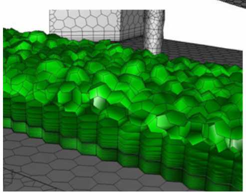


- Mi a szerepe a hálózásnál alkalmazott méretfüggvények forrásobjektumainak? Milyen szempontokat kell figyelembe venni ezek megválasztásakor?

Duális (Polihedral) háló

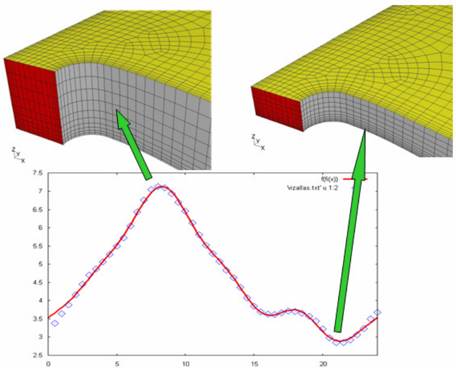


FLUENT 6.3-ban:
- egész tartományra
- csak a torzult részekre

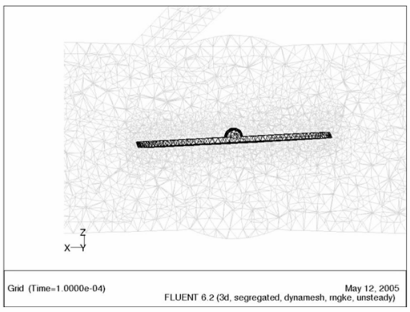


- Csökken a cellaszám (1/6)
- Kicsit romlik a pontosság (nem jelentősen)
- Javul a háló minősége (torzultság)
- Egy iterációs lépés kb. azonos ideig tart
- Gyorsul a konvergencia (1/2, 1/3 lépés)

Deformálódó 1.



Deformálódó háló 2.



- Hogyan lehet duális hálót készíteni? Mi az előnye és hátránya ezek alkalmazásának?

Peremfeltételek

Dr. Kristóf Gergely
2006. szeptember 28.

1. Mit értünk peremfeltételek alatt?

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,\phi\,dV + \oint_A \rho\,\phi\,\vec{v}\cdot d\vec{A} = \oint_A (\vec{S}_A + \Gamma\,\nabla\phi)\cdot d\vec{A} + \int_V S_V\,dV$$

A számítási tartomány kontúrjára eső határfelületeken meg kell határoznunk a fluxusokat és felületi forrásokat.
Az általános transzportegyenlet differenciál alakja másodrendű p.d.e:

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\,\phi\,\vec{v}) = \nabla\cdot\vec{S}_A + \nabla\cdot(\Gamma\,\nabla\phi) + S_v$$

Általában háromféle peremfeltétel lehetséges egy másodrendű p.d.e. esetén:

1. Elsőfajú: a peremen adott a mezőváltozó értéke;
2. Másodfajú: a peremen adott a mezőváltozó peremre merőleges irányú deriváltjának értéke;
3. Vegyes: a mezőváltozónak és deriváltjának lineáris kombinációja adott.

Az egyes transzportegyenletekre nem teljesen függetlenül választhatók meg a peremfeltételek típusa. (Pl. nyomásra és sebességre nem lehet ugyanott elsőfajú feremfeltételt megadni.)
„Peremfeltétel csomagok” rendelhetők a határfelületekhez.

- Egy-egy transzportegyenlethez milyen peremfeltételeket adhatunk meg?
- Mit értünk első-, másodfajú és vegyes peremfeltételeken?
- Mit nevezünk peremfeltétel alatt a FLUENT rendszerben?

2. Összenyomhatatlan és összenyomható áramlás

	Inkompresszibilis	Kompresszibilis
Anyagmodellek	$\rho = \rho_0$ $\quad \rho = \frac{p_0}{RT}$ $\rho = \rho_0 - \rho_0\,\beta(T - T_0)$	$\rho = \frac{p}{RT}$
Sűrűség a nyomástól	**nem függ**	**függ**
Torlónyomás értelmezése:	$p_{tot} = p + \frac{\rho}{2}v^2$	$p_{tot} = p\left(1 + \frac{\kappa-1}{2}M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$
Kontinuitási egyenlet:	nyomásegyenlettel helyettesítjük	eredeti formában megoldható sűrűségre
Lehetséges időlépés Courrant-szám	$\Delta t = C\left.\frac{\Delta x}{v_\perp}\right\|_{min}$	$\Delta t = C\left.\frac{\Delta x}{a + \|\vec{v}\|}\right\|_{min}$

- Sorolja fel a FLUENT rendszerben elérhető kompresszibilis és az inkompresszibilis sűrűségmodelleket!
- Kb. mekkorára választhatjuk az időlépést kompresszibilis és inkompresszibilis modell esetében?

