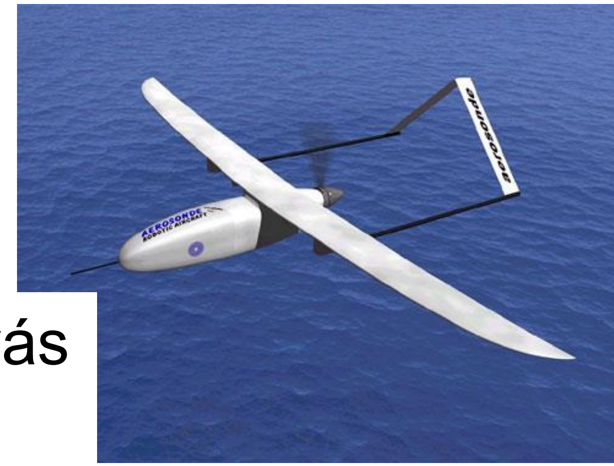
2. Potenciálos áramlások

Dr. Tomor András
BME Áramlástan Tanszék
2020. február 17.

Potenciálos áramlások

- Nyugvó térből eredő áramlás potenciálos mindaddig, amíg a falon keletkező örvényesség bele nem keveredik.
- A legtöbb analitikus megoldás potenciálos áramlásokra ismeretes. [H.Lamb, 1932, első kiadása 1879]
- Egyszeresen összefüggő tartományban a potenciálos áramlás mozgási energiája a legkisebb a tartomány határán adott normális sebességkomponensű áramlások közül. [Kelvin, 1849]

Alkalmazási példák

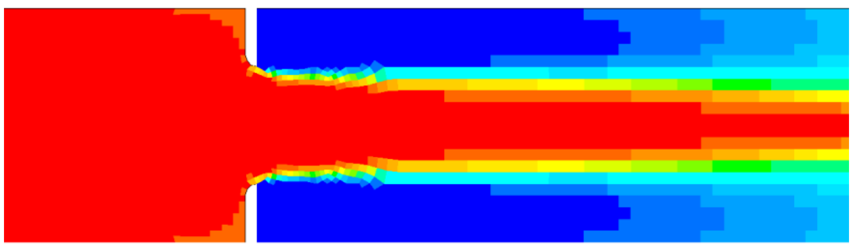


- Áramlás az elszívás közelében
- Szárnyak
- Szivárgás, kutak
- Ivóvíztárolók

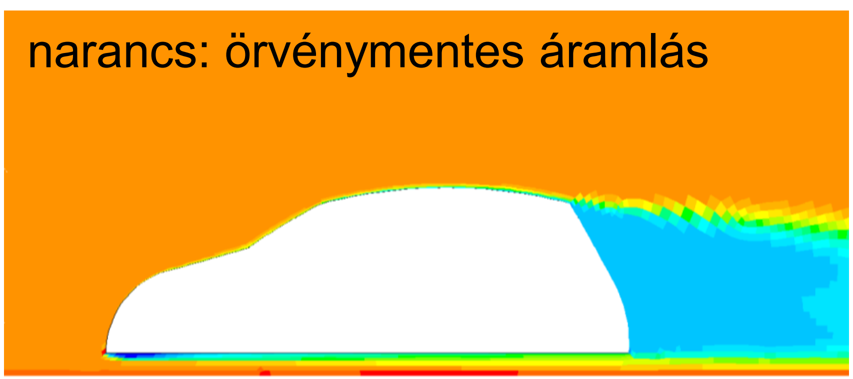
Potenciálos áramlás viszkózus folyadékban

Össznyomás megoszlása 2D CFD modellek alapján:

szárny körül



szűk nyílás esetében



egy autó körül

Sebességi potenciál (ϕ)

Örvénymentes áramlás esetén: $\nabla \times \underline{v} = \underline{0}$

Definiálhatjuk ϕ sebességi potenciált, melyre: $\underline{v} = \nabla \phi$ azaz:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

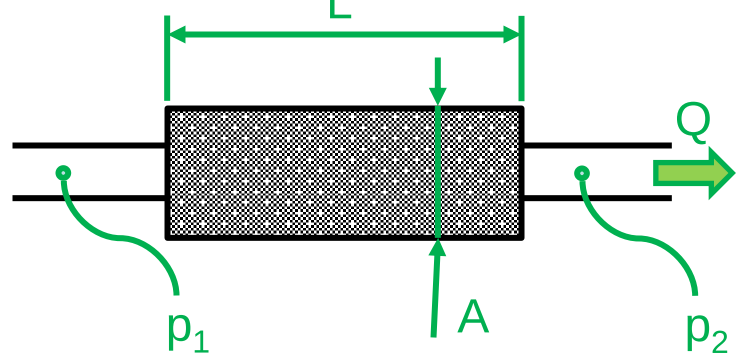
Elég ϕ-t meghatároznunk, abból v_x, v_y és v_z már könnyen számolhatók, tehát ϕ bevezetésével háromról egyre csökkentettük az ismeretlen skalármezők számát.

