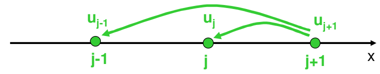
Differenciasémák levezetése Taylor-sorokkal

Kristóf Gergely

2008. 11. 18.

Egy implicit, másodrendű differenciaséma



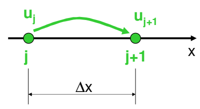
$$u_j = u_{j+1} + u'_{j+1}(-\Delta x) + u''_{j+1}\frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u_{j-1} = u_{j+1} + u'_{j+1}(-2\Delta x) + u''_{j+1}2\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$$

$$u_j - \frac{u_{j-1}}{4} = \frac{3}{4}u_{j+1} + u'_{j+1}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) + o(\Delta x^2)$$

$$u'_{j+1} = \frac{\frac{3}{2}u_{j+1} - 2u_j + \frac{1}{2}u_{j-1}}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

Euler-módszer



Az (analitikus) megoldás Taylor-sora j pontból a j+1 pontba.

Elsőrendű pontosságú integrálási séma:

$$u_{j+1} = u_j + u'_j\Delta x + o(\Delta x)$$

Differenciaséma, szintén elsőrendű pontossággal:

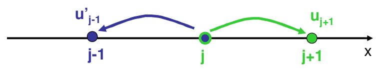
$$u'_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + o(1)$$

Szintén elsőrendű integrálási séma:

$$u_j = u_{j+1} + u'_{j+1}(-\Delta x) + o(\Delta x)$$

Általában u'_{j+1} az u_{j+1} függvényében adott, így a fenti egyenletből egy bonyolultabb képlettel fejezhető ki u'_{j+1}. Ilyen esetben ezt **implicit** sémának nevezzük.

Adams-Basforth séma



$$u_{j+1} = u_j + u'_j\Delta x + u''_j\frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

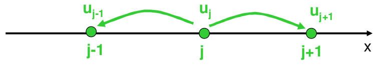
$$u'_{j-1} = u'_j + u''_j(-\Delta x) + o(\Delta x) \quad / \; + \ldots \times \frac{\Delta x}{2}$$

$$u_{j+1} = u_j + \frac{3}{2}u'_j\Delta x - \frac{1}{2}u'_{j-1}\Delta x + o(\Delta x^2)$$

Másodrendű pontosságú explicit integrálási séma.
Alkalmas a **NS egyenlet időbeli integrálására**.

A térbeli deriváltakról általában:
Nem egyenközű és nem koordiána irányú rácsokra nagyon komplikált sémák adódnak.
A transzportegyenletekben végül is csak **div, grad és Laplace** operátorok kellenek.

CDS



$$u_{j+1} = u_j + u'_j\Delta x + u''_j\frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u_{j-1} = u_j + u'_j(-\Delta x) + u''_j\frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u'_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + o(\Delta x)$$

A divergencia közelítő alakja

Véges térfogatos módszere esetében a divergencia operátort felületi integrálásra Visszavezetve közelítjük, ezért a Gauss-tételből kell kiindulni:

$$\int_V \nabla \cdot \underline{u}\, dV = \oint_A \underline{u} \cdot d\underline{A}$$

Az $\underline{u}$ vektor Descartes koordinátáit ui-val jelölve az alábbi módon definiálhatjuk a divergencia operátor diszkrét alakját a P középpontú cella középpontjában:

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i = \frac{\sum_k \int_{A_k} u_\perp dA}{V_P}$$

ahol A_k a cella oldalfalainak indexe.

A gradiens közelítő alakja

Egy skaláris mennyiség gradiensét a Gauss-tételből levezetett alábbi integrál átalakító tételből határozhatjuk meg:

$$\int_V \nabla\phi \, dV = \oint_A \phi \cdot d\underline{A}$$

A gradiens operátor i komponensét tehát az alábbi alakban számolhatjuk:

$$\tilde{\nabla}\Big|_i \phi = \frac{\sum_k \int_{A_k} \phi dA_i}{V_P}$$

A_i a felületvektor i komponensét jelöli Descartes koordináta-rendszerben.

A Laplace-operátor közelítő alakja

Egy skaláris mennyiségre vonatkozó Laplace operátor felírható a gradiens divergenciájaként:

$$\Delta\phi = \nabla \cdot \nabla\phi$$

Diszkrét közelítés elvégzéséhez a belső gradienset a cella felületére Interpolálnunk kell. Jelöljük ezt < > zárójelekkel:

$$\tilde{\Delta}\phi = \tilde{\nabla} \cdot \left\langle \tilde{\nabla}\Big|_i \phi \right\rangle$$

Gyakorlatilag a nyomás kivételével (pl. hőmérséklet vagy transzportált passzív skalárok esetében) a gradiens felületre merőleges komponensét egyszerűbben is közelíthetjük.
Végül is a Laplace operátor közelítő alakja a P pontban és a szomszédos cellákban tárolt Φ értékek lineáris kombinációja lesz:

$$\tilde{\Delta}\phi = A_P \, \phi_P + \sum A_\ell \, \phi_\ell$$

Az A együtthatók értékét a fent leírt módon határozhatjuk meg.