3. Peremfeltétel „csomagok” FLUENT rendszerben

- Axis
- Exhaust-fan
- Inlet-vent
- Intake-fan
- Interface
- Mass-flow-inlet
- Outflow
- Outlet-vent
- Periodic
- Pressure-far-field
- Pressure-inlet
- Pressure-outlet
- Symmetry
- Velocity-inlet
- Wall

Belső szakadási feltételek:

- Fan
- Interior
- Porous-jump
- Radiator
- Wall

Forrástagokkal leírt speciális modellek:

- Felhasználói forrástag
- Porózus zóna
- Fixed value
- Forgó koordináta rendszer

- Ismertesse a Velocity-inlet és Massflow-inlet peremfeltételek fizikai tartalmát! Milyen peremfeltételt jelentenek az egyes mezőváltozókra nézve?
- Ismertesse a Pressure-inlet és Presure-outlet peremfeltételek fizikai tartalmát! Milyen peremfeltételt jelentenek az egyes mezőváltozókra nézve? Hol kell statikus nyomást és hol kell össznyomást előírni, miért?
- Ismertesse a Outflow és Pressure-far-field peremfeltételek fizikai tartalmát! Mi az alkalmazásuk feltétele, mi az előnye a visszaverődés mentes peremfeltételeknek?
- Ismertesse a Inlet-vent, Intake-fan, Outlet-vent és Exhaust-fan peremfeltételek fizikai tartalmát! Milyen jellemzőkkel írható le a nyomásugrás?
- Milyen termikus peremfeltételeket lehet falak esetében használni FLUENT rendszerben?
- Mit jelent a Fan modell és milyen célokra alkalmazható?
- Adjon pédát a Porous-jump modell alkalmazására!
- Adjon példákat a Felhasználói forrástagok alkalmazására!
- Mi az előnye a belső falak alkalmazásának. Adjon egy két alkalmazási példát!
- Mire alkalmazható az Interior és az Interface peremfeltételek?

4. Fontos tudnivalók

- Outflow-t nem lehet Pressure Inlet vagy Pressure Outlet társaságában alkalmazni
- Outflow-t nem lehet összenyomható áramlás esetén alkalmazni
- Outflow-n keresztül nem lehet visszaáramlás (azonnal konvergencia problémák)
- Velocity Inlet-et nem szabad összenyomható áramlásra alkalmazni (Mass Flow Inlet kell.)
- Pressure Inlet és Pressure Outlet egymásba át tud váltani
- Az áramlás megosztásának három módszere:
  - Outflow (flow rate weight beállításával)
  - Több Pressure Outlet
  - Velocity Inletek negatív sebességgel (elvileg ugyan kifogásolható, de praktikus)

- Milyen belépő peremfeltételek alkalmazhatók összenyomható áramlások esetén?
- Történhet-e kiáramlás Pressure-inlet-en keresztül? Milyen nyomásként kezeli ilyen esetben a megadott nyomásértéket a megoldó?
- Milyen peremfeltételek alkalmazhatók az áramlás megosztására?

5.Profilok megadása

- Pontprofillal (szöveges fájl formájában)
- Képlettel (C nyelvű felhasználói függvény formájában)

- Röviden ismertessen két módszert térben változó peremfeltételek (profilok) megadására!

Áramlástechnikai gépek szimulációja

Kristóf Gergely

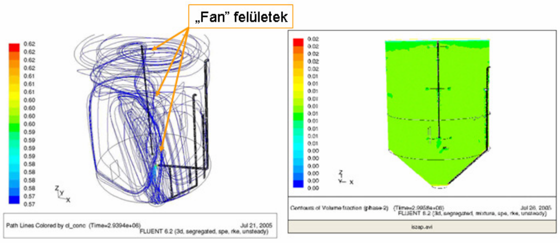
2008. 11. 18

Lehetséges megközelítések

- Hatáskeresztmetszet modell - fan
- „Befagyasztott" járókerék modell - frozen rotor
- Keverőfelület modell - mixing plane
- Csúszó hálós modell - sliding mesh

- Sorolja fel az áramlástechnikai gépek modellezésére alkalmazható megközelítéseket!

