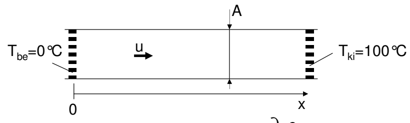
Diszkretizáció véges térfogatok módszerével

Kristóf Gergely

2008.11.13.

1D példa

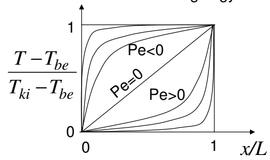
Stacionárius áramlás egyenes csőben, hővezetési feladat:



$$\underline{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Kontinuitás: $\dfrac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \longrightarrow$ u = állandó

Energiaegyenlet: $$\oint_A [\, c_v T + \frac{v^2}{2}\,]\, \rho\, \underline{v} \cdot d\underline{A} = \oint_A \lambda \nabla T \cdot d\underline{A}$$



Az analitikus megoldás:

$$\frac{T - T_{be}}{T_{ki} - T_{be}} = \frac{e^{\rho u x c_v / \lambda} - 1}{e^{\rho u L c_v / \lambda} - 1}$$

Pe (Peclet-szám)

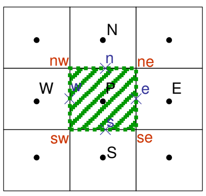
Fluxusok és térfogati források

A transzportegyenlet egy ϕ skaláris mezőváltozóra stacionárius áramlás esetén:

$$\oint_A \rho \phi \underline{v} \cdot d\underline{A} = \oint_A \Gamma \nabla \phi \cdot d\underline{A} + \int_V q_\phi dV$$

konvektív fluxus konduktív fluxus

Egy 2D háló nevezetes pontjai P pont környezetében (kompasz indexelés):

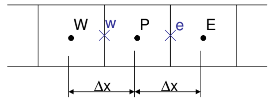


Felületi integrálok?

Térfogati integrálok?

Diszkretizálás

Felírjuk a fluxusok felületi integráljait:



$$(\rho u T)_e \cancel{A} - (\rho u T)_w \cancel{A} = \left(\frac{\lambda}{c_v}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e \cancel{A} - \left(\frac{\lambda}{c_v}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w \cancel{A}$$

Új jelölések: $C_e = C_w = \rho u \qquad D_e = D_w = \dfrac{\lambda}{c_v\, \Delta x}$

$$C_e T_e - C_w T_w = D_e (T_E - T_P) - D_w (T_P - T_W)$$

Ugyanez még egyszerűbben: $F_e - F_w = 0$,

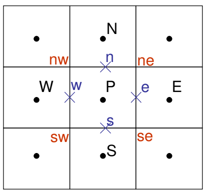
ahol: $F_e = C_e T_e - D_e (T_E - T_P)$ a teljes fluxus.

Integrálok numerikus közelítése

Fluxusok felületi integrálja az e felületen:

$$F_e = \int_A \underline{f} \cdot d\underline{A} = \langle f_\perp \rangle_e A_e \cong f_{e\perp} A_e$$

2-od rendű pontosságot biztosít ...



$$F_e \cong A_e \frac{1}{2} (f_{ne} + f_{se})_\perp$$ 2-od rendű (trapéz szabály)

$$F_e \cong \frac{A_e}{6} (f_{ne} + 4 f_e + f_{se})_\perp$$ 4-ed rendű (Simpson-szabály)

A térfogati forrás integrálja a P cellára:

$$Q_P \cong \int_V q_\phi dV \cong q_{\phi,P} V_P$$

Pl. FLUENT rendszerben a mennyiségeket a cellaközéppontokban tároljuk
Más pontokba f értékét interpolálni kell.

CDS séma

$$C_e T_e - C_w T_w = D_e (T_E - T_P) - D_w (T_P - T_W)$$

A face-hőmérsékleteket **lineárisan interpoláljuk**:

$$\left[\frac{C_e}{2}(T_P + T_E) - D_e (T_E - T_P) \right] - \left[\frac{C_w}{2}(T_W + T_P) - D_w (T_P - T_W) \right] = 0$$

Felírjuk a P cellára vonatkozó lineáris egyenletet:

$$A_P T_P = A_W T_W + A_E T_E$$

A_W	A_E	A_P
$D_w + C_w / 2$	$D_e - C_e / 2$	$A_W + A_E$

$$D_e + D_w + C_e/2 - C_w/2 = A_E + A_w + \underbrace{C_e - C_w}_{=0}$$ kontinuitás

Súlyozott átlagnak is tekinthető. Ha az együtthatók pozitívak, akkor az átlagolás nem vezethet be extrémumot P pontban.

Az algebrai egyenletrendszer megoldása

Pl. 4 cella esetén az alábbi:

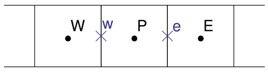
c
b
a

$$\begin{bmatrix} A_{1,P} & A_{1,E} & 0 & 0\\ A_{2,W} & A_{2,P} & A_{2,E} & 0 \\ 0 & A_{3,W} & A_{3,P} & A_{3,P}\\ 0 & 0 & A_{4,W} & A_{4,P}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}T_{1,P}\\ T_{2,P}\\ T_{3,P}\\ T_{4,P}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-A_{1,W}T_{be}\\ 0\\ 0\\ -A_{4,E}T_{ki}\end{bmatrix}$$

Megoldás: Gauss-eliminációval.
n ismeretlenes, tridiagonál mátrixú egyenletrendszer esetében csak 2 n művelet (egy ciklus előre és egy vissza): Thomas-algoritmus.