Az örvénymentességen kívül más fizikai kikötést nem tettünk, így ϕ alkalmazható kompresszibilis áramlások esetén is.

Szivárgó áramlások

Porózus anyagokban, például talajban, kőzetekben, adszorber ágyakban az egyfázisú szivárgó áramlások általában igen jó közelítéssel leírhatók a Darcy-törvénnyel. Q térfogatáram egy vízszintes tengelyű porózus csatornában:

$$Q = -\frac{p_2 - p_1}{L} A \frac{k}{\mu}$$



melyben a dinamikai viszkozitás μ [Pa.s]=$\rho\nu$, k [m^2] pedig a porózus anyag áteresztőképessége. k értékét legtöbbször Darcy-egységben adják meg: 1 D $\cong 10^{12}$ m^2. A Darcy-törvény általános alakja:

$$\underline{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla \left(p + \rho g z \right)$$

Tehát a sebességi potenciál:

$$\phi = -\frac{k}{\mu} \left(p + \rho g z \right)$$

A nyomásmező meghatározása

ϕ (és ebből $\underline{v}$) ismeretében a nyomásmezőt utólag is kiszámíthatjuk a Bernoulli-egyenlet felhasználásával. Ideális folyadékra (ν=0, ρ=áll.):

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) + \rho\, g\left(z_1 - z_2\right)$$

Szivárgó áramlás esetében a nyomásmező más kapcsolatban áll a mozgásállapottal:

$$\phi = -\frac{k}{\mu}\left(p + \rho\, g\, z\right)$$

ezért:

$$p_2 - p_1 = \frac{\mu}{k}\left(\phi_1 - \phi_2\right) + \rho\, g\left(z_1 - z_2\right)$$

ϕ kiszámítása

A kontinuitás szerint:

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\nabla \phi\right) = \Delta \phi = 0$$

ϕ tehát harmonikus függvény, azaz megoldása a Laplace-egyenletnek.

Egy fontos alapmegoldás a Q [m^3/s] intenzitású pontforrás sebességtere:

$$\underline{v} = \frac{Q}{4r^2\pi}\underline{e}_r \qquad \longrightarrow \qquad \phi = -\frac{Q}{4\pi r} + \text{áll.}$$

A megoldások szuperponálhatók. Bármely potenciálos áramképet megközelíthetünk a határfelületen alkalmasan fölvett forrásmegoszlással.

Áramfüggvény (ψ)

Def: $$\underline{v} = \nabla \times \underline{\psi}$$ $\underline{\psi}$ vektorpotenciál.

$\underline{\psi}$ automatikusan kielégíti a kontinuitási egyenletet állandó sűrűségű folyadékra, mivel:

$$\nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot \nabla \times \underline{\psi} \equiv 0$$

2D-ben ψ skaláris mennyiség, mivel: $v_z = 0 \quad \text{és} \quad \dfrac{\partial \ldots}{\partial z} = 0$