1. Hatáskeresztmetszet modell

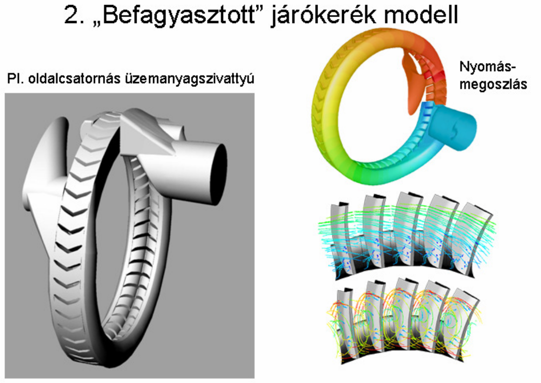


Az FCSM Dél-pesti Szennyvíztisztító Telep termofil rothasztó tornyának modellje
Hosszú időtartamú folyamatok modellezhetők, pl. szemcsék ülepedése.

- Adjon példát a hatáskeresztmetszet (Fan) modell alkalmazására?

2. „Befagyasztott" járókerék modell

Pl. oldalcsatornás üzemanyagszivattyú



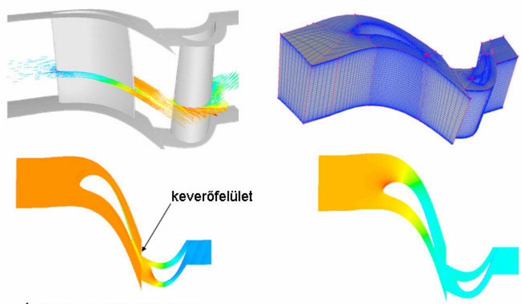
Ha sok lapát van, akkor jó közelítést ad.

A lapátok periodicitása kihasználható.

- Röviden ismertesse a "befagyasztott járókerék" modellt. Milyen korlátai vannak az alkalmazásának? Mikor alkalmazható előnyösen?

3. Keverőfelület modell

Kihasználható a lapátrács periodicitása

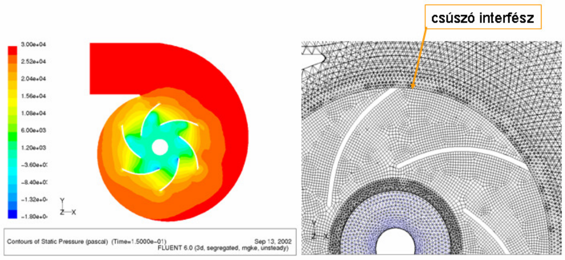


Álló koordináta-rendszerben

Együttforgó rendszerben

- Hogyan működik a keverőfelület modell?

4. Csúszó hálós modell



Ha a csigaházban változik a nyomás, a lapátcsatornákat időben változó nyomás terheli.
Így figyelembe vehető a lokális gyorsulás a lapátcsatornában.
FLUENT rendszerben quad cellákkal kell hálózni a csúszó interfészt.
Ugyanez axiális átömlésű gép esetében:

- Hogyan kell összekapcsolni a forgórészt az állórésszel csúszóhálós modell esetében? Mire kell ügyelni hálózáskor?

A CFD elemzés minőségéről és megbízhatóságáról

Dr. Kristóf Gergely

2008. november 18.

Modell fejlesztési folyamata

I. <u>Ellenőrzés:</u>
Jól oldjuk-e meg a leíró egyenleteket?
Teljesülnek-e az elvárt konvergencia jellemzők?
Eredmények összehasonlítása analitikus megoldással, vagy pontosabb numerikus megoldással.

II. <u>Validálás:</u>
Jók-e a leíró egyenletek?
Helyesek-e a peremfeltételek?
Mérésekhez viszonyítunk.

III. <u>Kalibrálás:</u>
Modell fontos paramétereinek illesztése egy-két méréshez. Illesztés után a modell feltehetően jól adja vissza a módosítások hatását.

- Mit értünk ellenőrzés, validálás és kalibrálás alatt?

Hiba és bizonytalanság

- Pontos ↔ Közelítő
- Hiba:
  Az okát ismerjük, szándékos elhanyagolásokból adódik. Az erőforrások növelésével vagy a megoldási módszer fejlesztésével csökkenthető.
- Bizonytalanság:
  Oka és mértéke nem pontosan ismert, nem tudjuk csökkenteni az erőforrások növelésével.

- Mit értünk hibák és bizonytalanságok alatt?

1. Modell bizonytalanságok

Valóság ↔ A leíró egyenletek analitikus megoldása

Nem jó egyenleteket oldunk meg.