Sajnos 2D és 3D áramlások esetében nem tridiagonál mátrixú.

UDS séma



u>=0 esetén: $T_w = T_W, \quad T_e = T_P$

u<0 esetén: $T_w = T_P, \quad T_e = T_E$

$$A_W T_W + A_E T_E = A_P T_P$$

A_W	A_E	A_P
$Max(C_w,0) + D_w$	$Max(-C_e,0) + D_e$	$A_W + A_E$

További numerikus kísérletek...

A pontosság elsőrendűre csökken.

Példaprogram

1. Hasonló megoldást kapunk több, különböző paraméter változatra.
2. Hiba N^2-el arányosan csökken. Másodrendű pontosság.
3. Néha oszcillál. Mikor kezd oszcillálni?

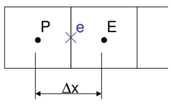
$$Pe = \frac{\rho u L}{\lambda / c_v}$$

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu}$$

$$Pe_{\Delta x} = \frac{\rho u \Delta x}{\lambda / c_v} > 2$$

Mesterséges „diffúzió”

A numerikus hibának egy fontos fajtája. A pontatlan interpolációból adódott:



$$T_e = T_P + \frac{\Delta x}{2}\frac{dT}{dx} + o(\Delta x)$$

ezt elhagyjuk

$$F_e = C_e T_P + C_e \frac{\Delta x}{2}\frac{dT}{dx} - D_e (T_E - T_P)$$

Olyan mintha megnöveltük volna a hővezetést!
Írjuk be T deriváltjának diszkrét közelítését:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_E - T_P}{\Delta x}$$

$$D_e = \frac{\lambda}{c_v \Delta x} \longrightarrow \frac{\lambda_{mest}}{c_v \Delta x} = \frac{\rho u}{2} \longrightarrow \lambda_{mest} = \frac{\rho u c_v \Delta x}{2}$$

Transzportivitás

Fizikai szempontból:
növekvő Pe esetén egyre T_E hatása egyre kevésbé érvényesül T_P-re.

Tudja ezt a numerikus séma?

$$A_E = D_e - C_e / 2$$

$$C_e = \rho u \qquad D_e = \frac{\lambda}{c_v \, \Delta x} \qquad Pe = \frac{\rho u L}{\lambda / c_v}$$

$$A_E = \frac{D_e}{2}\left(2 - \frac{C_e}{D_e}\right) = \frac{D_e}{2}\left(2 - \frac{\rho u \Delta x}{\lambda / c_v}\right) = \frac{D_e}{2}(2 - Pe_{\Delta x})$$

Cella Peclet-szám: a konvektív és konduktív hőfluxusok hányadosa.
$Pe_{\Delta x}$>2 esetén A_E nagysága újra nőni kezd.
A stabilitási probléma is ilyen esetekben lép fel.

HDS séma

Spalding (1972)

Az a fontos, hogy az „A” együtthatók ne legyenek negatívak.
$Pe_{\Delta x}$ értéke alapján számoljuk a felületi fluxust:

$Pe_{\Delta x} \le -2 \qquad F_e = C_e T_E$

$-2 < Pe_{\Delta x} \le 2 \qquad F_e = C_e\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{Pe_{\Delta x}}\right)T_P + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{Pe_{\Delta x}}\right)T_E\right]$

$2 < Pe_{\Delta x} \qquad F_e = C_e T_P$

Legalább kis $Pe_{\Delta x}$ esetén másodrendű.

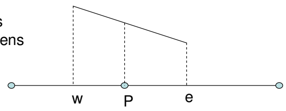
$$A_W T_W + A_E T_E = A_P T_P$$

A_W	A_E	A_P
$Max\left(C_w, \left[D_w + \frac{C_w}{2}\right], 0\right)$	$Max\left(-C_e, \left[D_e - \frac{C_e}{2}\right], 0\right)$	$A_W + A_E$

SOU séma

másodrendű szélfelőli súlyozás

Cellán belül lineáris interpoláció a gradiens segítségével:



Pl. a cellafali hőmérséklet: $T_e = T_P + \left.\frac{dT}{dx}\right|_P \frac{\Delta x}{2}$

A gradiens meghatározása két lépésben:

1. lépés $\left.\frac{dT}{dx}\right|_P = \frac{T_e' - T_w'}{\Delta x}$ $\quad T_e' = \frac{T_P + T_E}{2}, \quad T_w' = \frac{T_W + T_P}{2}$

2. lépés $\left.\frac{dT}{dx}\right|_P$ értékét úgy korlátozzuk, hogy ne vezethessen be extrémumokat. Gradiens limiterek: C Hirsch.