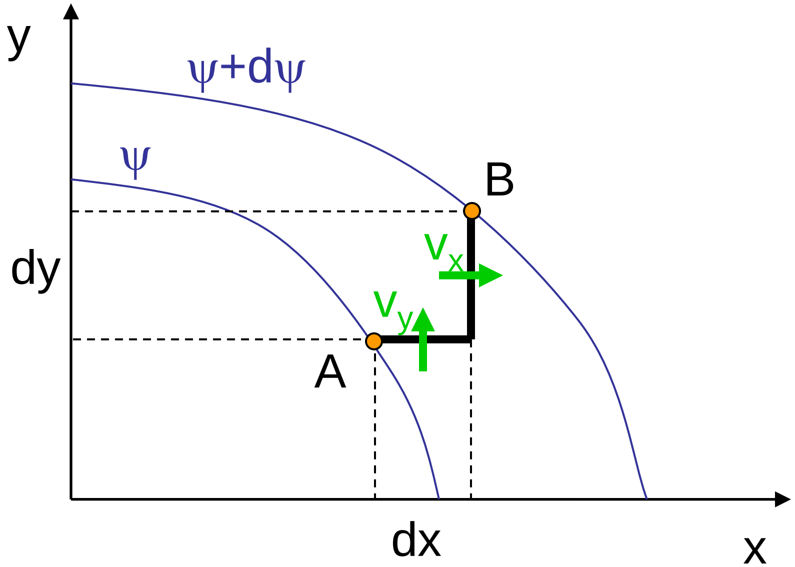
$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_z}{\partial y} - \cancel{\dfrac{\partial \psi_y}{\partial z}} \\ \cancel{\dfrac{\partial \psi_x}{\partial z}} - \dfrac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ \cancel{\dfrac{\partial \psi_y}{\partial x}} - \cancel{\dfrac{\partial \psi_x}{\partial y}} \end{pmatrix} \rightarrow$$

ezért ψ = ψ_z , továbbá

$$\boxed{v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{és} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

Tehát 2D áramlásokat egyetlen ψ skalármezővel leírhatunk, 3D-ben viszont 3 komponense van.

ψ fizikai értelmezése 2D-ben



Az áramfüggvény teljes differenciálja:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y \quad \text{és} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x$$

$$d\psi = -v_y \, dx + v_x \, dy$$

ψ az A és B pontok közötti térfogatáram (1 m széles tartományban):

$$Q_{A-B} = \psi_B - \psi_A$$

ψ szintvonalain nem áramlik át a folyadék, ezért ψ szintvonalai **áramvonalak**.

A kontinuitás: $$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \, \partial x} = 0$$ 2D-ben is teljesül.

2D örvénymentes áramlás

ψ eddig leírt tulajdonságai örvényes áramlásra is érvényesek. Szorítkozzunk mostantól örvénymentes áramlásokra:

$$\left(\nabla \times \underline{v}\right|\Big)_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y \quad \text{és} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta \psi = 0$$

Tehát áramfüggvény is lehet bármely harmonikus függvény.

Komplex potenciál (w)

ψ is és ϕ is harmonikus függvények: $\Delta\psi = 0$ és $\Delta\phi = 0$

továbbá kielégítik a Cauchy-Riemann összefüggéseket:

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Tehát képezhetik egy komplex függvény valós és képzetes részét:

$$w(z) = \phi(x, y) + i\,\psi(x, y)$$

z a komplex helyvektor: $z = x + iy$

Bármely analitikus komplex függvény valós és képzetes részei állandó sűrűségű, stacionárius, potenciálos síkáramlást írnak le.

Már csak a peremfeltételeket kell kielégítenünk.
Megvizsgálunk néhány alapmegoldást (pl. ln(z), z^2 stb.), majd ezeket összegezve, transzformálva próbálunk bonyolultabb peremfeltételeket kielégíteni.

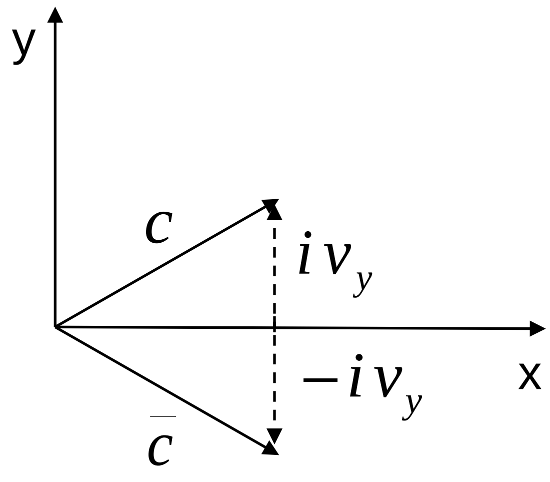
A komplex sebesség (c)

A sebesség egy komplex számmal adható meg:

$$c = v_x + i\,v_y$$

A sebesség komplex konjugáltját w differenciálásával nyerhetjük.
A differenciálás bármely irányban végezhető:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial iy} = v_x - i\,v_y = \bar{c}$$



Potenciálok

	ψ	ϕ	w
Neve	áramfüggvény	sebességi pot.	komplex pot.
Változó ρ esetén	nincs **	van	nincs
Örvényes áramlásra	van	nincs	nincs
3D-ben	vektor	skalár	nincs
Definíció	$\nabla \times \underline{\psi} = \underline{v}$	$\nabla \phi = \underline{v}$	$w = \phi + i\psi$