- Turbulencia modellek
- Stacionárius-e az áramlás?
- Ideális gáz, egyéb állapotegyenletek
- Nem newtoni folyadék tulajdonságok
- Reakciómodellek egyszerűsítése

- Mi a modellbizonytalanságok oka? Adjon néhány példát!

2. Diszkretizációs hiba

A leíró egyenletek analitikus megoldása ↔ A diszkretizált egyenletek pontos megoldása

- Sűrítéssel csökkenthető. A konvergencia rendje a Taylor-sor elhagyott tagjainak nagyságrendjével jellemezhető
  (konvergencia rendje).
  Elvileg elsőrendű séma esetében az integrálás hibája a felbontás méretével arányosan csökken, másodrendű séma esetében négyzetével arányosan csökken stb.
- Időbeli és térbeli diszkretizálásból adódhat.
- Hogy gyakorlatban teljesül-e a konvergencia formális rendje az nem biztos, mert függ a háló minőségétől, upwinding esetében cella Reynolds-számtól, falfüggvény empirikus elemet visz a modellbe stb. A rendet mérni kell.
- Az eredmények hálófüggetlensége szisztematikus sűrítéssel vizsgálható.

- Mi okozza a diszkretizációs hibát? Mit jelent gyakorlati szempontból a konvergencia rendje?

Hálófüggetlenség vizsgálata

- Legjobb a kétszeri, lineáris (vonal menti) duplázás: 8x, 64x több cella.
- Durva hálón: Φ_{4h},
  Praktikus hálón: Φ_{2h},
  Finom hálón: Φ_h.
- Nem feltétlenül kell felezni az intervallumokat, de legalább 1.5-szörösére növeljük az intervallumok számát (min 3.4-szeres cellaszám növekedés)
- A sűrítés legyen egyenletes, hasonló háló struktúrát és közel azonos háló minőséget kell biztosítani. (Hálóméret ugrás, torzultság…)
- Vigyázat! Fal közelében is azonos arányban kell sűríteni: kiléphetünk a faltörvények érvényességi tartományából, ami egy nagyságrenddel nagyobb hiba forrása is lehet.
- A hiba becslésére Richardson-extrapoláció alkalmazható:

$$\varepsilon_h \cong \frac{\Phi_h - \Phi_{2h}}{r^p - 1}, \qquad p = \log\left(\frac{\Phi_{2h} - \Phi_{4h}}{\Phi_h - \Phi_{2h}}\right)$$

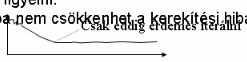
- Φ lehet integrál jellemző vagy mezőváltozó, utóbbi esetben a hiba eloszlására is lehet következtetni, így a háló optimalizálható.
- Pl: elsőrendű módszer esetében, egyszeri lineáris duplázás (r=2) esetén a finom hálón a megoldás hibája: kb. a két hálón kapott megoldás közötti eltéréssel azonos.

- Hogyan vizsgálható meg a számítási eredmények numerikus hálótól való függetlensége? Ismertesse a Richardson-féle extrapolációt!

3. Iterációs hiba

Bekonvergált megoldás ⟷ Véges iterációval kapott megoldás

- Egyáltalán konvergál-e a megoldás? Ha nem konvergál:
  1. hibás háló;
  2. hibás peremfeltételek;
  3. az alkalmazott turbulencia modellel nem kapható adott esetben stacionárius eredmény. > Időfüggő megoldással érdemes próbálkozni. (URANS)
- Figyeljük a reziduumokat. Az első néhány iterációs lépés kivételével az iterációs hiba arányosan változik a reziduumokkal: a kezdeti reziduum értékét 10^{-3}, 10^{-6}-szorosára csökkentjük. (Vannak olyan esetek, amikor pl. a kezdeti feltétel pontosan kielégíti a kontinuitást.)
- Ha bekonvergált, érdemes megnövelni az underrelaxation faktorokat és megnézni, hogy tartja-e a megoldást.
- Más kezdőértékről indítva ugyanoda ér-e.
- Vannak nehezen konvergáló jellemzők, pl. ellenállás-tényező ezeket érdemes külön figyelni.
- Az iterációs hiba nem csökkenhet a kerekítési hiba határa alá:



- Miből adódik az iterációs hiba?
- Mik a konvergencia problémák leggyakoribb okai?
- Milyen jelentősége van a reziduumoknak az iterációs hiba ellenőrzése szempontjából?
- Hogyan ellenőrizhető, hogy a megoldás bekonvergált-e?
- Adjon egy példát lassan konvergáló jellemzőre!
- Honnan tudható biztosan, hogy nem érdemes tovább folytatni az iterációt?