** 2D összenyomható áramlásra is definiálható áramfüggvény.

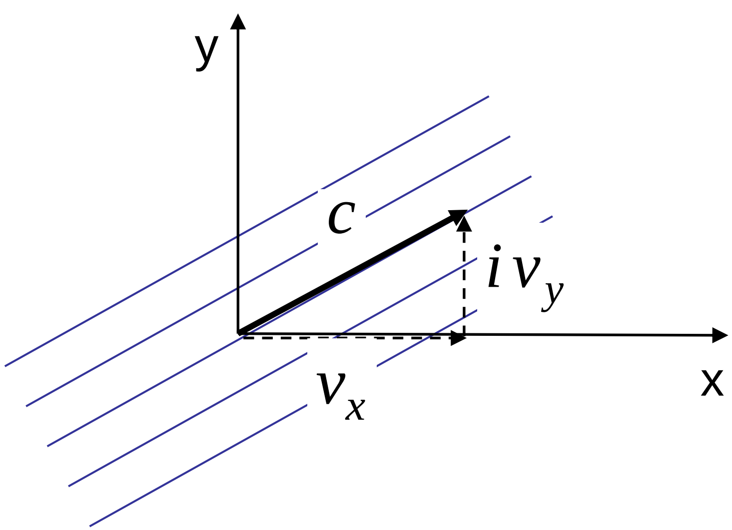
Párhuzamos áramlás

$$w = \bar{c}\, z$$

$$\bar{c} = \frac{dw}{dz} = v_x - i\, v_y$$

$$w = \left(v_x - i\, v_y\right)\left(x + i\, y\right) = \underbrace{v_x x + v_y y}_{\phi} + i\,(\underbrace{-v_y x + v_x y}_{\psi})$$

Pl: a ψ=0 áramvonal egy origón áthaladó egyenes:



$$y = \frac{v_y}{v_x}\, x$$

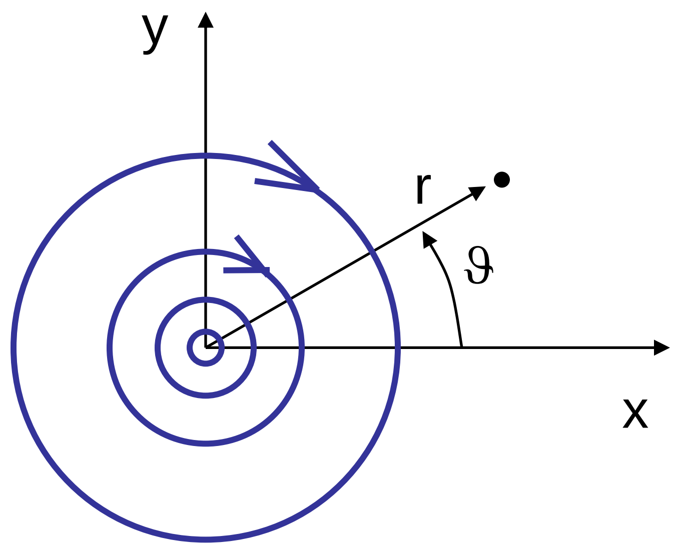
Potenciálos örvény

$$w = i\,k \ln z$$

k: tetszőleges valós szám.

$$w = i\,k \ln\left(r\,e^{i\vartheta}\right) = \underbrace{-k\vartheta}_{\phi} + i\,\underbrace{k \ln r}_{\psi}$$

Az áramvonalak koncentrikus körök: $\psi = k \ln r = \text{áll.}$



Potenciálos örvény

A sebességmező:

$$\bar{c} = \frac{dw}{dz} = i\frac{k}{z} = i\frac{k}{r\,e^{i\vartheta}} = i\frac{k}{r}e^{-i\vartheta}$$

$$\bar{c} = \frac{k}{r}i\left(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)\right)$$

$$c = \frac{k}{r}\left(\sin\vartheta - i\cos\vartheta\right)$$

Tangenciális irányú egységvektor.

A sebesség nagysága: $$|c| = \frac{k}{r}$$

Cirkuláció az origót egyszer megkerülő görbére:

$$\Gamma\,\left[\frac{m^2}{s}\right] = 2r\pi|c| = 2r\pi\frac{k}{r} = 2\pi k$$

ezért: $$\boxed{k = \frac{\Gamma}{2\pi}}$$