4. Kerekítési hibák

Pontos számokkal számolva ⟷ Véges számábrázolással számolva

- Alapértelmezett számábrázolás 4 byte-os (7 értékes jegy), FLUENT-ben lehet dupla pontossal is.
- Néhány áramlás, ami tudottan érzékeny a kerekítési hibákra:
  - alacsony Re turbulencia modellek;
  - természetes konvekció kis hőfokkülönbséggel;
  - sugárzásos hőtranszport
  - keverék modellek alacsony koncentrációval
  - nagy egyensúlyi (hidrosztatikai) nyomásgradiens

- Mi okozza a kerekítési hibát?
- Mekkora számábrázolási pontossággal dolgozunk, ha szimpla pontosságú megoldót használunk és hogyan lehet a dupla pontosságú megoldót igénybe venni?
- Milyen modellek érzékenyek a kerekítési hibára?

5. Alkalmazási bizonytalanság

- Ehhez kell a legtöbb tapasztalat:
  - Geometriai bizonytalanság;
  - Peremfeltételek bizonytalansága;
  - Anyagjellemzők bizonytalanásga.

- Mi okozza az alkalmazási bizonytalanságokat?

Geometriai bizonytalanság

- Nem a terveknek megfelelően készítik el a berendezést (gyárthatósági szempontok, kísérleti vizsgálat alapján tovább optimalizálták a geometriát);
- Kis geometriai részleteknek is lehet nagy jelentősége:
  - résáram ventilátoroknál;
  - fali rücskök, hegesztési varratok.
- Nagyon tagolt geometria esetében porózus modelleket alkalmazunk: figyelni kell, hogy jól legyen paraméterezve. > Mikro modell készíthető.
- Terhelés alatt (áramlás közben) a geometria jelentősen változat, pl. sátortető körüli áramlás, repülőgépek szárnya stb: FEM – FVM kapcsolt futtatás. (Egyelőre FLUENT – ABACUS, rövidesen FLUENT – ANSYS.)
- FLUENT rendszerben a geometriai modell nem megy át a szolverbe > sűrítés esetén finomabb felületi hálót lehet importálni és arra végezni a sűrítést.

- Ismertessen két példát, ahol kis geometriai részleteknek nagy áramlástani jelentősége van!

Peremfeltételi bizonytalanságok

- Legtöbb esetben pl. tudjuk a belépő térfogatáramot, de nem tudjuk a sebességprofilt. Belépő turbulens jellemzőkre általában semmilyen információ nincs. Ezek közül ε nem is mérhető.
- A peremfeltételi bizonytalanságok numerikus érzékenységvizsgálatokkal határolhatók be.
- Olyan nagyra kell venni a geometriát, hogy ne legyen nagy a peremérzékenység: felvízi oldalon nagyobb, alvízi oldalon kisebb lehet.
- Pl. épületmodell esetében ne az ajtóban írjuk elő a légnyomást, hanem készítsünk kívül egy dobozt.
- Pl. atmoszférikus áramlások rendkívül érzékenyek a belépő sebesség és turbulens profilokra: Goricsán-módszer.
- LES rendkívül peremérzékeny: időfüggő, realisztikus belépősebességprofilokat kell megadni, különben sok számítás ellenére sem javul a szimuláció pontossága.

- Hogyan csökkenthető a megoldás peremfeltételi adatokra való érzékenysége? Hogyan becsülhető meg a peremfeltételek megadása által okozott hiba?

Anyagjellemzők bizonytalansága

- Sűrűségmodell megválasztása: számolhatunk-e állandó sűrűséggel?
  Pl: a légköri sűrűség? Tengerszinten eddig tartósan mért nyomás szélső értékei:
  p: 877 – 1079 kPa → 20 %
  T: 253 – 313 K → 22 %
- Anyagösszetétel változhat?
- Viszkozitás erősen hőmérséklet függő lehet, FLUENT-ben csak a normál állapoti értékek vannak táblázva, de megadhatunk törtvonalas függvényt vagy polinomot. Többféle anyagmodell nemnewtoni folyadékokra (csak lamináris).
- Termikus jellemzők erősen hőmérséklet függőek lehetnek. (c_p, κ)
- Többfázisú modellek esetében különösen sok hangolnivaló van:

A CFD elemzést terhelő hibák és bizonytalanságok

1. Modell bizonytalanságok
2. Diszkretizációs hiba
3. Iterációs hiba
4. Kerekítési hiba
5. Alkalmazási bizonytalanság
6. Felhasználói hibák
7. Program hibák